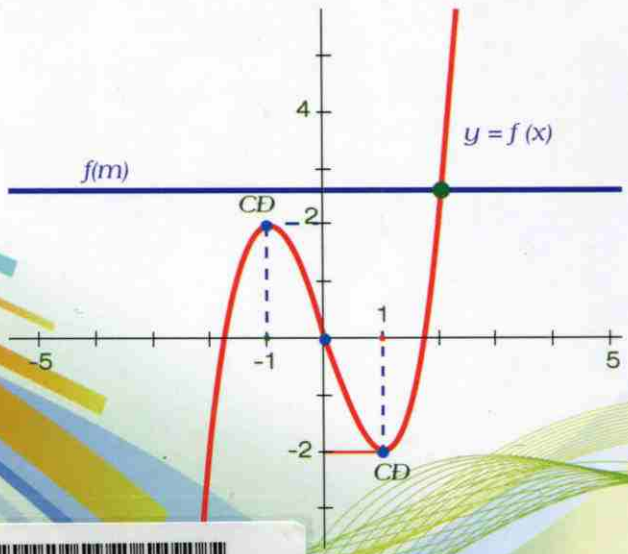
515
B452D

NGUYỄN TÀI CHUNG

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

PHƯƠNG TRÌNH HÀM

* Phân loại toán Phương trình hàm & bất phương trình hàm
* Phương pháp giải Phương trình hàm & bất phương trình hàm
* Các đề thi Quốc gia, Khu vực, Quốc tế



DVL.013493

ĐHQG HÀ NỘI
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

515
B452D

NGUYỄN TÀI CHUNG

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI
PHƯƠNG TRÌNH HÀM

* Phân loại toán Phương trình hàm & bất phương trình hàm
* Phương pháp giải Phương trình hàm & bất phương trình hàm
* Các đề thi Quốc gia, Khu vực, Quốc tế

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN
ĐVL / 13493 / 14

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại : Biên tập – Chế bản: (04) 39714896;
Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39714897
Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc - Tổng biên tập : **TS. PHẠM THỊ TRÂM**

Biên tập : **BÙI BÍCH – QUỐC ĐẠT**
Chế bản : **CÔNG TY KHANG VIỆT**
Trình bày bìa : **CÔNG TY KHANG VIỆT**

Tổng phát hành và đối tác liên kết xuất bản:

CÔNG TY TNHH MTV
DỊCH VỤ VĂN HÓA KHANG VIỆT
Địa chỉ: 71 Đinh Tiên Hoàng - P.Đa Kao - Q.1 - TP.HCM
Điện thoại: 08. 39115694 - 39105797 - 39111969 - 39111968
Fax: 08. 3911 0880
Email: khangvietbookstore@yahoo.com.vn
Website: www.nhasachkhangviet.vn

SÁCH LIÊN KẾT

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Mã số: 1L–73ĐH2014
Mã số ISBN: 978-604-939-154-5
In 2.000 cuốn, khổ 16×24 cm
Tại: **Cty TNHH MTV IN ẤN MAI THỊNH ĐỨC**
Địa chỉ: 71, Kha Vạn Cân, P. Hiệp Bình Chánh, Q. Thủ Đức, TP. Hồ Chí Minh
Số xuất bản: 207 – 2014/CXB/20 – 35/ĐHQGHN ngày 27/01/2014.
Quyết định xuất bản số: 66LK-TN/QĐ-NXBĐHQGHN, cấp ngày 20/02/2014
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2014

Lời nói đầu

Phương trình hàm là một chuyên đề quan trọng thuộc chương trình chuyên toán trong các trường THPT chuyên. Các bài toán liên quan đến phương trình hàm cũng là những bài tập khó, thường gặp trong các kì thi học sinh giỏi toán của các cấp tỉnh-thành, quốc gia, khu vực, quốc tế và Olympic học sinh, sinh viên.

Toán phương trình hàm phong phú, đa dạng, phức hợp nên khó phân loại và hệ thống hóa thành các chuyên đề riêng biệt. Tuy vậy, chúng tôi cố gắng tối đa sắp xếp hợp lí để giúp bạn đọc tiếp cận từng bước, từng mức độ kiến thức và luyện tập giải toán.

Phần lớn các bài toán trong sách này được tuyển chọn từ các kì thi: Olympic toán của các nước, khu vực và quốc tế, Olympic toán Sinh Viên toàn quốc, Olympic 30/04, thi học sinh giỏi quốc gia, thi chọn đội tuyển quốc gia dự thi toán quốc tế, thi học sinh giỏi của các tỉnh thành, thi vào hệ Kĩ sư tài năng của ĐHBK Hà Nội và thi vào hệ Cử nhân tài năng của ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội, hoặc trên Tạp chí *Toán học và Tuổi trẻ*. Một số bài toán khác là do tác giả tự biên soạn. Nhân đây xin cảm ơn tác giả của các bài toán mà chúng tôi đã trích chọn. Những lời giải đưa ra dựa trên tiêu chí tự nhiên, dễ hiểu. Tuy nhiên, đó chưa hẳn là lời giải hay nhất và ngắn gọn nhất, hy vọng cùng với cuốn sách, bạn đọc sẽ có được những lời giải hay hơn.

Việc phân chia các chương, bài, mục đều có tính độc lập tương đối và do đó không nhất thiết lúc nào cũng phải đọc theo trình tự. Khi sử dụng sách bạn đọc nên xem kĩ phần mục lục để tra cứu nhanh nhất những vấn đề mà mình cần tìm hiểu. Cũng cần nói thêm rằng, thật khó mà phân chia các vấn đề theo một biên giới rạch ròi như tiêu đề của từng bài. Đâu đó một vài vấn đề của bài này đã xuất hiện trong bóng dáng vấn đề của bài kia. Tuy vậy, chúng tôi vẫn cố gắng xoay quanh chủ đề của bài ấy để bạn đọc tự mình rút ra những gì thường gặp và cách giải quyết vấn đề.

Trong quyển sách này, các nhận xét, chú ý, lưu ý là rất quan trọng. Nó giúp ta lí giải được tại sao phải làm như vậy, giúp ta tìm được những suy luận rất tự nhiên trong những lời giải tưởng chừng rất thiếu tự nhiên. Nhiều khi từ các nhận xét ta còn rút ra được phương pháp giải toán cũng như cách sáng tác các bài toán mới.

Tốt nhất, độc giả nên tự mình giải các bài tập có trong sách này. Tuy nhiên để giúp bạn đọc thấy và làm chủ những kỹ xảo tinh vi khác, các bài tập đều đã được giải sẵn (thậm chí là với nhiều cách giải) với những mức độ chi tiết khác nhau. Nội dung sách đã cố gắng tuân theo ý chủ đạo xuyên suốt: Biết được lời giải của bài toán chỉ là yêu cầu đầu tiên, quan trọng hơn là làm thế nào để giải được nó, cách ta xử lý nó, những suy luận nào tỏ ra "có lý", các kết luận, nhận xét và lưu ý mà bài toán đưa ra...

Hy vọng quyển sách này là tài liệu tham khảo có ích cho học sinh các lớp chuyên toán bậc trung học phổ thông, giáo viên toán, sinh viên toán của các trường ĐHSP, ĐHKHTN cũng như là tài liệu phục vụ cho các kỳ thi học sinh giỏi toán THPT, thi Olympic toán sinh viên giữa các trường Đại học.

Các bạn học sinh, sinh viên, giáo viên và những người quan tâm khác có thể sẽ tìm thấy thiếu sót ở cuốn sách này trong quá trình sử dụng. Do vậy, sự góp ý trên tinh thần khoa học và xây dựng từ phía các bạn là điều chúng tôi luôn mong đợi. Hy vọng rằng trên bước đường tìm tòi, sáng tạo toán học, bạn đọc sẽ tìm được những ý tưởng tốt hơn, mới hơn, nhằm bổ sung cho các lời giải được trình bày trong quyển sách này.

Tác giả

Ths : Nguyễn Tài Chung

Chương 1

Phương trình hàm với phép biến đổi đối số

1.1 Một số kiến thức về hàm số và ánh xạ

Mục đích của quyển sách này là cung cấp các kĩ thuật giải toán về phương trình hàm và thông qua việc giải toán nhằm khắc sâu một số kiến thức rất quan trọng về hàm số, rèn luyện tư duy, chuẩn bị cho các kì thi học sinh giỏi, vận dụng những ý tưởng, suy luận trong quyển sách này vào các phân môn khác của toán học cũng như các môn học khác. Với mục đích tránh nặng nề cho đa số bạn đọc ngay từ lúc đầu tiên khi đọc sách, trong bài này chỉ trình bày rất ít một số kiến thức chung nhất về hàm số và ánh xạ, còn những kiến thức thông dụng khác được dùng vào giải toán sẽ được trình bày vào ngay phần đầu của các bài tương ứng của từng chương, hoặc ngay trước hoặc sau các bài toán cụ thể, hoặc trong các nhận xét, chú ý, lưu ý.

1.1.1 Ánh xạ

Định nghĩa 1. *Cho hai tập hợp A và B. Nếu có một quy tắc f nào đó sao cho với mỗi $a \in A$ tương ứng với đúng một phần tử $b \in B$ thì ta nói f là một ánh xạ từ A đến B, kí hiệu là $f : A \to B$. Phần tử b gọi là ảnh của a và viết là $b = f(a)$.*

Chú ý 1. *Nếu cho ánh xạ $f : A \to B$ thì ta thường quan tâm đến hai tập hợp sau đây: Tập hợp $f(A) = \{f(a) | a \in A\}$ (gọi là ảnh của tập A, hay gọi là tập giá trị của ánh xạ f) và tập hợp $f^{-1}(b) = \{a \in A | f(a) = b\}$ (gọi là nghịch ảnh của b).*

1.1.2 Đơn ánh, toàn ánh, song ánh

Định nghĩa 2. *Ánh xạ $f : A \to B$ được gọi là đơn ánh nếu với mọi $a_1, a_2 \in A$ sao cho $a_1 \neq a_2$ ta có $f(a_1) \neq f(a_2)$.*

Chú ý 2. *Ánh xạ $f : A \to B$ là đơn ánh nếu $f(a_1) = f(a_2)$ kéo theo $a_1 = a_2$.*

Định nghĩa 3. *Ánh xạ $f : A \to B$ được gọi là toàn ánh nếu với mọi $b \in B$ luôn tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$.*

Chú ý 3. *Ánh xạ $f : A \to B$ là toàn ánh khi và chỉ khi $f(A) = B$.*

Định nghĩa 4. *Ánh xạ $f : A \to B$ gọi là song ánh nếu f vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh.*

Chú ý 4. *Ánh xạ $f : A \to B$ là song ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ luôn tồn duy nhất $a \in A$ sao cho $f(a) = b$.*

Định nghĩa 5. *Giả sử $f : A \to B$ là một song ánh. Khi đó ánh xạ cho tương ứng mỗi phần tử $y \in B$ với tạo ảnh $x = f^{-1}(y)$ của nó được gọi là ánh xạ ngược của f và kí hiệu là f^{-1}.*

1.1.3 Hàm số

Định nghĩa 6. *Cho $X \subset \mathbb{R}$ và $Y \subset \mathbb{R}$. Khi đó ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là một hàm số từ tập X đến tập Y.*

Chú ý 5. *Cho hàm số $f : X \to Y$. Khi đó:*

- *Tập X gọi là tập xác định của hàm số f.*
- *Nếu $x_0 \in X$ thì $f(x_0)$ gọi là giá trị của hàm số f tại x_0.*
- *Tập hợp $f(X)$ gọi là tập giá trị của hàm số f.*
- *y_0 là một giá trị của số f khi và chỉ khi phương trình $f(x) = y_0$ có nghiệm. Hay nói cách khác là: phương trình $f(x) = y_0$ có nghiệm khi và chỉ khi y_0 thuộc tập giá trị của hàm f.*
- *f là toàn ánh $\Leftrightarrow$ phương trình (ẩn x) $y = f(x)$ (với $x \in X, y \in Y$) có nghiệm.*
- *f là song ánh $\Leftrightarrow$ phương trình (ẩn x) $y = f(x)$ (với $x \in X, y \in Y$) có nghiệm duy nhất.*

- *Dãy số chính là hàm số có tập xác định là $X = \mathbb{N}^*$ (hoặc $X = \mathbb{N}$), chẳng hạn dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, với $x_n = n - \sqrt{n^2+5}, \forall n = 1, 2, \ldots$, là hàm số:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & f(n) = n - \sqrt{n^2+5} \end{array}$$

(trong dãy số trên thì $f(n)$ đã được kí hiệu bởi x_n).

1.1.4 Một số bài toán áp dụng

Bài toán 1.1. *Cho hàm số f như sau:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2+5 \end{array}$$

a) Hãy tính giá trị của hàm số tại 2 và tại $-\sqrt{5}$.
b) Hãy chỉ ra tập xác định và tìm tập giá trị của hàm số đã cho.
c) Hàm số f có phải là đơn ánh không? có phải là toàn ánh không? có phải là song ánh không? vì sao?
d) Tìm $f^{-1}(8)$.

Giải. Ta có $f(x) = x^2 + 5$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
a) $f(2) = 2^2 + 5 = 9$, $f(-\sqrt{5}) = (-\sqrt{5})^2 + 5 = 10$.
b) Tập xác định: $\mathbb{R}$. Tập giá trị $[5; +\infty)$.
c) Hàm số f không phải là đơn ánh vì $1 \neq -1$ nhưng $f(1) = f(-1) = 6$. Hàm số f không phải là toàn ánh vì không tồn tại x để cho $x^2 + 5 = -2$. Hàm số f không phải là song ánh (do f không phải là đơn ánh).
d) $f^{-1}(8) = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = 8\} = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 5 = 8\} = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

Bài toán 1.2. *Cho dãy hữu hạn $x_0 = 1, x_1 = -5, x_2 = 7$. Hãy xác định tập xác định, tập giá trị, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của dãy số đó.*

Giải. Tập xác định là $\{0, 1, 2\}$. Tập giá trị là $\{1, -5, 7\}$. Giá trị lớn nhất là 7, giá trị nhỏ nhất là -5.

Bài toán 1.3. *Hãy chỉ ra một hàm số là*

a) Đơn ánh; *b) Toàn ánh;*
c) Song ánh; *d) Không phải là đơn ánh;*
c) Không phải là toàn ánh; *f) Không phải là song ánh.*

Giải. Hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cho bởi công thức $f(x) = 2x - 1$ vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh, vừa là song ánh. Hàm số $f : \mathbb{R} \to [2; +\infty)$ cho bởi công thức $f(x) = x^2 + 3$ vừa không phải là đơn ánh, vừa không phải là toàn ánh, vừa không phải là song ánh.

Bài toán 1.4. *Chứng minh rằng nếu hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(f(x))=ax+b,\ \forall x\in\mathbb{R}\ (a\neq 0)$ thì f là song ánh.*

Giải. Giả sử $f(x_1)=f(x_2)$. Khi đó

$$ax_1+b=f(f(x_1))=f(f(x_2))=ax_2+b\Rightarrow x_1=x_2.$$

Vậy f là đơn ánh. Với mọi $y\in\mathbb{R}$, luôn tồn tại $x=f\left(\dfrac{y-b}{a}\right)\in\mathbb{R}$ sao cho

$$f(x)=f\left(f\left(\frac{y-b}{a}\right)\right)=a.\frac{y-b}{a}+b=y.$$

Vậy f là toàn ánh, do đó f là song ánh.

Lưu ý. Kết quả bài toán 1.4 này được sử dụng nhiều.

Bài toán 1.5. *Cho hàm số $\varphi:[0;1]\to[a;b]$ như sau:*

$$\varphi(t)=(1-t)a+tb,\ \forall t\in[0;1].$$

a) Chứng minh rằng $\varphi:[0;1]\to[a;b]$ là song ánh.
b Tìm hàm ngược φ^{-1} của φ.

Giải.
a) Ta cần chứng minh f là đơn ánh và là toàn ánh để suy ra f là song ánh.

- Chứng minh $\varphi:[0;1]\to[a;b]$ là đơn ánh.
  Giả sử $t_1,t_2\in[0,1]$ sao cho $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$. Khi đó:

$$(1-t_1)a+t_1b=(1-t_2)a+t_2b\Leftrightarrow(t_2-t_1)a=(t_2-t_1)b$$
$$\Leftrightarrow(t_2-t_1)(a-b)=0\Leftrightarrow t_1=t_2\ (\text{do } a\neq b).$$

  Vậy f là đơn ánh.

- Chứng minh $\varphi:[0;1]\to[a;b]$ là toàn ánh. Giả sử $y\in[a;b]$. Khi đó $t=\dfrac{y-a}{b-a}\in[0;1]$ và

$$\varphi(t)=(1-t)a+tb=\left(1-\frac{y-a}{b-a}\right)a+\frac{y-a}{b-a}\cdot b$$
$$=\frac{(b-y)a}{b-a}+\frac{(y-a)b}{b-a}=\frac{y(b-a)}{b-a}=y.$$

  Vậy $\varphi:[0;1]\to[a;b]$ là toàn ánh.

Do đó $\varphi:[0;1]\to[a;b]$ là song ánh.
b) Do $\varphi:[0;1]\to[a;b]$ là song ánh nên tồn tại hàm ngược:

$$\varphi^{-1}:[a;b]\to[0;1],\ \varphi^{-1}(t)=\frac{t-a}{b-a}.$$

Bài toán 1.6 (Kosovo National Mathematical Olympiad 2011, Grade 9). *Cho hàm số $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ thoả mãn $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$. Hàm số f có phải là đơn ánh không ? vì sao ?*

Giải. Vì $2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\dfrac{1}{2}\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $2\neq\dfrac{1}{2}$ và $f(2)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ nên f không phải là đơn ánh.

Bài toán 1.7 (Kosovo National Mathematical Olympiad 2011, Grade 11). *Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn $f(\sin x)=\sin(2011x)$. Tìm $f(\cos x)$.*

Giải. Ta có:

$$f(\cos x)=f\left(\sin(\frac{\pi}{2}-x)\right)=\sin\left(2011(\frac{\pi}{2}-x)\right)$$
$$=\sin\left(1005\pi+(\frac{\pi}{2}-2011x)\right)$$
$$=-\sin\left((\frac{\pi}{2}-2011x)\right)=-\cos(2011x).$$

Bài toán 1.8. *Cho các số thực a,b,c,d sao cho $ad-bc\neq 0$ và $c\neq 0$. Xét hàm số:*

$$f:\quad \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-d}{c}\right\}\ \to\ \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{a}{c}\right\}$$
$$x\ \mapsto\ \frac{ax+b}{cx+d}$$

a) Chứng minh f là song ánh.
b) Tìm hàm ngược của hàm số f.

Giải.
a) Theo giả thiết $f(x)$ là hàm số xác định trên $\left(-\infty;\dfrac{-d}{c}\right)\cup\left(\dfrac{-d}{c};+\infty\right)$ và

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d},\forall x\neq\frac{-d}{c}.$$

Trước hết chứng minh f là đơn ánh: Giả sử $x_1,x_2\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-d}{c}\right\}$ và $x_1\neq x_2$ ta cần chứng minh $f(x_1)\neq f(x_2)$. Ta giả sử phản chứng rằng $f(x_1)=f(x_2)$. Khi đó:

$$\frac{ax_1+b}{cx_1+d}=\frac{ax_2+b}{cx_2+d}$$
$$\Leftrightarrow acx_1x_2+adx_1+bcx_2+bd=acx_1x_2+adx_2+bcx_1+bd$$
$$\Leftrightarrow(ad-bc)x_1=(ad-bc)x_2.$$

Mà $ad - bc \neq 0$ nên suy ra $x_1 = x_2$. Đến đây ta gặp mâu thuẫn. Vậy $f(x_1)$ khác $f(x_2)$. Do đó f là đơn ánh. Tiếp theo ta chứng minh f là toàn ánh. Với mọi $y \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{a}{c}\right\}$, xét phương trình $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Ta có

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \Leftrightarrow cyx + dy = ax + b \Leftrightarrow x = \frac{b-dy}{cy-a}.$$

Dễ thấy $x = \dfrac{b-dy}{cy-a} \neq \dfrac{-d}{c}$ vì nếu $\dfrac{b-dy}{cy-a} = \dfrac{-d}{c}$ thì

$$cb - cdy = -cdy + ad \Rightarrow ad = bc.$$

Đến đây ta gặp mâu thuẫn. Vậy: $x = \dfrac{b-dy}{cy-a} \neq \dfrac{-d}{c}$.

Tóm lại với mọi $y \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{a}{c}\right\}$ tồn tại $x = \dfrac{b-dy}{cy-a} \in \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{-d}{a}\right\}$ sao cho $f(x) = y$.

Hay là f là toàn ánh. Vì f là đơn ánh và f là toàn ánh nên f là song ánh.

b) Theo câu *a*), do f là song ánh nên có hàm ngược là:

$$\begin{aligned} f^{-1}: \quad \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{a}{c}\right\} &\to \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{-d}{c}\right\} \\ x &\mapsto \frac{b-dx}{cx-a} \end{aligned}$$

Bài toán 1.9. *Cho hàm số f như sau:*

$$f: [-1;8] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} + \sqrt{8+7x-x^2}.$$

a) Tìm $f^{-1}(3)$.
b) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất và tập giá trị của hàm số f.
c) Tìm m để phương trình $\sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} + \sqrt{8+7x-x^2} = m$ có nghiệm.
d) Phải thay tập $\mathbb{R}$ bởi tập nào để f là toàn ánh.

Giải.
a) Ta có $f^{-1}(3) = \left\{x \in [-1;8] \middle| \sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} + \sqrt{8+7x-x^2} = 3\right\}$. Đặt $u = \sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} \geq 0$. Khi đó $u^2 = 9 + 2\sqrt{(1+x)(8-x)}$. Thay vào $f(x) = 3$, ta được

$$u + \frac{u^2-9}{2} = 3 \Leftrightarrow u^2 + 2u - 15 = 0 \Leftrightarrow u = 3 \text{ (do loại } u = -5).$$

Vậy:

$$\begin{aligned} &\sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{1+x}\sqrt{8-x} = 0 \\ \Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow f^{-1}(3) = \{-1, 8\}. \end{aligned}$$

b) Tập xác định của hàm số là $[-1;8]$ và

$$f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} + \sqrt{8+7x-x^2}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{8-x}} + \frac{7-2x}{2\sqrt{(1+x)(8-x)}} \\ &= \frac{\sqrt{8-x} - \sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}.\sqrt{8-x}} + \frac{7-2x}{2\sqrt{(1+x)(8-x)}} \\ &= \frac{7-2x}{2\sqrt{1+x}.\sqrt{8-x}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{8-x}\right)} + \frac{7-2x}{2\sqrt{(1+x)(8-x)}} \\ &= \frac{7-2x}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{1+x}.\sqrt{8-x}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{8-x}\right)} + \frac{1}{\sqrt{(1+x)(8-x)}}\right]. \end{aligned}$$

Vậy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{2} \in [-1;8]$; tại -1 và tại 8 thì không tồn $f'(x)$. Ta có

$$f(-1) = 3,\ f\left(\frac{7}{2}\right) = \sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{9}{2}} + \frac{9}{2} = \frac{9}{2} + 3\sqrt{2},\ f(8) = 3.$$

Vậy $\max\limits_{[-1;8]} f(x) = f\left(\dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{9}{2} + 3\sqrt{2}$, $\min\limits_{[-1;8]} f(x) = f(8) = 3$, và do hàm f liên tục trên đoạn $[-1;8]$ nên suy ra tập giá trị của hàm f là $\left[3; \dfrac{9}{2} + 3\sqrt{2}\right]$.

c) Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi m thuộc tập giá trị của hàm f, tức là $3 \leq m \leq \dfrac{9}{2} + 3\sqrt{2}$.

d) Nếu thay tập $\mathbb{R}$ bởi tập hợp $\left[3; \dfrac{9}{2} + 3\sqrt{2}\right]$ thì f là toàn ánh.

1.2 Mở đầu về phương trình hàm

1.2.1 Phương trình hàm dạng $f(A) = B$

Cách giải. Đặt $A = t$, tính x theo t rồi thay vào phương trình hàm đã cho.

Bài toán 1.10. *Tìm hàm số $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x + \sqrt{1+2x^2},\ \forall x \neq 0. \tag{1}$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Đặt $t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t}$. Thay vào (1) được $f(t) = \frac{3}{t} + \sqrt{1 + \frac{2}{t^2}}$, $\forall t \neq 0$. Thử lại đúng. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x) = \frac{3}{x} + \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}, \ \forall x \neq 0.$$

Bài toán 1.11. *Tìm hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^3 - \frac{1}{x^3}, \ \forall x \neq 0. \tag{1}$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Đặt $t = x - \frac{1}{x}$. Khi đó

$$t^3 = x^3 - \frac{1}{x^3} - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) \Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} = t^3 + 3t.$$

Để ý rằng $t = x - \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - tx - 1 = 0$, phương trình này luôn có nghiệm do $\Delta = t^2 + 4 > 0$. Bởi thế khi x nhận tất cả các giá trị thuộc $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thì t nhận tất cả các giá trị thuộc $\mathbb{R}$. Vậy (1) trở thành $f(t) = t^3 + 3t$, $\forall t \in \mathbb{R}$ hay $f(x) = x^3 + 3x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 1.12. *Tìm hàm số $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}, \ \forall x \neq 0. \tag{1}$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Đặt $t = x + \frac{1}{x}$. Khi đó $|t| \geq 2$ và $t^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$. Thay vào (1) được $f(t) = t^3 - 3t$, $|t| \geq 2$. Sau khi thử lại ta kết luận:

$$f(x) = \begin{cases} \text{tùy ý} & \text{khi } x \neq 0, |x| < 2 \\ x^3 - 3x & \text{khi } |x| \geq 2. \end{cases}$$

1.2.2 Phương trình chứa hai biểu thức $f(A)$, $f(B)$

Cách giải. Từ phương trình hàm đã cho, thay giá trị thích hợp để thu được một phương trình hàm khác. Từ hai phương trình hàm ta suy ra $f(A)$ hoặc $f(B)$, trở lại dạng đã xét ở mục 1.2.1.

Bài toán 1.13 (HSG Gia Lai năm học 2009-2010). *Tìm các hàm số f thỏa mãn điều kiện: $f(x) + xf(1-x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.*

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn $f(x) + xf(1-x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. (1)
Trong (1), thay x bởi $1 - x$, ta được

$$f(1-x) + (1-x)f(x) = (1-x)^2, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} f(x) + xf(1-x) = x^2 \\ (1-x).f(x) + f(1-x) = (1-x)^2 \end{cases}$. Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1-x & 1 \end{vmatrix} = 1 - x + x^2 \neq 0$$

$$D_{f(x)} = \begin{vmatrix} x^2 & x \\ (1-x)^2 & 1 \end{vmatrix} = x^2 - x(1 - 2x + x^2) = -x^3 + 3x^2 - x$$

$$D_{f(1-x)} = \begin{vmatrix} 1 & x^2 \\ 1-x & (1-x)^2 \end{vmatrix} = 1 - 2x + x^2 - x^2 + x^3 = x^3 - 2x + 1.$$

Bởi vậy

$$f(x) = \frac{-x^3 + 3x^2 - x}{x^2 - x + 1}, \forall x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

$$f(1-x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - x + 1}, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Nếu hàm số f thỏa mãn (3) thì ta có

$$f(1-x) = \frac{-(1-x)^3 + 3(1-x)^2 - (1-x)}{(1-x)^2 - (1-x) + 1} = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - x + 1}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy nếu hàm số f thỏa mãn (3) thì nó thỏa mãn (4).
Thử lại: nếu $f(x)$ được xác định bởi (3), thì với mọi số thực x ta có

$$f(x) + xf(1-x) = \frac{-x^3 + 3x^2 - x}{x^2 - x + 1} + \frac{x^4 - 2x^2 + x}{x^2 - x + 1} = \frac{x^4 - x^3 + x^2}{x^2 - x + 1} = x^2.$$

Kết luận: Có duy nhất một hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x) = \frac{-x^3 + 3x^2 - x}{x^2 - x + 1}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 1.14 (Đề thi Olympic toán Đông Nam Á-1998). *Giả sử $f(x)$ là một hàm số với giá trị thực, xác định với mọi $x \neq 0$, sao cho*

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x. \tag{1}$$

Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $f(x) = f(-x)$.

Giải. Trong (1) thay x bởi $\frac{1}{x}$ ta được $f(\frac{1}{x})+2f(x)=3\frac{1}{x}$. Đặt $f(\frac{1}{x})=g(x)$, ta được hệ $\begin{cases} f(x)+2g(x)=3x \\ 2f(x)+g(x)=\frac{3}{x}. \end{cases}$ Ta có

$$D=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{1} \end{vmatrix}=-3,\ D_f=\begin{vmatrix} 3x & 2 \\ \frac{3}{x} & 1 \end{vmatrix}=3x-\frac{6}{x},\ D_g=\begin{vmatrix} 1 & 3x \\ 2 & \frac{3}{x} \end{vmatrix}=\frac{3}{x}-6x.$$

Vậy $f(x)=\frac{2}{x}-x,\ g(x)=2x-\frac{1}{x}$, thỏa mãn (1) và thỏa mãn $f(\frac{1}{x})=g(x)$.
Do đó $f(x)=\frac{2}{x}-x, \forall x\neq 0$. Bởi vậy

$$f(x)=f(-x)\Leftrightarrow \frac{2}{x}-x=-\frac{2}{x}+x\Leftrightarrow x=\frac{2}{x}\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Do đó tất cả các nghiệm của phương trình $f(x)=f(-x)$ là: $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

Bài toán 1.15 (Slovak 2003-2004). *Tìm các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x)+xf(1-x)=x^2+1,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Trong (1) thay x bởi $1-x$ ta được

$$f(1-x)+(1-x)f(x)=(1-x)^2+1=x^2-2x+2,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} f(x)+xg(x)=x^2+1 \\ (1-x)f(x)+g(x)=x^2-2x+2, \end{cases}$
với $g(x)=f(1-x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. (3)
Ta có

$$D=\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1-x & 1 \end{vmatrix}=1-x(1-x)=1-x+x^2=x^2-x+1\neq 0$$

$$D_g=\begin{vmatrix} 1 & x^2+1 \\ 1-x & x^2-2x+2 \end{vmatrix}=x^2-2x+2-x^2-1+x^3+x=x^3-x+1$$

$$D_f=\begin{vmatrix} x^2+1 & x \\ x^2-2x+2 & 1 \end{vmatrix}=x^2+1-x^3+2x^2-2x=-x^3+3x^2-2x+1.$$

Do đó $f(x)=\frac{-x^3+3x^2-2x+1}{x^2-x+1},\ g(x)=\frac{x^3-x+1}{x^2-x+1}$. Ta kiểm tra thấy điều kiện (3) được thỏa mãn. Do đó có duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x)=\frac{-x^3+3x^2-2x+1}{x^2-x+1},\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Bài toán 1.16. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$xf(x)+f(-x)=x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Đáp số. Hàm số cần tìm là $f(x)=1, \forall x\in\mathbb{R}$.

Bài toán 1.17. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$xf(x)+f(-x)=x+a,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Đáp số. Hàm số cần tìm là $f(x)=\frac{x^2+(a-1)x+a}{x^2+1}, \forall x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét 1. *Các bài toán 1.15, 1.16, 1.17 còn có thể được trình bày giống như bài toán 5.38, bài toán 5.39 trong bài dùng dãy số giải một số dạng phương trình hàm.*

Bài toán 1.18 (Kosovo TST-2011). *Tìm các hàm $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:* $f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)+f\left(\frac{3+x}{1-x}\right)=x, \forall x\notin\{-1,1\}$. (1)

Giải. Đặt $\frac{x-3}{x+1}=t$ khi đó $x=\frac{t+3}{1-t}$ và $\frac{3+x}{1-x}=\frac{t-3}{t+1}$. Thay vào (1):

$$f(t)+f(\frac{t-3}{t+1})=\frac{t+3}{1-t}\Rightarrow f(x)+f(\frac{x-3}{x+1})=\frac{x+3}{1-x},\ \forall x\notin\{-1,1\}. \tag{2}$$

Tương tự, đặt $u=\frac{3+x}{1-x}$, ta thiết lập được: $f(x)+f(\frac{x+3}{1-x})=\frac{x-3}{x+1}$. (3)
Cộng (2) và (3) rồi kết hợp với (1) ta được

$$2f(x)=\frac{x+3}{1-x}+\frac{x-3}{x+1}-x=\frac{x^2+4x+3+x-3-x^2+3x}{1-x^2}-x$$

$$\Rightarrow 2f(x)=\frac{8x}{1-x^2}-x=\frac{8x-x+x^3}{1-x^2}\Rightarrow f(x)=\frac{x^3+7x}{2-2x^2}.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 1.19 (Olympic toán Thái Lan-2006). *Giả sử rằng $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm số thỏa mãn điều kiện*

$$f(x^2+x+3)+2f(x^2-3x+5)=6x^2-10x+17, \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Hãy tìm $f(85)$.

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Trong (1) thay x bởi $1-x$ ta được: $f(x^2-3x+5)+2f(x^2+x+3)=6x^2-2x+13, \forall x\in\mathbb{R}$. (2)
Nhân hai vế của (2) với -2 rồi cộng với (1) ta được

$$f(x^2+x+3)=2x^2+2x+3=2(x^2+x+3)-3, \forall x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Thay $x=\dfrac{\sqrt{329}-1}{2}$ vào (3) ta được $f(85)=2.85-3=167$.

Lưu ý. Phép thay x bởi $1-x$ vào (1) được tìm ra như sau: Ta cần thay x bởi $g(x)$ vào (1), với $g(x)$ sẽ tìm sau, sao cho vẫn xuất hiện $f(x^2-3x+5)$, $f(x^2+x+3)$. Muốn vậy ta xét phương trình

$$x^2+x+3=x^2-3x+5\Leftrightarrow 4x=2\Leftrightarrow 2x=1\Leftrightarrow x=1-x.$$

Bởi vậy ta sẽ chọn $g(x)=1-x$. Phép đổi biến này chắc chắn sẽ thành công.

Bài toán 1.20 (Kyrgyzstan National Olympiad 2009). *Giả sử rằng hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x^2+x+3)+2f(x^2-3x+5)=6x^2-10x+17,\forall x\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Hãy tìm $f(2009)$.

Hướng dẫn. Xem bài toán 1.20.

Bài toán 1.21. *Giả sử rằng $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm số thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(x^2-5x+1\right)+5f\left(x^2+x-5\right)=x^2-9,\forall x\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Hãy tìm $f(2011)$.

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Trong (1) thay x bởi $2-x$ ta được: $f\left(x^2+x-5\right)+5f\left(x^2-5x+1\right)=x^2-4x-5,\forall x\in\mathbb{R}$. (2)
Nhân hai vế của (2) với -5 rồi cộng với (1) ta được

$$\begin{aligned}&-24f\left(x^2-5x+1\right)=-4x^2+20x+16,\forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&6f\left(x^2-5x+1\right)=x^2-5x-4,\forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&6f\left(x^2-5x+1\right)=\left(x^2-5x+1\right)-5,\forall x\in\mathbb{R}. \quad (3)\end{aligned}$$

Xét phương trình: $x^2-5x+1=2011\Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{8065}}{2}$.

Thay $x=\dfrac{5+\sqrt{8065}}{2}$ vào (3) ta được: $6f(2011)=2011-5\Rightarrow f(2011)=\dfrac{1003}{3}$.

Bài toán 1.22 (HSG quốc gia-2000). *Tìm các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4,\forall x\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) thay x bởi $1-x$ ta được

$$(1-x)^2f(1-x)+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4,\forall x\in\mathbb{R}. \quad (2)$$

Theo (1) ta có $f(1-x)=2x-x^4-x^2f(x)$, thế vào (2) được

$$\begin{aligned}&(1-x)^2\left[2x-x^4-x^2f(x)\right]+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4\\ \Leftrightarrow&\left[1-(1-x)^2x^2\right]f(x)=2(1-x)-(1-x)^4-(1-x)^2(2x-x^4)\\ \Leftrightarrow&\left[1-x+x^2\right]\left[1+x-x^2\right]f(x)=(1-x)\left[2-(1-x)^3-(1-x)(2x-x^4)\right]\\ \Leftrightarrow&\left[x^2-x+1\right]\left[x^2-x-1\right]f(x)=(1-x)(1+x^3)(x^2-x-1)\\ \Leftrightarrow&\left[x^2-x-1\right]f(x)=(1-x^2)(x^2-x-1).\end{aligned}$$

Như vậy với $x\neq a$ và $x\neq b$, trong đó a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2-x-1=0$, ta có $f(x)=1-x^2$. Tiếp theo ta xác định $f(a)$, $f(b)$. Theo định lí Viet ta có $a+b=1$ và $ab=-1$. Thay $x=a$ và $x=b$ vào (1) ta được

$$\begin{cases}a^2f(a)+f(b)=2a-a^4\\ b^2f(b)+f(a)=2b-b^4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a+1)f(a)+f(b)=-a^2-1\\ (b+1)f(b)+f(a)=-b^2-1\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow(a+1)\left[-b^2-1-(b+1)f(b)\right]+f(b)=-a^2-1\\ &\Rightarrow\left[(a+1)(b+1)-1\right]f(b)=a^2+1-(a+1)(b^2+1)\\ &\Rightarrow(a^2b^2-1)f(b)=a+2-(a+1)(b+2)=a+2-(ab+a+b+a+2)\\ &\Rightarrow 0.f(b)=a+2-(-1+1+a+2)=0\Rightarrow 0.f(b)=0.\end{aligned}$$

Bởi vậy ta có $f(b)=c$, $f(a)=2b-b^4-b^2c$, với c tùy ý. Tóm lại:

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2 & \text{nếu } x\neq a \text{ và } x\neq b\\ c\in\mathbb{R} \text{ tùy ý} & \text{nếu } x=b\\ 2b-b^4-b^2c & \text{nếu } x=a\end{cases} \quad (3)$$

trong đó a,b là hai nghiệm của phương trình $x^2-x-1=0$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy $f(x)$ được xác định bởi (3) là tất cả các hàm số cần tìm.

1.2.3 Một số kĩ thuật thường dùng

Không có những định lí cũng như các thuật toán chung để giải phương trình hàm. Mặc dù vậy, ta sẽ đưa ra một số kĩ thuật cơ bản, thường dùng khi giải phương trình hàm.

- Ở chương 1, ta sẽ đi sâu vào việc giải phương trình hàm dựa trên các đặc trưng của hàm số sơ cấp. Trong đó hay dùng kĩ thuật tìm các nghiệm riêng đơn giản như hàm hằng, hàm bậc nhất, hàm đa thức,... Dựa vào các nghiệm riêng, chúng ta sẽ có hiểu biết hơn về hàm cần tìm và có thể có được các phương hướng giải phương trình hàm đã cho.
- Từ chương 2 trở đi ta hay dùng các kĩ thuật sau:
  - Tính các giá trị đặc biệt của hàm số $f(x)$, chẳng hạn: $f(0)$, $f(\pm1)$, $f(2)$,... Đôi khi $f(0)$ hoặc $f(1)$ không tính được, ta có thể đặt chúng

bằng các chữ (tham số). Kĩ thuật này đặc biệt hay sử dụng khi gặp phương trình hàm với cặp biến tự do, sẽ được đề cập nhiều ở chương 2.

- Nghiên cứu các tính chất đặc biệt của hàm số cần tìm như đơn ánh, toàn ánh, song ánh, chẵn, lẻ, tuần hoàn, đơn điệu, dấu,...
- Khai thác tính đối xứng trong phương trình hàm đã cho.
- Lời giải của bài toán giải phương trình hàm thường được bắt đầu bằng mệnh đề "Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài". Khi tìm được biểu thức của hàm số nghiệm, ta phải thử lại rồi mới được kết luận.

1.2.4 Phương pháp thế giá trị đặc biệt

Đây là phương pháp thường dùng nhất để giải phương trình hàm và sẽ được đề cập nhiều hơn ở bài 2.1: Giải phương trình hàm bằng phép thế (ở trang 93). Trong mục này ta chỉ đề cập đến một số bài toán dễ nhằm giúp cho bạn đọc làm quen với việc giải phương trình hàm. Khi thế giá trị đặc biệt cần lưu ý là các giá trị đó phải nằm trong tập xác định, việc thế giá trị phải có tính kế thừa.

Bài toán 1.23. *Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+y)+f(x-y)=f(x)+6xy\sqrt[3]{f(y)}+x^3, \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu của đề bài. Trong (1) cho $y=0$ ta được $f(x)=x^3, \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 1.24. *Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+y)+f(x-y)=f(x)+2f(y)+x^2, \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Đặt $f(0)=C$. Trong (1) cho $y=0$ ta được

$$f(x)=x^2+2C, \forall x\in\mathbb{R}. \quad (2)$$

Thử lại: Thay (2) vào (1) ta được

$$(x+y)^2+2C+(x-y)^2+2C=x^2+2C+2y^2+4C+x^2, \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Vậy $C=0$. Do đó có duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x)=x^2, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Lưu ý. Có thể trình bày cách khác như sau: Trong (1) cho $x=y=0$ ta được $f(0)=0$. Trong (1) cho $y=0$ và sử dụng $f(0)=0$ ta được $f(x)=x^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 1.25. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f\left(a^3\right)+f\left(b^3\right)+f\left(c^3\right)=f(3abc), \forall a,b,c\in\mathbb{R}. \quad (*)$$

Giải. Từ (*) cho $a=b=c=0$ ta được $3f(0)=f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$. Từ (*) cho $b=c=0$ ta được $f\left(a^3\right)=0, \forall a\in\mathbb{R}$. Đặt $x=a^3$, khi đó $f(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy hàm số $f(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 1.26 (Slovenia National Olympiad 2010). *Tìm tất cả các hàm $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ thỏa mãn*

$$(y+1)f(x+y)=f\left(xf(y)\right), \forall x,y\in[0;+\infty). \quad (1)$$

Giải. Trong (1) cho $x=0$, ta được

$$\begin{aligned}&(y+1)f(y)=f(0), \forall y\in[0;+\infty)\\ \Leftrightarrow&f(y)=\frac{a}{y+1}, \forall y\in[0;+\infty) \ (\text{với } a=f(0)).\end{aligned} \quad (2)$$

Thử lại : thay (2) vào (1), ta được

$$\begin{aligned}&\frac{(y+1)a}{x+y+1}=\frac{a}{xf(y)+1}, \forall x,y\in[0;+\infty)\\ \Leftrightarrow&\frac{(y+1)a}{x+y+1}=\frac{a}{\frac{ax}{y+1}+1}, \forall x,y\in[0;+\infty)\\ \Leftrightarrow&\frac{(y+1)a}{x+y+1}=\frac{a(y+1)}{ax+y+1}, \forall x,y\in[0;+\infty)\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}a=0\\ x+y+1=ax+y+1,\end{array}\right. \forall x,y\in[0;+\infty)\\ \Leftrightarrow&a=0 \text{ hoặc } a=1.\end{aligned}$$

Vậy các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x)=0, \forall x\in[0;+\infty)\ ;\ f(x)=\frac{1}{x+1}, \forall x\in[0;+\infty).$$

Bài toán 1.27. *Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+y)-2f(x-y)+f(x)-2f(y)=y-2, \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) cho $y=0$ ta được $f(0)=1$. Trong (1) cho $x=0$ ta được

$$-2f(-y)-f(y)=y-3, \forall y\in\mathbb{R}. \quad (2)$$

Trong (2) thay y bởi $-y$ ta được: $-2f(y)-f(-y)=-y-3, \forall y\in\mathbb{R}$. (3)
Từ (2) và (3) ta có $f(y)=y+1, \forall y\in\mathbb{R}$. Sau khi thử lại ta kết luận: có duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là $f(x)=x+1, \forall x\in\mathbb{R}$.

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN

Bài toán 1.28 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2009). *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn* $f(0)=1$ *và*

$$[f(x+y)]^{2009}=[f(x)]^{2009}+y^2+2xy,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử hàm f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Từ (1) lấy $x=0$ ta được

$$\begin{aligned}&[f(y)]^{2009}=1+y^2,\ \forall y\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&f(y)=\sqrt[2009]{1+y^2},\ \forall y\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&f(x)=\sqrt[2009]{1+x^2},\ \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{2}$$

Thử lại: Với hàm số f xác định bởi (2) ta có $f(0)=\sqrt[2009]{1}=1$ và

$$\begin{aligned}[f(x)]^{2009}+y^2+2xy&=1+x^2+y^2+2xy=(x+y)^2+1\\&=[f(x+y)]^{2009},\ \forall x,y\in\mathbb{R}\ (\text{thỏa mãn }(1)).\end{aligned}$$

Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x)=\sqrt[2009]{1+x^2},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 1.29. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f\left(xf(z)+y\right)=zf(x)+y,\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Từ (1) cho $x=z=0$ ta được $f(y)=y,\ \forall y\in\mathbb{R}$ hay $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Bài toán 1.30 (Switzerland Final Round 2010). *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn:* $f\left(f(x)\right)+f\left(f(y)\right)=2y+f(x-y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$ (1)

Giải. Đặt $a=f(0)$. Trong (1) cho $y=x$, ta được $f\left(f(x)\right)=x+\dfrac{a}{2},\forall x\in\mathbb{R}$. Vậy (1) trở thành:

$$\begin{aligned}&x+\frac{a}{2}+y+\frac{a}{2}=2y+f(x-y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&f(x-y)=x-y+a,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{2}$$

Từ (2), cho $y=0$, suy ra $f(x)=x+a,\forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (1) ta được

$$x+2a+y+2a=2y+x-y+a,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Hay $a=0$. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 1.31 (Turkey National Olympiad First Round 2008). *Tìm tất cả các hàm* $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ *thỏa mãn*

$$f(x)f(y)-f(xy)-90=\frac{10(x+y)}{xy},\ \forall x,y\in(0;+\infty). \tag{1}$$

Giải. Từ (1) cho $y=1$, ta được

$$\begin{aligned}&f(x)f(1)-f(x)-90=\frac{10(x+1)}{x},\ \forall x\in(0;+\infty)\\ \Leftrightarrow&[f(1)-1]f(x)=10\left(1+\frac{1}{x}\right)+90,\ \forall x\in(0;+\infty).\end{aligned} \tag{2}$$

Trong (1) cho $x=y=1$, ta được: $[f(1)]^2-f(1)-110=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(1)=11\\ f(1)=-10.\end{array}\right.$

- Khi $f(1)=11$, thay vào (2), ta được $f(x)=10+\dfrac{1}{x},\ \forall x\in(0;+\infty)$. Thử lại thấy thỏa mãn.
- Khi $f(1)=-10$, thay vào (2), ta được

$$f(x)=-\frac{10}{11}\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{90}{11},\ \forall x\in(0;+\infty). \tag{3}$$

Thay (3) vào (1), ta được

$$\begin{aligned}&\left[\frac{10}{11}\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{90}{11}\right]\left[\frac{10}{11}\left(1+\frac{1}{y}\right)+\frac{90}{11}\right]+\left[\frac{10}{11}\left(1+\frac{1}{xy}\right)+\frac{90}{11}\right]-90\\ =&\frac{10(x+y)}{xy},\ \forall x,y\in(0;+\infty).\end{aligned} \tag{4}$$

Ta thấy (4) không đúng, chẳng hạn khi $x=y=\dfrac{1}{2}$. Vậy hàm số xác định bởi (3) không thỏa mãn (1).

Kết luận : hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x)=10+\dfrac{1}{x},\ \forall x\in(0;+\infty)$.

Bài toán 1.32 (Romania Team Selection Test 2011). *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$2f(x)=f(x+y)+f(x+2y),\ \forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\geq 0. \tag{1}$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (1).

$$P(2x,x)\Rightarrow 2f(2x)=f(3x)+f(4x),\ \forall x\geq 0. \tag{2}$$

$$P(x,x)\Rightarrow 2f(x)=f(2x)+f(3x),\ \forall x\geq 0. \tag{3}$$

$$P(0;x) \Rightarrow 2f(0) = f(x) + f(2x),\ \forall x \geq 0. \quad (4)$$
$$P(0;2x) \Rightarrow 2f(0) = f(2x) + f(4x),\ \forall x \geq 0. \quad (5)$$

Từ (5) ta có $f(4x) = 2f(0) - f(2x)$, thay vào (2) ta được

$$2f(2x) = f(3x) + 2f(0) - f(2x) \Leftrightarrow f(3x) = 3f(2x) - 2f(0). \quad (6)$$

Thay (6) vào (3) thu được

$$2f(x) = f(2x) + 3f(2x) - 2f(0) \Leftrightarrow 2f(2x) = f(x) + f(0). \quad (7)$$

Thay (7) vào (4) dẫn tới:

$$4f(0) = 2f(x) + f(x) + f(0) \Rightarrow f(x) = f(0),\ \forall x \geq 0. \quad (8)$$

Trong (1) thay y bởi $2y$, ta được

$$2f(x) = f(x+2y) + f(x+4y),\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \geq 0. \quad (9)$$

Từ (9) và (1) suy ra: $f(x+y) = f(x+4y),\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \geq 0.$ (10)
Trong (10) thay x bởi $-4y$, ta được $f(-3y) = f(0),\ \forall y \geq 0$. Từ đây thay y bởi $\frac{y}{3}$, ta được $f(-y) = f(0),\ \forall y \geq 0$. Vậy $f(t) = f(0),\ \forall t \leq 0$ (11)
Từ (11) và (8) suy ra $f(x) = f(0), \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó f là hàm hằng trên $\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

1.3 Hàm số xác định bởi các phép biến đổi tịnh tiến và đồng dạng

1.3.1 Các bài toán liên quan đến các hàm tuần hoàn

- Hàm số f được gọi là hàm tuần hoàn cộng tính (nói gọn là hàm tuần hoàn) chu kỳ a $(a > 0)$ trên M nếu $M \subset D_f$ (D_f là tập xác định của hàm f) và
$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow x \pm a \in M \\ f(x+a) = f(x), \forall x \in M. \end{cases}$$
- Cho f là một hàm tuần hoàn trên M. Khi đó T $(T > 0)$ được gọi là chu kì cơ sở của hàm f nếu f tuần hoàn với chu kì T mà không tuần hoàn với bất cứ chu kì nào bé hơn T.
- Hàm số f được gọi là hàm phản tuần hoàn cộng tính chu kỳ a $(a > 0)$ trên M nếu $M \subset D_f$ (D_f là tập xác định của hàm f) và
$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow x \pm a \in M \\ f(x+a) = -f(x), \forall x \in M. \end{cases}$$

- Hàm số f được gọi là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ a $(a \notin \{0, 1, -1\})$ trên M nếu $M \subset D_f$ (D_f là tập xác định của hàm f) và
$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow a^{\pm 1}x \in M \\ f(ax) = f(x), \forall x \in M. \end{cases}$$
- Trong mục này ta sẽ giải quyết vấn đề tìm tất cả các hàm số tuần hoàn, phản tuần hoàn (cộng tính, nhân tính) chu kì cho trước, một số dạng mở rộng, kĩ thuật đưa dạng mở rộng về dạng cơ bản và một số bài toán liên quan đến hàm tuần hoàn. Những vấn đề trên sẽ được giải quyết thông qua các bài toán cụ thể và các nhận xét, chú ý, lưu ý.

Bài toán 1.33. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*
$$f(x+1) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn đề bài, khi đó ta có (1). Bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được: $f(x+n) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$.
Do đó: $f(x) = f([x] + \{x\}) = f(\{x\}),\ \forall x \in \mathbb{R},$ (2)
ở đây $[x]$ là phần nguyên của x và $\{x\}$ là phần thập phân của x. Tiếp theo, ta gọi g là hàm số tùy ý, xác định trên nửa khoảng $[0;1)$ sao cho
$$g(x) = f(x), \forall x \in [0;1)$$
hay g là hàm số như sau:
$$\begin{array}{rccc} g : [0;1) & \to & & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) = f(x) \end{array}$$
(g được gọi là cái thu hẹp của hàm f trên nửa khoảng $[0;1)$). Vì (2) nên $f(x) = g(\{x\}),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Ngược lại, nếu $f(x) = g(\{x\}),\ \forall x \in \mathbb{R}$, trong đó g là hàm số tùy ý, xác định trên nửa khoảng $[0;1)$ thì
$$f(x+1) = g(\{x+1\}) = g(\{x\}) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$
Vậy ta kết luận: Tất cả các hàm số cần tìm là $f(x) = g(\{x\}), \forall x \in \mathbb{R}$, trong đó g là hàm số tùy ý, xác định trên nửa khoảng $[0;1)$.

Bài toán 1.34. *Cho $a \neq 0$. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*
$$f(x+a) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Ta có
$$(1) \Leftrightarrow f(ax+a) = f(ax), \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow g(x) = g(x+1), \forall x \in \mathbb{R} \left(\text{với } g(x) = f(ax) \Leftrightarrow f(x) = g\left(\frac{x}{a}\right)\right).$$

Áp dụng kết quả bài toán 1.33 ta được $g(x) = h(\{x\}), \forall x \in \mathbb{R}$, trong đó h là hàm số tùy ý, xác định trên nửa khoảng $[0;1)$. Bởi vậy

$$f(x) = h\left(\left\{\frac{x}{a}\right\}\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chú ý 6. *Hai bài toán 1.33, 1.34 có ý nghĩa rất lớn, nó giúp ta tìm được tất cả các hàm số tuần hoàn và phản tuần hoàn có chu kì cho trước.*

Bài toán 1.35. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+a) - f(x) = h(x), \ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

trong đó h là hàm phản tuần hoàn cộng tính chu kì a trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn. Đưa (1) về phương trình hàm cơ bản $F(x+a) = F(x)$. Ta có

$$h(x) = -h(x+a) \Rightarrow h(x) = \frac{1}{2}[h(x) - h(x+a)].$$

Vậy ta biến đổi (1) thành

$$\begin{aligned} & f(x+a) - f(x) = \frac{1}{2}[h(x) - h(x+a)] \\ \Leftrightarrow & f(x+a) + \frac{h(x+a)}{2} = f(x) + \frac{h(x)}{2} \\ \Leftrightarrow & F(x+a) = F(x) \ \left(\text{với } F(x) = f(x) + \frac{h(x)}{2}\right). \end{aligned}$$

Bài toán 1.36. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+\pi) - f(x) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Hướng dẫn. Ta có (1) tương đương với

$$f(x+\pi) + \frac{1}{2}\sin(x+\pi) = f(x) + \frac{1}{2}\sin x, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Đặt $f(x) + \frac{1}{2}\sin x = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$, thay vào (2) ta được

$$g(x+\pi) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Tiếp theo sử dụng bài toán 1.34.

Bài toán 1.37. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+a) - f(x) = h(x), \ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

trong đó h là hàm tuần hoàn cộng tính chu kì a trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn. Đưa (1) về phương trình hàm cơ bản $F(x+a) = F(x)$. Ta có

$$h(x+a) = h(x) \Rightarrow h(x) = \frac{1}{2}[h(x) + h(x+a)],$$

mà $h(x+a) + h(x)$ không "đồng dạng" với $f(x+a) - f(x)$ nên ta phải "nâng bậc" như sau:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{a}.ah(x) = \frac{1}{a}(x+a-x)h(x) = \frac{(x+a)h(x)}{a} - \frac{xh(x)}{a} \\ &= \frac{(x+a)h(x+a)}{a} - \frac{xh(x)}{a}. \end{aligned}$$

Do đó ta biến đổi (1) thành

$$\begin{aligned} & f(x+a) - f(x) = \frac{(x+a)h(x+a)}{a} - \frac{xh(x)}{a} \\ \Leftrightarrow & f(x+a) - \frac{(x+a)h(x+a)}{a} = f(x) - \frac{xh(x)}{a} \\ \Leftrightarrow & F(x+a) = F(x), \ \text{với } F(x) = f(x) - \frac{xh(x)}{a}. \end{aligned}$$

Lưu ý. Nếu h là hàm tuần hoàn cộng tính chu kì a thì kĩ thuật biến đổi

$$h(x) = \frac{1}{a}.ah(x) = \frac{1}{a}(x+a-x)h(x) = \frac{(x+a)h(x+a)}{a} - \frac{xh(x)}{a}$$

rất hay dùng, ta sẽ gặp lại kĩ thuật này ở bài 1.7: Phương trình hàm sai phân bậc hai, chẳng hạn trong các bài toán 1.115 ở trang 77 ; 1.116 ở trang 77,...

Bài toán 1.38. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+2\pi) = f(x) + \cos x, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Vì $\cos x = \frac{x+2\pi}{2\pi}\cos(x+2\pi) - \frac{x}{2\pi}\cos x$ nên

$$(1) \Leftrightarrow f(x+2\pi) - \frac{x+2\pi}{2\pi}\cos(x+2\pi) = f(x) - \frac{x}{2\pi}\cos x, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x}{2\pi}\cos x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào (2) ta được

$$g(x+2\pi) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy g là hàm số tuần hoàn chu kì 2π trên $\mathbb{R}$. Do đó tất cả các hàm số thỏa mãn đề bài là

$f(x) = g(x) + \frac{x}{2\pi}\cos x, \forall x \in \mathbb{R}$ (g là hàm tuần hoàn chu kì 2π, tùy ý trên $\mathbb{R}$).

Lưu ý. Ngoài việc dựa trên bài toán 1.37, hệ thức

$$\cos x = \frac{x+2\pi}{2\pi}\cos(x+2\pi) - \frac{x}{2\pi}\cos x$$

còn được tìm như sau: Giả sử $\cos x = a(x+2\pi)\cos(x+2\pi) - ax\cos x$. Khi đó

$$\cos x = a(x+2\pi)\cos x - ax\cos x \Rightarrow 1 = 2\pi a \Rightarrow a = \frac{1}{2\pi}.$$

Bài toán 1.39. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+a) - f(x) = P(x),\ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

trong đó $P(x)$ là đa thức bậc n.

Hướng dẫn. Ta biểu diễn $P(x) = Q(x+a) - Q(x)$, với $Q(x)$ là đa thức bậc $n+1$, sau đó dùng phương pháp đồng nhất hệ số để tìm các hệ số của $Q(x)$.
Lưu ý. Cụ thể cho dạng này là bài toán 1.69 ở trang 42, bạn đọc hãy xem để nắm được cách biểu diễn $P(x) = Q(x+a) - Q(x)$.

Bài toán 1.40. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+1) - f(x) = 2^{-x},\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Hướng dẫn. Ta có

$$\begin{aligned}
&f(x+1) - f(x) = 2^{-x},\ \forall x \in \mathbb{R}\\
\Leftrightarrow &f(x+1) - f(x) = 2^{1-x} - 2^{1-(x+1)},\ \forall x \in \mathbb{R}\\
\Leftrightarrow &f(x+1) + 2^{1-(x+1)} = f(x) + 2^{1-x},\ \forall x \in \mathbb{R}\\
\Leftrightarrow &g(x+1) = g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\ \left(\text{với } g(x) = f(x) + 2^{1-x}\right).
\end{aligned}$$

Chú ý 7. *Để xuất hiện dạng $h(x+1) - h(x)$, ta chú ý các đồng nhất thức sau: $(a-1)a^x = a^{x+1} - a^x$; $(a-1)a^{-x} = a^{-x+1} - a^{-x} = a^{1-x} - a^{1-(x+1)}$. Tuy nhiên ta có cách làm khác, tổng quát hơn, giải quyết được nhiều bài toán khó hơn, đó là "mượn ý tưởng" của bài toán dãy số truy hồi tuyến tính cấp 1. Bạn đọc hãy xem bài 1.6 ở trang 70: Phương trình hàm sai phân bậc một.*

Bài toán 1.41. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+7) - f(x) = \left\{\frac{x}{7}\right\}^{2015} + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Đặt $h(x) = \left\{\frac{x}{7}\right\}^{2015} + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$h(x+7) = \left\{\frac{x+7}{7}\right\}^{2015} + 1 = \left\{1 + \frac{x}{7}\right\}^{2015} + 1 = \left\{\frac{x}{7}\right\}^{2015} + 1 = h(x).$$

Vậy $h(x) = \frac{x+7}{7}h(x+7) - \frac{x}{7}h(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow f(x+7) - f(x) = h(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow f(x+7) - f(x) = \frac{x+7}{7}h(x+7) - \frac{x}{7}h(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow f(x+7) - \frac{x+7}{7}h(x+7) = \left[f(x) - \frac{x}{7}h(x)\right],\ \forall x \in \mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow g(x+7) = g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\ \left(\text{với } g(x) = f(x) - \frac{x}{7}h(x)\right).
\end{aligned} \tag{2}$$

Từ (2), sử dụng kết quả bài toán 1.34 ở trang 21 ta được

$$g(x) = k\left(\left\{\frac{x}{7}\right\}\right), \forall x \in \mathbb{R},$$

trong đó k là hàm số tùy ý, xác định trên nửa khoảng $[0;1)$. Vậy tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài đều có dạng

$$f(x) = \frac{x}{7}\left(\left\{\frac{x}{7}\right\}^{2015} + 1\right) + k\left(\left\{\frac{x}{7}\right\}\right),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

trong đó k là hàm số tùy ý, xác định trên nửa khoảng $[0;1)$.

Chú ý 8. *Sau đây ta sẽ xét một số bài toán có cách giải rất đặc biệt, bạn đọc cần nắm bắt vì nó xuất hiện rất nhiều trong cuốn sách này, đó là sử dụng các biến đổi rất hiển nhiên sau:*

$$a = b \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}(a+b)\ ; \qquad a = -b \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}(a-b)\ ;$$

$$a = b + c \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}(2a+b+c).$$

Bài toán 1.42. *Cho a là một hằng số dương. Tìm tất cả các hàm số f xác định trên $\mathbb{R}$ sao cho*

$$f(x+a) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Dễ thấy

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(x+a)], \forall x \in \mathbb{R}\\ f(x) = f(x+2a), \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

Ta sẽ chứng minh (1) tương đương với

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}[g(x) - g(x+a)], \forall x \in \mathbb{R}\\ g \text{ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kì } 2a \text{ trên } \mathbb{R}, \text{ tùy ý.} \end{cases} \tag{3}$$

Dễ thấy nếu hàm f thỏa mãn (3) thì thỏa mãn (1). Nếu hàm f thỏa mãn (1) thì do (2) nên f có dạng (3). Vậy (1) $\Leftrightarrow$ (3). Từ đó hàm số cần tìm có dạng

$$f(x) = \frac{1}{2}[g(x) - g(x+a)], \forall x \in \mathbb{R}$$

(trong đó g là hàm số tuần hoàn cộng tính chu kỳ $2a$ trên $\mathbb{R}$, tùy ý).

Bài toán 1.43. *Tìm các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x) + f(4-x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(4-x)], \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}[h(x) - h(4-x)], \forall x \in \mathbb{R} \\ h \text{ là hàm số xác định trên } \mathbb{R}, \text{ tùy ý.} \end{cases}$$

Hàm số cần tìm có dạng $f(x) = \frac{1}{2}[h(x) - h(4-x)], \forall x \in \mathbb{R}$, trong đó h là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, tùy ý.

Bài toán 1.44. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(5x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn đề bài, khi đó ta có (1).

• Khi $x > 0$, đặt $x = 5^u$ (hay $u = \log_5 x$). Thay vào (1), ta được

$$f(5^{u+1}) = f(5^u), \forall u \in \mathbb{R}.$$

Đặt $f(5^u) = g(u), \forall u \in \mathbb{R}$. Khi đó $g(u+1) = g(u), \forall u \in \mathbb{R}$. Như vậy g là hàm số tuần hoàn chu kỳ 1 trên $\mathbb{R}$, chẳng hạn $g(x) = \cos(2\pi x), \forall x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$f(x) = f(5^u) = g(u) = g(\log_5 x), \forall x \in (0; +\infty).$$

Thử lại: Với mọi $x \in (0; +\infty)$, khi đó

$$f(5x) = g(\log_5(5x)) = g(1 + \log_5 x) = g(\log_5 x) = f(x).$$

Vậy khi $x > 0$ thì $f(x) = g(\log_5 x)$ (g là hàm số tuần hoàn chu kỳ 1 trên $\mathbb{R}$).

• Khi $x < 0$, đặt $-x = 5^u$ (hay $u = \log_5(-x)$). Thay vào (1), ta được

$$f(-5^{u+1}) = f(-5^u), \forall u \in \mathbb{R}.$$

Đặt $f(-5^u) = h(u), \forall u \in \mathbb{R}$. Khi đó $h(u+1) = h(u), \forall u \in \mathbb{R}$. Vậy h là hàm số tuần hoàn chu kỳ 1 trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$f(x) = f(-5^u) = h(u) = h(\log_5(-x)), \forall x \in (-\infty; 0).$$

Thử lại: Với mọi $x < 0$, khi đó

$$f(5x) = h(\log_5(-5x)) = h(1 + \log_5(-x)) = h(\log_5(-x)) = f(x).$$

Vậy khi $x < 0$ thì $f(x) = h(\log_5(-x))$ (h là hàm tuần hoàn chu kỳ 1 trên $\mathbb{R}$).

Kết luận: Hàm số f cần tìm là

$$f(x) = \begin{cases} g(\log_5 x) & \text{khi } x > 0 \\ c \ (c \text{ là hằng số tùy ý}) & \text{khi } x = 0 \\ h(\log_5(-x)) & \text{khi } x < 0. \end{cases}$$

(trong đó g, h là các hàm số tuần hoàn chu kỳ 1 trên $\mathbb{R}$, tùy ý).

Bài toán 1.45. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(-2013x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Theo (1), ta có $f(2013^2 x) = f(-2013(-2013x)) = f(-2013x), \forall x \in \mathbb{R}$. Kết hợp với (1), ta được $f(x) = f(2013^2 x), \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy (1) tương đương với

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-2013x)], \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) = f(2013^2 x), \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

Xét hàm số: $f(x) = \frac{1}{2}[g(x) + g(-2013x)], \forall x \in \mathbb{R}$. (3)

trong đó g là hàm số tuần hoàn nhân tính chu kỳ 2013^2 trên $\mathbb{R}$:

$$g(x) = g(2013^2 x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó dễ thấy hàm f thỏa mãn (1). Ngược lại nếu hàm f thỏa mãn (1), khi đó hàm f thỏa mãn (2), do đó có dạng (3). Vậy

$$f(x) = \frac{1}{2}[g(x) + g(-2013x)], \forall x \in \mathbb{R},$$

trong đó g là hàm số tuần hoàn nhân tính chu kỳ 2013^2 trên $\mathbb{R}$:

$$g(x) = \begin{cases} g_1\left(\frac{1}{2}\log_{2013} x\right) & \text{khi } x > 0 \\ c \ (c \text{ là hằng số tùy ý}) & \text{khi } x = 0 \\ g_2\left(\frac{1}{2}\log_{2013}(-x)\right) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

(trong đó g_1, g_2 là các hàm số tuần hoàn chu kỳ 1 trên $\mathbb{R}$).

Chú ý 9. *Tương tự như bài toán 1.44, 1.45 ta giải được phương trình hàm*

$$\boxed{f(ax) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \ (a \text{ là hằng số } a \neq 0).}$$

Bài toán 1.46. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn điều kiện*

$$f(3x)-f(x)=\sqrt{\log_3|x|-[\log_3|x|]},\forall x\neq 0. \tag{1}$$

Giải. Đặt $h(x)=\sqrt{\log_3|x|-[\log_3|x|]}=\sqrt{\{\log_3|x|\}}$. Khi đó

$$h(3x)=\sqrt{\{\log_3|3x|\}}=\sqrt{\{1+\log_3|x|\}}=\sqrt{\{\log_3|x|\}}=h(x),\ \forall x\neq 0.$$

Vậy

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow f(3x)-f(x)=h(x),\forall x\neq 0\\&\Leftrightarrow f(3x)-f(x)=(\log_3|3x|-\log_3|x|)\,h(x),\forall x\neq 0\\&\Leftrightarrow f(3x)-h(x)\log_3|3x|=f(x)-h(x)\log_3|x|,\forall x\neq 0.\end{aligned} \tag{2}$$

Đặt $g(x)=f(x)-h(x)\log_3|x|$, thay vào (2) ta được

$$g(3x)=g(x),\forall x\neq 0. \tag{3}$$

Từ (3) tiến hành tương tự như bài toán 1.44 ở trang 26 ta được

$$g(x)=\begin{cases}m(\log_3 x) & \text{khi } x>0\\ n(\log_3(-x)) & \text{khi } x<0.\end{cases}$$

(trong đó m,n là các hàm số tuần hoàn chu kỳ 1 trên $\mathbb{R}$). Vậy

$$\begin{aligned}f(x)&=g(x)+h(x)\log_3|x|\\&=\begin{cases}m(\log_3 x)+\sqrt{\{\log_3 x\}}\log_3 x & \text{khi } x>0\\ n(\log_3(-x))+\sqrt{\{\log_3(-x)\}}\log_3(-x) & \text{khi } x<0.\end{cases}\end{aligned}$$

Bài toán 1.47. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f(4^x)=f(2^x)+x,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow f(4^x)-2x=f(2^x)-x,\ \forall x\in\mathbb{R}\\&\Leftrightarrow g(2x)=g(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\ (\text{với } g(x)=f(2^x)-x).\end{aligned} \tag{2}$$

Từ (2), sử dụng bài toán 1.33 ở trang 21 và tiến hành tương tự như bài toán 1.44 ở trang 26 ta được

$$g(x)=\begin{cases}h_1(\{\log_2 x\}) & \text{khi } x>0\\ c\ (c \text{ là hằng số tùy ý}) & \text{khi } x=0\\ h_2(\{\log_2(-x)\}) & \text{khi } x<0,\end{cases}$$

trong đó h_1, h_2 là những hàm số xác định trên nửa khoảng $[0;1)$, tùy ý. Mà theo trên ta có $f(x)=\log_2 x+g(\log_2 x),\ \forall x>0$ nên

$$f(x)=\begin{cases}\log_2 x+h_1(\{\log_2(\log_2 x)\}) & \text{khi } x>1\\ c\ (c \text{ là hằng số tùy ý}) & \text{khi } x=1\\ \log_2 x+h_2(\{\log_2(-\log_2 x)\}) & \text{khi } 0<x<1\\ \text{tùy ý} & \text{khi } x\leq 0.\end{cases} \tag{3}$$

Thử lại: Giả sử hàm f xác định bởi (3). Với $x\in\mathbb{R}$ tùy ý.

- Nếu $x>0$ thì $4^x>1$ và $2^x>1$ nên

$$f(4^x)=\log_2 4^x+h_1(\{\log_2(\log_2 4^x)\})=2x+h_1(\{\log_2 x\}).$$
$$f(2^x)+x=\log_2 2^x+h_1(\{\log_2(\log_2 2^x)\})+x=2x+h_1(\{\log_2 x\}).$$

Suy ra $f(4^x)=f(2^x)+x$.

- Nếu $x=0$ thì $4^x=2^x=1$, do đó $f(4^x)=c$, $f(2^x)=c$, hiển nhiên thỏa (1).
- Nếu $x<0$ thì $0<4^x<1$, $0<2^x<1$ nên

$$f(4^x)=\log_2 4^x+h_2(\{\log_2(-\log_2 4^x)\})=2x+h_2(\{\log_2(-x)\}).$$
$$f(2^x)+x=\log_2 2^x+h_2(\{\log_2(-\log_2 2^x)\})+x=2x+h_2(\{\log_2(-x)\}).$$

Suy ra $f(4^x)=f(2^x)+x$.

Như vậy hàm số xác định bởi (3) thỏa mãn (1). Do đó tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài đều có dạng (3).

Bài toán 1.48. *Tìm các hàm số* f *tuần hoàn chu kì* 3 *trên* $\mathbb{R}$ *và thỏa mãn*

$$f(x)+f(x+1)+f(x+2)=0,\forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Theo giả thiết ta có f tuần hoàn chu kì 3 trên $\mathbb{R}$ và thỏa (1), tức là

$$\begin{aligned}&\begin{cases}f(x)=-f(x+1)-f(x+2),\forall x\in\mathbb{R}\\ f(x+3)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=\dfrac{1}{3}[2f(x)-f(x+1)-f(x+2)],\forall x\in\mathbb{R}\\ f(x+3)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}.\end{cases}\end{aligned} \tag{2}$$

Ta sẽ chứng minh (1) tương đương với

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{1}{3}[2g(x)-g(x+1)-g(x+2)],\forall x\in\mathbb{R}\\ g \text{ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kì 3 trên } \mathbb{R}, \text{ tùy ý.}\end{cases} \tag{3}$$

Giả sử $f(x)$ có dạng (3). Khi đó với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có

$$f(x+1)=\frac{1}{3}[2g(x+1)-g(x+2)-g(x)],$$

$$f(x+2)=\frac{1}{3}\left[2g(x+2)-g(x)-g(x+1)\right],$$
$$f(x+3)=\frac{1}{3}\left[2g(x)-g(x+1)-g(x+2)\right]=f(x).$$

Do đó $f(x)+f(x+1)+f(x+2)=0$, $f(x+3)=f(x)$. Vậy $f(x)$ thỏa mãn (1). Giả sử $f(x)$ thỏa mãn (1). Khi đó do (2) nên $f(x)$ có dạng (3). Vậy (1) $\Leftrightarrow$ (3). Tóm lại tất cả các hàm số cần tìm có dạng

$$f(x)=\frac{1}{3}\left[2g(x)-g(x+1)-g(x+2)\right], \forall x\in\mathbb{R}$$

(trong đó g là hàm tuần hoàn chu kì 3, tùy ý trên $\mathbb{R}$).

Bài toán 1.49. *Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

(1) $f(x+3)\le f(x)+3, \forall x\in\mathbb{R}$;
(2) $f(x+2)\ge f(x)+2, \forall x\in\mathbb{R}$.

Chứng minh rằng hàm số $g(x)=f(x)-x$ là hàm tuần hoàn.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} g(x+6)&=f(x+6)-x-6=f((x+3)+3)-x-6\\ &\le f(x+3)+3-x-6=f(x+3)-x-3\\ &\le f(x)+3-x-3=f(x)-x=g(x). \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} g(x+6)&=f(x+6)-x-6=f((x+4)+2)-x-6\\ &\ge f(x+4)+2-x-6=f((x+2)+2)-x-4\\ &\ge f(x+2)+2-x-4\ge f(x)+2-x-2=f(x)-x=g(x). \end{aligned}$$

Suy ra $g(x+6)=g(x), \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy $g(x)$ là hàm tuần hoàn chu kì 6 trên $\mathbb{R}$.

Bài toán 1.50. *Tìm tất cả các giá trị $a\in\mathbb{R}$ sao cho tồn tại duy nhất hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f(x-f(y))=a[f(x)-x]-f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.* (1)

Giải. Đặt $g(x)=f(x)-x$. Giả thiết của bài toán viết theo hàm g là

$$\begin{aligned} &g(x-y-g(y))+x-y-g(y)=ag(x)-y-g(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow\ &g(x-y-g(y))=ag(x)-x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2}$$

Giả sử f không phải là hàm hằng. Lấy r, s là hai phần tử phân biệt trong tập giá trị của hàm f. Khi đó với mọi số thực x, do (2) nên ta có

$$g(x-r)=ag(x)-x=g(x-s). \tag{3}$$

Từ (3), thay x bởi $x+r$ ta được: $g(x)=g(x+(r-s))$, $\forall x\in\mathbb{R}$. (4)
Từ (3), thay x bởi $x+s$ ta được: $g(x)=g(x+(s-r))$, $\forall x\in\mathbb{R}$. (5)
Từ (4) và (5) suy ra g là hàm số tuần hoàn với chu kì $T=|r-s|>0$. Vì thế với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có

$$\begin{aligned} ag(x)-x&=g(x-y-g(y))=g(x+T-y-g(y))\\ &=ag(x+T)-(x+T)=ag(x)-x-T. \end{aligned} \tag{6}$$

Từ (6) suy ra $T=0$, mâu thuẫn. Do đó f là hàm hằng. Giả sử $f(x)\equiv c$ (c là hằng số). Thay vào (1) được $c=a(c-x)-c$, $\forall x\in\mathbb{R}$ hay $a(c-x)=2c$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Nghĩa là $a=0$ và $c=0$. Ta có kết luận: $a=0$, khi đó hàm số duy nhất thỏa mãn các yêu cầu đề bài là $f(x)\equiv 0$.

1.3.2 Phương trình hàm sinh bởi phép đối xứng, phép nghịch đảo. Các bài toán liên quan đến các hàm chẵn, hàm lẻ

Trong mục này ta xét các bài toán liên quan đến hàm số chẵn, hàm số lẻ (phương trình hàm sinh bởi phép đối xứng) và phương trình hàm sinh bởi phép nghịch đảo. Lời giải các bài toán ở đây rất đặc biệt, bạn đọc cần nắm bắt vì nó xuất hiện rất nhiều trong cuốn sách này, đó là sử dụng các biến đổi rất hiển nhiên sau:

$$a=b\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}(a+b)\ ;\qquad a=-b\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}(a-b)\ ;$$
$$a=b+c\Leftrightarrow a=\frac{1}{3}(2a+b+c).$$

Bài toán 1.51. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x)=f(-x), \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Dễ thấy (1) tương đương với: $f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)], \forall x\in\mathbb{R}$. (2)

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{2}[g(x)+g(-x)], \forall x\in\mathbb{R}$, (3)

trong đó g là hàm số tùy ý trên $\mathbb{R}$. Khi đó dễ thấy hàm f thỏa mãn (1). Ngược lại nếu hàm f thỏa mãn (1) thì ta có (2), chọn $g(x)=f(x)$, suy ra f có dạng (3). Vậy hàm số cần tìm có dạng

$$f(x)=\frac{1}{2}[g(x)+g(-x)], \forall x\in\mathbb{R},$$

trong đó g là hàm số tùy ý trên $\mathbb{R}$.

Bài toán 1.52. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(-x)=-f(x), \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Dễ thấy (1) tương đương với: $f(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)], \forall x \in \mathbb{R}$. (2)

Xét hàm số: $f(x) = \frac{1}{2}[g(x) - g(-x)], \forall x \in \mathbb{R}$, (3)

trong đó g là hàm số tùy ý trên $\mathbb{R}$. Khi đó dễ thấy hàm f thỏa mãn (1). Ngược lại nếu hàm f thỏa mãn (1) thì f có dạng (3) do (2). Vậy hàm số cần tìm có dạng $f(x) = \frac{1}{2}[g(x) - g(-x)], \forall x \in \mathbb{R}$, với g là hàm số tùy ý trên $\mathbb{R}$.

Bài toán 1.53. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right), \forall x \in \mathbb{R}^*. \quad (1)$$

Giải. Dễ thấy (1) tương đương với $f(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)\right], \forall x \in \mathbb{R}^*$. (2)

Xét hàm số: $f(x) = \frac{1}{2}\left[g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right)\right], \forall x \in \mathbb{R}^*$, (3)

trong đó g là hàm số tùy ý trên $\mathbb{R}^*$. Khi đó dễ thấy hàm f thỏa mãn (1). Ngược lại nếu hàm f thỏa mãn (1) thì f thỏa mãn (2), do đó f có dạng (3). Vậy hàm số cần tìm có dạng:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right)\right], \forall x \in \mathbb{R}^*,$$

trong đó g là hàm số tùy ý trên $\mathbb{R}^*$.

Bài toán 1.54. *Tìm tất cả các hàm số f: $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right), \forall x \in \mathbb{R}^*. \quad (1)$$

Giải. Dễ thấy (1) tương đương với: $f(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)\right], \forall x \in \mathbb{R}^*$. (2)

Xét hàm số: $f(x) = \frac{1}{2}\left[g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)\right], \forall x \in \mathbb{R}^*$, (3)

trong đó g là hàm số tùy ý trên $\mathbb{R}^*$. Khi đó dễ thấy hàm f thỏa mãn (1). Ngược lại nếu hàm f thỏa mãn (1) thì f thỏa mãn (2), do đó f có dạng (3). Vậy hàm số cần tìm có dạng:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)\right], \forall x \in \mathbb{R}^*,$$

trong đó g là hàm số tùy ý trên $\mathbb{R}^*$.

Bài toán 1.55. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(-x) + af(x) = b, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

(với a, b là hai số thực cho trước).

Giải. Trong (1) thay x bởi $-x$ ta được: $f(x) + af(-x) = b, \forall x \in \mathbb{R}$. (2)

Đặt $f(-x) = g(x)$. Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases} af(x) + g(x) = b \\ f(x) + ag(x) = b. \end{cases}$ (3)

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1,\ D_f = \begin{vmatrix} b & 1 \\ b & a \end{vmatrix} = b(a-1),\ D_g = \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & b \end{vmatrix} = b(a-1).$$

Trường hợp 1. $a \neq 1$ và $a \neq -1$. Khi đó $D \neq 0$. Hệ (3) có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{D_f}{D} = \dfrac{b(a-1)}{a^2-1} = \dfrac{b}{a+1} \\ g(x) = \dfrac{D_g}{D} = \dfrac{b(a-1)}{a^2-1} = \dfrac{b}{a+1} \end{cases} \text{(thỏa mãn } g(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}).$$

Thử lại thấy $f(x) = \frac{b}{a+1}, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn đề bài.

Trường hợp 2. $a = 1$. Khi đó (1) trở thành: $f(x) + f(-x) = b, \forall x \in \mathbb{R}$. (4)

Đặt $f(x) - \frac{b}{2} = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào (4) ta được

$$g(x) + \frac{b}{2} + g(-x) + \frac{b}{2} = b, \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow g(x) = -g(-x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Từ (5), sử dụng bài toán 1.52 ở trang 31, ta được

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{2}[h(x) - h(-x)], \forall x \in \mathbb{R} \\ h \text{ là hàm số tùy ý xác định trên } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Trường hợp 3. $a = -1$. Nếu $b \neq 0$ thì $D = 0$ và $D_f \neq 0, D_g \neq 0$, bởi vậy hệ (3) vô nghiệm. Nếu $b = 0$ thì (1) tương đương với

$$f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (6)$$

Từ (6), sử dụng bài toán 1.51 ở trang 31, ta được

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}[k(x) + k(-x)], \forall x \in \mathbb{R} \\ k \text{ là hàm số tùy ý xác định trên } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Thử lại thấy thỏa mãn. Tóm lại, ta có kết quả:

- Nếu $a \neq 1$ và $a \neq -1$ thì có duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x) = \frac{b}{a+1}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Nếu $a = 1$ thì tất cả các hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x) = \frac{b}{2} + \frac{1}{2}[h(x) - h(-x)], \forall x \in \mathbb{R} \ (h \text{ là hàm số tùy ý xác định trên } \mathbb{R}).$$

- Nếu $a = -1$ và $b \neq 0$ thì không có hàm số nào thỏa mãn đề bài.
- Nếu $a = -1$ và $b = 0$ thì tất cả các hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x) = \frac{1}{2}[k(x) + k(-x)], \forall x \in \mathbb{R} \ (k \text{ là hàm số tùy ý xác định trên } \mathbb{R}).$$

Bài toán 1.56. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x) + f(-x) = \frac{2010 \cos x}{\sqrt{x^2+1}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
&f(x) + f(-x) = \frac{2010 \cos x}{\sqrt{x^2+1}}, \forall x \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow &f(x) + f(-x) = \frac{1005 \cos x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1005 \cos(-x)}{\sqrt{(-x)^2+1}}, \forall x \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow &f(x) - \frac{1005 \cos x}{\sqrt{x^2+1}} = -\left[f(-x) - \frac{1005 \cos(-x)}{\sqrt{(-x)^2+1}}\right], \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Đặt $f(x) - \frac{1005 \cos x}{\sqrt{x^2+1}} = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Từ (1) suy ra $g(x)$ là hàm số thỏa mãn điều kiện: $g(x) = -g(-x), \forall x \in \mathbb{R}$. (2)

Từ (2), sử dụng bài toán 1.52 ở trang 31, ta được

$$g(x) = \frac{1}{2}[h(x) - h(-x)], \forall x \in \mathbb{R}, \qquad (3)$$

với $h(x)$ là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, tùy ý. Vậy

$$f(x) = \frac{1005 \cos x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2}[h(x) - h(-x)], \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại thấy đúng. Tất cả các hàm số thỏa mãn đề bài đều có dạng

$$f(x) = \frac{1005 \cos x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2}[h(x) - h(-x)], \forall x \in \mathbb{R},$$

với $h(x)$ là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, tùy ý.

Bài toán 1.57 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2011). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, biết rằng f là hàm số chẵn và*

$$f(xy) - f(x)f(y) = 3[f(x+y) - 2xy - 1], \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Giải. Từ (1) thay x bởi $\frac{x}{2}$ và y bởi $\frac{x}{2}$ ta được

$$f\left(\frac{x^2}{4}\right) - f^2\left(\frac{x}{2}\right) = 3\left[f(x) - \frac{x^2}{2} - 1\right], \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Từ (1) thay x bởi $\frac{x}{2}$ và y bởi $-\frac{x}{2}$ ta được

$$f\left(-\frac{x^2}{4}\right) - f\left(\frac{x}{2}\right) f\left(-\frac{x}{2}\right) = 3\left[f(0) + \frac{x^2}{2} - 1\right], \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Do f là hàm chẵn nên (3) viết lại

$$f\left(\frac{x^2}{4}\right) - f^2\left(\frac{x}{2}\right) = 3\left[f(0) + \frac{x^2}{2} - 1\right], \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \qquad (4)$$

Lấy (2) trừ (4) theo vế ta được: $f(x) = x^2 + f(0), \ \forall x \in \mathbb{R}$. (5)

Từ (1) cho $y = 0$ ta có

$$\begin{aligned}
&f(0) - f(x)f(0) = 3[f(x) - 1], \ \forall x \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow &[f(x) - 1][f(0) + 3] = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Nếu $f(0) \neq -3$ thì $f(x) = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$, hàm số này không thỏa (1). Vậy $f(0) = -3$ và từ (5) ta có $f(x) = x^2 - 3, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Do đó có duy nhất một hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là $f(x) = x^2 - 3, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 1.58. *Tìm tất cả các hàm số $f : (-2; 2) \to \mathbb{R}$, thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y) + f(x-y) + f(y-x) + f(-x-y) = 0, \ \forall x, y \in (-1; 1). \qquad (1)$$

Giải. Trong (1) lấy $x = 0$ và $y = 0$ ta được $f(0) = 0$ Trong (1) lấy $y = x$ và sử dụng $f(0) = 0$ ta được

$$\begin{aligned}
&f(2x) + f(-2x) = 0, \ \forall x \in (-1; 1). \\
\Leftrightarrow &f(x) = -f(-x), \ \forall x \in (-2; 2). \\
\Leftrightarrow &f(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)], \ \forall x \in (-2; 2). \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}[g(x) - g(-x)], \ \forall x \in (-2; 2) \\ g \text{ là hàm số trên khoảng } (-2; 2), \text{ tùy ý.} \end{cases} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Thử lại: Với f là hàm số xác định bởi (2) ta có f xác định trên $(-2;2)$ và với mọi x, y thuộc khoảng $(-1;1)$, ta có

$$f(x+y) = \frac{1}{2}[g(x+y) - g(-x-y)]$$
$$f(x-y) = \frac{1}{2}[g(x-y) - g(y-x)]$$
$$f(y-x) = \frac{1}{2}[g(y-x) - g(x-y)]$$
$$f(-x-y) = \frac{1}{2}[g(-x-y) - g(x+y)].$$

Suy ra $f(x+y) + f(x-y) + f(y-x) + f(-x-y) = 0$, thỏa mãn (1). Vậy tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài đều có dạng

$$f(x) = \frac{1}{2}[g(x) - g(-x)],\ \forall x \in (-2;2),$$

với g là hàm số xác định trên khoảng $(-2;2)$, tùy ý.

Bài toán 1.59. *Tìm tất cả các hàm số $f : (-2;2) \to \mathbb{R}$, thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y) + f(x-y) + f(y-x) + f(-x-y) = h(x+y), \forall x, y \in (-1;1), \quad (1)$$

trong đó h là hàm số xác định trên khoảng $(-2;2)$.

Giải. Giả sử f là nghiệm của (1). Trong (1) lấy $x = y = 0$ được $4f(0) = h(0)$. Trong (1) cho $y = x$ được

$$f(2x) + f(-2x) = h(2x),\ \forall x \in (-1;1). \quad (2)$$

Trong (1) cho $y = -x$ được $2f(0) + f(2x) + f(-2x) = h(0),\ \forall x \in (-1;1)$. (3)
Từ (2) và (3) suy ra $h(2x) = h(0) - 2f(0),\ \forall x \in (-1;1)$. Mà $4f(0) = h(0)$ nên

$$h(2x) = 2f(0),\ \forall x \in (-1;1)$$

hay $h(x) = 2f(0),\ \forall x \in (-2;2)$. Vậy h là hàm hằng trên khoảng $(-2;2)$. Ngược lại, giả sử $h(x) = \alpha,\ \forall x \in (-2;2)$ là hàm hằng trên khoảng $(-2;2)$. Đặt $f(x) = \frac{\alpha}{4} + k(x),\ \forall x \in (-2;2)$. Thay vào (1) được

$$k(x+y) + k(x-y) + k(y-x) + k(-x-y) = 0,\ \forall x, y \in (-1;1). \quad (4)$$

Từ (4), sử dụng kết quả bài toán 1.58 ở trang 35, ta được

$$k(x) = \frac{1}{2}[g(x) - g(-x)],\ \forall x \in (-2;2),$$

với g là hàm số trên khoảng $(-2;2)$, tùy ý. Vậy phương trình hàm (1) có nghiệm khi và chỉ khi $h(x) \equiv c$ là hàm hằng trên khoảng $(-2;2)$. Khi đó nghiệm của (1) có dạng

$$f(x) = \frac{c}{4} + \frac{1}{2}[g(x) - g(-x)],\ \forall x \in (-2;2),$$

với g là hàm số xác định trên khoảng $(-2;2)$, tùy ý.

Bài toán 1.60. *Tìm tất cả các hàm số $f : (-2;2) \to \mathbb{R}$, thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y) - f(x-y) - f(y-x) + f(-x-y) = 0,\ \forall x, y \in (-1;1). \quad (1)$$

Giải. Giả sử hàm f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Đặt $f(0) = c$. Trong (1) lấy $y = x$ ta được

$$f(2x) + f(-2x) = 2c,\ \forall x \in (-1;1)$$
$$\Leftrightarrow f(x) + f(-x) = 2c,\ \forall x \in (-2;2)$$
$$\Leftrightarrow k(x) + k(-x) = 0,\ \forall x \in (-2;2) \ \left(\text{với } k(x) = f(x) - c,\ \forall x \in (-2;2)\right)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k(x) = \frac{1}{2}[g(x) - g(-x)],\ \forall x \in (-2;2) \\ g \text{ là hàm số trên khoảng } (-2;2), \text{ tùy ý.} \end{cases} \quad (2)$$

Thử lại: Với $f(x) = k(x) + c$, trong đó k là hàm số xác định bởi (2) ta có f xác định trên $(-2;2)$ và với mọi x, y thuộc khoảng $(-1;1)$, ta có

$$f(x+y) = c + \frac{1}{2}[g(x+y) - g(-x-y)]$$
$$f(x-y) = c + \frac{1}{2}[g(x-y) - g(y-x)]$$
$$f(y-x) = c + \frac{1}{2}[g(y-x) - g(x-y)]$$
$$f(-x-y) = c + \frac{1}{2}[g(-x-y) - g(x+y)].$$

Suy ra $f(x+y) - f(x-y) - f(y-x) + f(-x-y) = 0$, thỏa mãn (1). Vậy tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài đều có dạng

$$f(x) = c + \frac{1}{2}[g(x) - g(-x)],\ \forall x \in (-2;2),$$

với c là hằng số và g là hàm số xác định trên khoảng $(-2;2)$, tùy ý.

Bài toán 1.61. *Tìm tất cả các hàm số $f : (-2;2) \to \mathbb{R}$, thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y) - f(x-y) - f(y-x) + f(-x-y) = h(x+y),\ \forall x, y \in (-1;1), \quad (1)$$

trong đó h là hàm số xác định trên khoảng $(-2;-2)$.

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Trong (1) lấy $x=0$ và $y=0$ được $h(0)=0$. Trong (1) cho $y=x$ được

$$f(2x)+f(-2x)=h(2x)+2f(0),\ \forall x\in(-1;1). \tag{2}$$

Trong (1) cho $y=-x$ và sử dụng $h(0)=0$ ta được

$$f(2x)+f(-2x)=2f(0),\ \forall x\in(-1;1). \tag{3}$$

Từ (2) và (3) suy ra $h(2x)=0,\ \forall x\in(-1;1)$ hay $h(x)=0,\ \forall x\in(-2;2)$. Vậy điều kiện cần để (1) có nghiệm là $h(x)=0,\ \forall x\in(-2;2)$. Khi đó (1) trở thành

$$f(x+y)-f(x-y)-f(y-x)+f(-x-y)=0,\ \forall x,y\in(-1;1). \tag{4}$$

Từ (4), sử dụng kết quả bài toán 1.60 ở trang 37, ta được

$$f(x)=\frac{1}{2}[g(x)-g(-x)],\ \forall x\in(-2;2),$$

với g là hàm số trên khoảng $(-2;2)$, tùy ý. Vậy phương trình hàm (1) có nghiệm khi và chỉ khi $h(x)=0,\ \forall x\in(-2;2)$. Khi đó nghiệm của (1) có dạng

$$f(x)=\frac{1}{2}[g(x)-g(-x)],\ \forall x\in(-2;2),$$

với g là hàm số xác định trên khoảng $(-2;2)$, tùy ý.

Bài toán 1.62. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)-f\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có $\sqrt{x^2+1}>|x|\geq\pm x\Rightarrow\sqrt{x^2+1}\pm x>0$. Do

$$\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=1$$

nên nếu đặt $t=\sqrt{x^2+1}+x$ thì được $\frac{1}{t}=\sqrt{x^2+1}-x$, dẫn tới

$$t-\frac{1}{t}=2x\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right).$$

Thay vào (1) được

$$f(t)-f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right),\ \forall t>0$$

$$\Leftrightarrow f(t)-\frac{1}{2}t=f\left(\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{2}.\frac{1}{t},\ \forall t>0$$

$$\Leftrightarrow g(t)=g\left(\frac{1}{t}\right),\ \forall t>0\ \left(\text{với } g(t)=f(t)-\frac{1}{2}t\right)$$

$$\Leftrightarrow g(t)=\frac{1}{2}\left[g(t)+g\left(\frac{1}{t}\right)\right],\ \forall t>0$$

$$\Leftrightarrow g(t)=\frac{1}{2}\left[h(t)+h\left(\frac{1}{t}\right)\right],\ \forall t>0$$

(h là hàm số xác định trên $(0;+\infty)$, tùy ý).

Tất cả các hàm số cần tìm đều có dạng

$$f(x)=\begin{cases}\text{tùy ý} & \text{khi } x\leq 0\\ \dfrac{1}{2}\left[x+h(x)+h\left(\dfrac{1}{x}\right)\right] & \text{khi } x>0,\end{cases}$$

trong đó h là hàm số xác định trên khoảng $(0;+\infty)$, tùy ý.

Bài toán 1.63. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\sin\left(x^2+\frac{a}{x^2}\right),\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{1}$$

Giải. Với mọi $x\neq 0$, từ (1) ta có $f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\sin\left(\frac{1}{x^2}+ax^2\right)$. Kết hợp với (1) thấy rằng nếu $a\neq 1$ thì không tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài. Xét $a=1$, khi đó (1) trở thành

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\sin\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right),\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\Leftrightarrow f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\sin\left(\frac{1}{x^2}+x^2\right)\right],\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\Leftrightarrow f(x)-\frac{1}{2}\sin\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=-\left[f\left(\frac{1}{x}\right)-\sin\left(\frac{1}{x^2}+x^2\right)\right],\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

$$\Leftrightarrow g(x)=-g\left(\frac{1}{x}\right),\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\ \left(\text{với } g(x)=f(x)-\frac{1}{2}\sin\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow g(x)=\frac{1}{2}\left[g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)\right],\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} g(x)=\dfrac{1}{2}\left[h(x)-h\left(\dfrac{1}{x}\right)\right],\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\\ h \text{ là hàm số xác định trên } \mathbb{R}^*, \text{ tùy ý.}\end{cases}$$

Ta có kết luận: Nếu $a \neq 1$ thì không tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài. Nếu $a = 1$ thì $f(x) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + h(x) - h\left(\frac{1}{x}\right)\right]$, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, với h là hàm số xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, tùy ý.

1.3.3 Phương trình hàm $f(x+a) = f(x) + b$

Bài toán 1.64. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho*

$$f(x + 2012) = f(x) - 5, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn đề bài, khi đó ta có (1). Đặt

$$f(x) = \frac{-1}{503}x + g(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó thay vào (1), ta được

$$\begin{aligned}
&\frac{-1}{503}(x + 2012) + g(x + 2012) = \frac{-1}{503}x + g(x) - 4, \forall x \in \mathbb{R}\\
\Leftrightarrow &\frac{-x}{503} - 4 + g(x + 2012) = \frac{-1}{503}x + g(x) - 4, \forall x \in \mathbb{R}\\
\Leftrightarrow &g(x + 2012) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Vậy $f(x) = \frac{-1}{503}x + g(x), \forall x \in \mathbb{R}$, với g là hàm số tuần hoàn chu kỳ 2012 trên $\mathbb{R}$. Sau khi thử lại ta kết luận: Hàm số cần tìm là $f(x) = \frac{-1}{503}x + g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ (trong đó g là hàm số tuần hoàn chu kỳ 2012 trên $\mathbb{R}$, tùy ý).

Nhận xét 2. *Phép đặt $f(x) = \frac{-1}{503}x + g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ được tìm ra như sau: Từ (1), ta tưởng tượng rằng*

$$f(x + 2012) = f(x) + f(2012), \forall x \in \mathbb{R}$$

(với $f(2012) = -4$). Suy ra $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy từ $f(2012) = -4$, ta có

$$a.2012 = -4 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{503}.$$

Nhận xét 3. *Tương tự ta giải được phương trình hàm sau:*

$$\boxed{f(x + a) = f(x) + b, \forall x \in \mathbb{R}}$$

Bài toán 1.65. *Tìm tất cả các dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ thỏa mãn*

$$x_1 = 2, x_2 = -1; x_{n+2} = x_n + 2010, \forall n = 1, 2, \ldots \quad (1)$$

Giải. Đặt $x_n = 1005n + u_n, \forall n = 1, 2, \ldots$ Thay vào (1) ta được

$$u_1 = -1003,\ u_2 = -2011\ ;\ u_{n+2} = u_n, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 = 1$ của dãy số (u_n) có hai nghiệm 1 và -1, do đó

$$u_n = A + B(-1)^n, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Do $u_1 = -1003$ và $u_2 = -2011$ nên

$$\begin{cases} A - B = -1003 \\ A + B = -2011 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1507 \\ B = -504. \end{cases}$$

Vậy $x_n = 1005n - 1507 - 504(-1)^n, \forall n = 1, 2, \ldots$ Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 1.66. *Tìm tất cả các dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ thỏa mãn*

$$x_{n+5} = x_n + 2015, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Hướng dẫn. Đặt $x_n = 403n + y_n, \forall n = 1, 2, \ldots$. Khi đó

$$y_{n+5} = y_n, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Vậy $y_n = \sum_{h=0}^{4} \beta_h \left(\cos\frac{h2\pi}{5} + \sin\frac{h2\pi}{5}\right), \forall n = 1, 2, \ldots$, trong đó các hằng số $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ sẽ được xác định khi biết các số hạng x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Bài toán 1.67. *Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn điều kiện: $P(-3) = 2$ và $P(x + 5) = P(x + 1) + 2, \forall x \in \mathbb{R}$.*

Hướng dẫn. Thay x bởi $x - 1$.

Bài toán 1.68. *Tìm các đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện $P(1) = 2010$ và*

$$P(x + y) = P(x) + P(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Giả đa thức $P(x)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Trong (1), lấy $y = 1$ được

$$P(x + 1) = P(x) + 2010, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Đặt $P(x) = Q(x) + 2010x$. Thay vào (2) ta được $Q(x)$ là đa thức thỏa mãn

$$\begin{aligned}
&Q(x + 1) + 2010(x + 1) = Q(x) + 2010x + 2010, \forall x \in \mathbb{R}\\
\Leftrightarrow &Q(x + 1) = Q(x), \forall x \in \mathbb{R}\\
\Leftrightarrow &Q(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}\ \ (c \text{ là hằng số}).
\end{aligned}$$

Vậy $P(x) = 2010x + c, \forall x \in \mathbb{R}$. Do $P(1) = 2010$ nên $2010 = 2010 + c \Leftrightarrow c = 0$. Sau khi thử lại ta kết luận: Có duy nhất một đa thức thỏa mãn đề bài là

$$P(x) = 2010x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 1.69. *Thực hiện các yêu cầu sau:*
a) Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f(x)=12x+18+f(x+3),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

b) Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $f(x)$ *thỏa mãn*

$$f(x)=12x+18+f(x+3),,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Hướng dẫn.
a) Đặt $f(x)=ax^2+bx+c+g(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&ax^2+bx+c+g(x)=12x+18+a(x+3)^2+b(x+3)+c+g(x+3)\\ \Leftrightarrow&g(x)=(12+6a)x+18+9a+3b+g(x+3).\end{aligned}$$

Chọn a,b sao cho $\begin{cases}12+6a=0\\18+9a+3b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=0.\end{cases}$ Với a,b như trên ta có

$$g(x)=g(x+3),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ (2), sử dụng bài toán 1.34 ta được kết quả.
b) Đặt $f(x)=-2x^2+g(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&-2x^2+g(x)=12x+18-2(x+3)^2+g(x+3),\forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&-2x^2+g(x)=12x+18-2x^2-12x-18+g(x+3),\forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&g(x)=g(x+3),\forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{3}$$

Vì $g(x)$ là đa thức hệ số thực nên từ (3) suy ra $g(x)\equiv C$ (với C là hằng số).
Vậy $f(x)=-2x^2+C,\forall x\in\mathbb{R}$ (C là hằng số tùy ý). Thử lại thấy thỏa mãn.

1.3.4 Phương trình hàm $f(x+a)=-f(x)+b$

Bài toán 1.70. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *sao cho*

$$f(x-5)=-f(x)+4,\forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn đề bài, khi đó ta có (1). Đặt

$$f(x)=2+g(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&2+g(x-5)=-2-g(x)+4,\forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&g(x-5)=-g(x),\forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&g(x)=-g(x+5),\forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Theo bài toán 1.42 ở trang 25 ta có $g(x)=\frac{1}{2}[h(x)-h(x+5)],\forall x\in\mathbb{R}$, trong đó h là hàm số tuần hoàn chu kỳ 10 trên $\mathbb{R}$, tùy ý. Sau khi thử lại ta kết luận: Hàm số cần tìm có dạng $f(x)=2+\frac{1}{2}[h(x)-h(x+5)],\forall x\in\mathbb{R}$, với h là hàm số tuần hoàn chu kỳ 10 trên $\mathbb{R}$, tùy ý).

Nhận xét 4. *Phép đặt* $f(x)=2+g(x),\forall x\in\mathbb{R}$ *được tìm ra như sau: Ta sẽ tìm một nghiệm riêng của* (1), *tốt nhất là ta tìm hàm hằng (nếu có) thỏa mãn* (1). *Giả sử* $f(x)=c,\forall x\in\mathbb{R}$. *Thay vào* (1), *ta được:* $c=-c+4\Leftrightarrow c=2$. *Vậy hàm hằng thỏa mãn* (1) *là:* $f(x)=2,\forall x\in\mathbb{R}$. *Do đó ta đặt* $f(x)=2+g(x),\forall x\in\mathbb{R}$. *Với phép đặt này ta sẽ khử được số* 4 *trong* (1).

Nhận xét 5. *Tương tự ta giải được phương trình hàm sau*

$$\boxed{f(x+a)=-f(x)+b,\forall x\in\mathbb{R}\ (a\text{ và }b\text{ là hằng số})}$$

Tương tự ta tìm được dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *thỏa mãn*

$$\boxed{x_{n+k}=-x_n+b,\forall n=1,2,\ldots\ (k\text{ và }b\text{ là hằng số, }k\in\mathbb{N}^*).}$$

Bài toán 1.71. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)+f\left(\frac{x^2+x+1}{x}\right)=2\left(x^2+\frac{1}{x^2}+3\right),\ \forall x\in\mathbb{R}^*. \tag{1}$$

Hướng dẫn. Đặt $t=x+\frac{1}{x}\Rightarrow|t|\geq 2$. Ta có:

$$\frac{x^2-x+1}{x}=\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=t-1$$

$$\frac{x^2+x+1}{x}=t+1,\ \left(x^2+\frac{1}{x^2}+3\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1=t^2+1.$$

Thay vào (1) ta được:

$$\begin{aligned}&f(t-1)+f(t+1)=(t-1)^2+(t+1)^2,\ |t|\geq 2\\ \Leftrightarrow&\left[f(t-1)-(t-1)^2\right]=-\left[f(t+1)-(t+1)^2\right],\ |t|\geq 2.\end{aligned} \tag{2}$$

Đặt $g(t)=f(t)-t^2$. Thay vào (2), ta được:

$$\begin{aligned}&g(t-1)=-g(t+1),\ |t|\geq 2\\ \Leftrightarrow&g(t)=-g(t+2),\ |t+1|\geq 2\\ \Leftrightarrow&g(t)=-g(t+2),\ t\in(-\infty;-3]\cup[1;+\infty).\end{aligned} \tag{3}$$

1.3.5 Phương trình hàm $f(x+a)=\alpha f(x)+b$

Chú ý 10. *Trường hợp $\alpha=1$ đã xét ở mục 1.3.3, trang 40. Trường hợp $\alpha=-1$ đã xét ở mục 1.3.4, trang 42.*

Bài toán 1.72. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho*

$$f(x+3)=2f(x)-5,\forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Đặt $f(x)=5+g(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&5+g(x+3)=2\left[5+g(x)\right]-5,\forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&g(x+3)=2g(x),\forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{2}$$

Đặt $g(x)=\left(\sqrt[3]{2}\right)^x\phi(x),\forall x\in\mathbb{R}$, thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt[3]{2}\right)^{x+3}\phi(x+3)=2\left(\sqrt[3]{2}\right)^x\phi(x),\forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&\phi(x+3)=\phi(x),\forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Vậy $f(x)=5+\left(\sqrt[3]{2}\right)^x\phi(x),\forall x\in\mathbb{R}$, trong đó ϕ là hàm số tuần hoàn chu kỳ 3 trên $\mathbb{R}$, tùy ý.

Lưu ý. Phép đặt $f(x)=5+g(x),\forall x\in\mathbb{R}$ được tìm ra như sau: Từ (1), ta xét phương trình $c=2c-5\Leftrightarrow c=5$. Vậy một nghiệm riêng của (1) là hàm hằng $f(x)\equiv 5$. Vì vậy nếu đặt $f(x)=5+g(x),\forall x\in\mathbb{R}$ thì sẽ khử được số -5. Phép đặt $g(x)=\left(\sqrt[3]{2}\right)^x\phi(x),\forall x\in\mathbb{R}$ được tìm ra như sau: Từ (2) ta tưởng tượng rằng

$$g(x+3)=g(x)g(3),\forall x\in\mathbb{R}$$

(với $g(3)=2$). Suy ra hàm số g có đặc điểm biến tổng thành tích, do đó $g(x)=a^x$. Từ $g(3)=2\Rightarrow a^3=2\Rightarrow a=\sqrt[3]{2}$. Bởi vậy nếu đặt

$$g(x)=\left(\sqrt[3]{2}\right)^x\phi(x),\forall x\in\mathbb{R}$$

thì sẽ khử được số 2.

Nhận xét 6. *Tương tự ta giải được phương trình hàm sau*

$$\boxed{f(x+a)=\alpha f(x)+b,\forall x\in\mathbb{R}}$$

(a, a và b là hằng số, $\alpha\neq\pm1$). Ta cũng tìm được dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ thỏa mãn

$$\boxed{x_{n+k}=ax_n+b,\forall n=1,2,\ldots}$$

(k và a,b là hằng số, $a\neq\pm1$, $k\in\mathbb{N}^*$).

Bài toán 1.73. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+4)=-3f(x)+1,\forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Đặt $f(x)=\dfrac{1}{4}+g(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó g là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$. Từ (1) ta được

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}+g(x+4)=-3\left[\frac{1}{4}+g(x)\right]+1,\forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&g(x+4)=-3g(x),\forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{2}$$

Đặt $g(x)=3^{\frac{x}{4}}h(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó h là hàm xác định trên $\mathbb{R}$. Từ (2) được

$$\begin{aligned}&3^{\frac{x+4}{4}}h(x+4)=-3.3^{\frac{x}{4}}h(x),\forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&h(x+4)=-h(x),\forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}h(x)=\dfrac{1}{2}\left[h(x)-h(x+4)\right],\forall x\in\mathbb{R}\\ h(x)=h(x+8),\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}h(x)=\dfrac{1}{2}\left[k(x)-k(x+4)\right],\forall x\in\mathbb{R}\\ k\text{ là hàm số tuần hoàn cộng tính chu kì 8 trên }\mathbb{R},\text{ tùy ý.}\end{cases}\end{aligned}$$

Vậy tất cả các hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài đều có dạng

$$f(x)=\frac{1}{4}+3^{\frac{x}{4}}.\frac{k(x)-k(x+4)}{2},\forall x\in\mathbb{R},$$

trong đó k là hàm số tuần hoàn cộng tính chu kì 8 trên $\mathbb{R}$, tùy ý.

Bài toán 1.74. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+\pi)+3f(x)=\cos 2x,\forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Hướng dẫn. Giả sử $\cos 2x=a\left[\cos 2(x+\pi)+3\cos 2x\right]=4a\cos 2x$. Ta cần chọn a sao cho $4a=1\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{4}$. Bởi vậy (1) tương đương với

$$f(x+\pi)-\frac{1}{4}\cos 2(x+\pi)=-3\left[f(x)-\frac{1}{4}\cos 2x\right],\forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Đặt $\left[f(x)-\dfrac{1}{4}\cos 2x\right]=g(x),\forall x\in\mathbb{R}$, thay vào (2) ta được

$$g(x+\pi)=-3g(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 1.75. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+a)+\alpha f(x)=P(x),\ \forall x\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

trong đó $\alpha\neq -1$ và $P(x)$ là đa thức bậc n.

Hướng dẫn. Ta biểu diễn $P(x)=Q(x+a)+\alpha Q(x)$, với $Q(x)$ là đa thức bậc n, sau đó dùng phương pháp đồng nhất hệ số để tìm các hệ số của $Q(x)$.
Lưu ý. Cần phân biệt bài toán 1.39 (ở trang 24) và bài toán 1.75.

Bài toán 1.76. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+3)+5f(x)=x^2-3x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Hướng dẫn. Ta phân tích

$$\begin{aligned}&x^2-3x+1=Q(x+3)+5Q(x),\text{ với } Q(x)=ax^2+bx+c\\ \Rightarrow&x^2-3x+1=a(x+3)^2+b(x+3)+c+5\left(ax^2+bx+c\right)\\ \Rightarrow&\begin{cases}1=a+5a\\-3=6a+b+5b\\1=9a+3b+c+5c\end{cases}\Leftrightarrow (a;b;c)=\left(\frac{1}{6};-\frac{2}{3};\frac{1}{4}\right).\end{aligned}$$

Vậy theo (1), với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned}&f(x+3)+5f(x)=\frac{(x+3)^2}{6}-\frac{2(x+3)}{3}+\frac{1}{4}+5\left(\frac{x^2}{6}-\frac{2x}{3}+\frac{1}{4}\right)\\ \Leftrightarrow&f(x+3)-\left[\frac{(x+3)^2}{6}-\frac{2(x+3)}{3}+\frac{1}{4}\right]=-5\left[f(x)-\left(\frac{x^2}{6}-\frac{2x}{3}+\frac{1}{4}\right)\right]\\ \Leftrightarrow&g(x+3)=-5g(x),\text{ với } g(x)=f(x)-\left(\frac{x^2}{6}-\frac{2x}{3}+\frac{1}{4}\right).\end{aligned}$$

Bài toán 1.77. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho*

$$f(x+2)+20.5^x=5f(x),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Hướng dẫn. Giả sử $f(x+2)-5f(x)=-20.5^x=a\left(5^{x+2}-5.5^x\right)=20a.5^x$. Ta cần chọn a sao cho $20a=-20\Leftrightarrow a=-1$. Vậy (1) tương đương với

$$\begin{aligned}&f(x+2)+5^{x+2}=5(f(x)+5^x),\forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&g(x+2)=5g(x),\forall x\in\mathbb{R}\ (\text{với } g(x)=f(x)+5^x,\forall x\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Bài toán 1.78. *Hãy xác định tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

(1) $f(x)=-3+\sin x$ *với* $0\le x<2\pi$.
(2) $2005f(x+2\pi)=2006f(x)+3,\forall x\in\mathbb{R}$.

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn đề bài, khi đó ta có (1) và (2). Với mọi $x\in\mathbb{R}$, đặt $f(x)=-3+g(x)$. Thay vào (2) ta được

$$g(x+2\pi)=\frac{2006}{2005}g(x),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Với mọi $x\in\mathbb{R}$, đặt $g(x)=\left(\frac{2006}{2005}\right)^{\frac{x}{2\pi}}\phi(x)$, thay vào (3) ta được

$$\phi(x+2\pi)=\phi(x),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Từ (4) và bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được

$$\phi(x)=\phi(x+2n\pi),\forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{Z}. \tag{5}$$

Kí hiệu $[a]$, $\{a\}$ chỉ phần nguyên, phần thập phân của số thực a, khi đó với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có: $\frac{x}{2\pi}=\left[\frac{x}{2\pi}\right]+\left\{\frac{x}{2\pi}\right\}\Leftrightarrow x=2\left[\frac{x}{2\pi}\right]\pi+\left\{\frac{x}{2\pi}\right\}2\pi$. Như vậy x và $\left\{\frac{x}{2\pi}\right\}2\pi$ sai khác nhau $k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ nên $\sin x=\sin\left(\left\{\frac{x}{2\pi}\right\}2\pi\right)$. Theo (5), ta có: $\phi(x)=\phi\left(\left\{\frac{x}{2\pi}\right\}2\pi+2\left[\frac{x}{2\pi}\right]\pi\right)=\phi\left(\left\{\frac{x}{2\pi}\right\}2\pi\right),\ \forall x\in\mathbb{R}$. (6)

Ta có: $f(x)=-3+g(x)=-3+\left(\frac{2006}{2005}\right)^{\frac{x}{2\pi}}\phi(x),\forall x\in\mathbb{R}$. (7)

Từ (7) suy ra: $\phi(x)=\left(\frac{2005}{2006}\right)^{\frac{x}{2\pi}}[3+f(x)],\forall x\in\mathbb{R}$. (8)

Do $0\le\left\{\frac{x}{2\pi}\right\}2\pi<2\pi$ nên từ (1), (6) và (8) suy ra:

$$\begin{aligned}\phi(x)&=\phi\left(\left\{\frac{x}{2\pi}\right\}2\pi\right)=\left(\frac{2005}{2006}\right)^{\left\{\frac{x}{2\pi}\right\}}\left[3+f\left(\left\{\frac{x}{2\pi}\right\}2\pi\right)\right]\\ &=\left(\frac{2005}{2006}\right)^{\left\{\frac{x}{2\pi}\right\}}\sin\left(\left\{\frac{x}{2\pi}\right\}2\pi\right)=\left(\frac{2005}{2006}\right)^{\left\{\frac{x}{2\pi}\right\}}\sin x,\ \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{9}$$

Thay (9) vào (7), ta được:

$$\begin{aligned}f(x)&=-3+\left(\frac{2006}{2005}\right)^{\frac{x}{2\pi}}\phi(x)=-3+\left(\frac{2006}{2005}\right)^{\frac{x}{2\pi}}\left[\left(\frac{2005}{2006}\right)^{\left\{\frac{x}{2\pi}\right\}}\sin x\right]\\ &=-3+\left(\frac{2006}{2005}\right)^{\frac{x}{2\pi}-\left\{\frac{x}{2\pi}\right\}}\sin x=-3+\left(\frac{2006}{2005}\right)^{\left[\frac{x}{2\pi}\right]}\sin x,\ \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa đề bài là:

$$f(x)=-3+\left(\frac{2006}{2005}\right)^{\left[\frac{x}{2\pi}\right]}\sin x,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Lưu ý. Dạng phương trình hàm như ở bài toán 1.78 được đề cập khá nhiều trong kỳ thi Olympic 30/04. Tuy nhiên các đáp án đưa ra mang tính áp đặt, còn lời giải đã được trình bày ở trên là tự nhiên, dễ hiểu, dễ nhớ hơn.

Bài toán 1.79 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2004). *Hãy xác định tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

(1) $f(x)=\cos x$ *với* $0\le x<2\pi$.
(2) $f(x+2\pi)=2f(x)+1, \forall x\in\mathbb{R}$.

Bài toán 1.80 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2004). *Hãy xác định tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

(1) $f(x)=-2+\sin x$ *với* $0\le x<2\pi$.
(2) $f(x+2\pi)=3f(x)+4, \forall x\in\mathbb{R}$.

Bài toán 1.81. *Hãy xác định tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

(1) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{3}}+2017,\ \forall x\in[0;3)$.
(2) $f(x+3)=4f(x)-6, \forall x\in\mathbb{R}$.

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn đề bài, khi đó ta có (1) và (2). Với mọi $x\in\mathbb{R}$, đặt $f(x)=2+g(x)$. Thay vào (2) ta được

$$g(x+3)=4g(x), \forall x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Với mọi $x\in\mathbb{R}$, đặt $g(x)=\sqrt[3]{4}^{x}\phi(x)$, thay vào (3) ta được

$$\phi(x+3)=\phi(x), \forall x\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Từ (4) và bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được

$$\phi(x)=\phi(x+3n), \forall x\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{Z}. \tag{5}$$

Kí hiệu $[a]$, $\{a\}$ chỉ phần nguyên, phần thập phân của số thực a. Với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có $\dfrac{x}{3}=\left[\dfrac{x}{3}\right]+\left\{\dfrac{x}{3}\right\}\Leftrightarrow x=3\left[\dfrac{x}{3}\right]+3\left\{\dfrac{x}{3}\right\}$. Từ đây và do (5) suy ra $\phi(x)=\phi\left(3\left\{\dfrac{x}{3}\right\}\right), \forall x\in\mathbb{R}$. Ta có

$$f(x)=2+g(x)=2+4^{\frac{x}{3}}\phi(x), \forall x\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Từ (6) ta có $\phi(x)=[f(x)-2]4^{-\frac{x}{3}}, \forall x\in\mathbb{R}$. Do đó với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì:

$$\phi(x)=\phi\left(3\left\{\frac{x}{3}\right\}\right)=\left[f\left(3\left\{\frac{x}{3}\right\}\right)-2\right]4^{-\left\{\frac{x}{3}\right\}}=\left(\sqrt{\left\{\frac{x}{3}\right\}}+2015\right)4^{-\left\{\frac{x}{3}\right\}}.$$

Như vậy:

$$f(x)=2+4^{\frac{x}{3}}\phi(x)=2+4^{\frac{x}{3}}\left(\sqrt{\left\{\frac{x}{3}\right\}}+2015\right)4^{-\left\{\frac{x}{3}\right\}}$$
$$=2+4^{\frac{x}{3}-\left\{\frac{x}{3}\right\}}\left(\sqrt{\left\{\frac{x}{3}\right\}}+2015\right)=2+4^{\left[\frac{x}{3}\right]}\left(\sqrt{\left\{\frac{x}{3}\right\}}+2015\right), \forall x\in\mathbb{R}.$$

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x)=2+\left[\sqrt{\left\{\frac{x}{3}\right\}}+2015\right]4^{\left[\frac{x}{3}\right]},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

1.3.6 Phương trình hàm $f(ax)=\alpha f(x)+b$ với $a\neq\pm1$

Bài toán 1.82. *Tìm tất cả các hàm số $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$ sao cho*

$$f(2017x)=f(x)-4, \forall x\in(0;+\infty). \tag{1}$$

Hướng dẫn. Giả sử f là hàm số thỏa mãn đề bài, khi đó ta có (1). Đặt

$$f(x)=g(x)+\log_{\frac{1}{\sqrt[4]{2017}}}x, \forall x>0.$$

Thay vào (1) ta được

$$g(2017x)+\log_{\frac{1}{\sqrt[4]{2017}}}(2017x)=g(x)+\log_{\frac{1}{\sqrt[4]{2017}}}x-4, \forall x\in(0;+\infty)$$
$$\Leftrightarrow g(2017x)=g(x), \forall x\in(0;+\infty). \tag{2}$$

Tiếp theo là tương tự như đã làm ở bài toán 1.44.

Lưu ý. Phép đặt $f(x)=g(x)+\log_{\frac{1}{\sqrt[4]{2017}}}x$ được tìm ra như sau: từ (1) ta tưởng tượng rằng

$$f(2017x)=f(2017)+f(x), \forall x>0.$$

Đẳng thức trên (biến tích thành tổng) khiến ta liên tưởng đến hàm số lôgarit, do đó dự đoán $f(x)=\log_a x, \forall x>0$, và $f(2017)=-4$. Suy ra

$$\log_a 2017=-4\Rightarrow\log_a 2017=\log_a a^{-4}\Rightarrow 2017=a^{-4}\Rightarrow a=\frac{1}{\sqrt[4]{2017}}.$$

Vậy ta đặt $f(x)=g(x)+\log_{\frac{1}{\sqrt[4]{2017}}}x, \forall x>0$.

Nhận xét 7. *Tương tự ta giải được phương trình hàm sau*

$$\boxed{f(ax)=f(x)+b, \forall x>0}$$ *(a và b là các hằng số dương).*

Bài toán 1.83. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(3x)+16x^2+6x=f(x),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Hướng dẫn. Giả sử $f(x)=g(x)+ax^2+bx+c,\forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&g(3x)+9ax^2+3bx+c+16x^2+6x=g(x)+ax^2+bx+c,\forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&g(3x)+(8a+16)x^2+(2b+6)x=g(x),\forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Ta chọn a và b sao cho $\begin{cases}8a+16=0\\2b+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=-3.\end{cases}$ Với a,b như trên ta có

$$g(3x)=g(x),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Sau đó ta làm tương tự như bài toán 1.44 ở trang 26.

1.3.7 Phương trình hàm $f(ax+b)=\alpha f(x)+c$, với $a\neq\pm1$ và $\alpha\pm1$

Bài toán 1.84. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(3x)=5f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Từ (1) lấy $x=0$ ta được $f(0)=0$.

• Xét $x>0$. Đặt $x=3^t$ (hay $t=\log_3 x$), thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&f\left(3^{t+1}\right)=5f(3^t),\ \forall t\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&g(t+1)=5g(t),\ \forall t\in\mathbb{R}\ \left(\text{với } g(t)=f(3^t),\ \forall t\in\mathbb{R}\right).\end{aligned} \tag{2}$$

Đặt $g(t)=5^t h(t),\ \forall t\in\mathbb{R}$, thay vào (2) ta được $h(t+1)=h(t),\ \forall t\in\mathbb{R}$. Theo bài toán 1.33 ở trang 21 ta được $h(t)=k(\{t\}),\forall t\in\mathbb{R}$, trong đó k là hàm số tùy ý, xác định trên nửa khoảng $[0;1)$. Vậy

$$f(x)=g(\log_3 x)=5^{\log_3 x}h(\log_3 x)=5^{\log_3 x}k(\{\log_3 x\}).$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

• Xét $x<0$. Đặt $-x=3^t$ (hay $t=\log_3(-x)$), thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&f\left(-3^{t+1}\right)=5f\left(-3^t\right),\ \forall t\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&g_1(t+1)=5g_1(t),\ \forall t\in\mathbb{R}\ \left(\text{với } g_1(t)=f(-3^t),\ \forall t\in\mathbb{R}\right).\end{aligned} \tag{2}$$

Đặt $g_1(t)=5^t h_1(t),\ \forall t\in\mathbb{R}$, thay vào (2) ta được $h_1(t+1)=h_1(t),\ \forall t\in\mathbb{R}$. Theo bài toán 1.33 ở trang 21 ta được $h_1(t)=k_1(\{t\}),\forall t\in\mathbb{R}$, trong đó k_1 là hàm số tùy ý, xác định trên nửa khoảng $[0;1)$. Vậy

$$f(x)=g_1(\log_3(-x))=5^{\log_3(-x)}h(\log_3(-x))=5^{\log_3(-x)}k_1(\{\log_3(-x)\}).$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài đều có dạng

$$f(x)=\begin{cases}5^{\log_3 x}k(\{\log_3 x\}) & \text{khi } x>0\\ 0 & \text{khi } x=0\\ 5^{\log_3(-x)}k_1(\{\log_3(-x)\}) & \text{khi } x<0,\end{cases}$$

trong đó k,k_1 là những hàm số xác định trên $[0;1)$, tùy ý.

Bài toán 1.85. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho*

$$f(2x+3)=5f(x)-9,\forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Đặt $f(x)=\dfrac{9}{4}+g(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&\frac{9}{4}+g(2x+3)=5\left(\frac{9}{4}+g(x)\right)-9,\forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&g(2x+3)=5g(x),\forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{2}$$

Đặt $x=-3+t$, thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned}&g(-3+2t)=5g(-3+t),\forall t\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&h(2t)=5h(t),\forall t\in\mathbb{R}\ (\text{với } h(t)=g(-3+t),\forall t\in\mathbb{R}).\end{aligned} \tag{3}$$

• Khi $t=0$. Từ (3), ta có $h(0)=0$.

• Khi $t\neq0$, đặt $h(t)=|t|^{\log_2 5}\phi(t),\forall t\neq0$. Thay vào (3), ta được

$$\begin{aligned}&|2t|^{\log_2 5}\phi(2t)=5|t|^{\log_2 5}\phi(t),\forall t\neq0\\ &\phi(2t)=\phi(t),\forall t\neq0.\end{aligned} \tag{4}$$

Tương tự bài toán 1.44 ở trang 26 ta được $\phi(t)=\begin{cases}\psi(\log_2 t) & \text{khi } t>0\\ \varphi(\log_2(-t)) & \text{khi } t<0\end{cases}$ trong đó ψ,φ là những hàm số tuần hoàn chu kỳ 1 trên $\mathbb{R}$. Tóm lại:

∘ Nếu $x=-3$ thì $f(-3)=\dfrac{9}{4}+g(-3)=\dfrac{9}{4}+h(0)=\dfrac{9}{4}$.

∘ Nếu $x>-3$ thì

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{9}{4}+g(x)=\frac{9}{4}+h(x+3)=\frac{9}{4}+|x+3|^{\log_2 5}\phi(x+3)\\ &=\frac{9}{4}+(x+3)^{\log_2 5}\psi(\log_2(x+3)).\end{aligned}$$

∘ Nếu $x<-3$ thì

$$f(x)=\frac{9}{4}+|x+3|^{\log_2 5}\phi(x+3)=\frac{9}{4}+(-x-3)^{\log_2 5}\varphi(\log_2(-x-3)).$$

Tất cả các hàm số thỏa mãn đề bài đều có dạng:

$$f(x)=\begin{cases} 2,25+(x+3)^{\log_2 5}\,\psi\left(\log_2(x+3)\right) & \text{khi } x>-3\\ 2,25 & \text{khi } x=-3\\ 2,25+(-x-3)^{\log_2 5}\,\varphi\left(\log_2(-x-3)\right) & \text{khi } x<-3\end{cases}$$

(với φ và ϕ là hai hàm số đã nói ở trên).

Chú ý 11. *Phép đặt $x=-3+t$ được tìm ra như sau: Ta tìm điểm bất động bên trong từ phương trình sau: $2x+3=x\Leftrightarrow x=-3$. Để đưa điểm bất động bên trong $x=-3$ về điểm bất động $t=0$, ta cần đặt $x=-3+t$ hay $x+3=t$. Từ (3), ta tưởng tượng rằng: $h(2t)=h(t)h(2),\forall t\in\mathbb{R}$ (với $h(2)=5$). Suy ra $h(t)=t^{\alpha}$. Từ $h(2t)=5h(t),\forall t\in\mathbb{R}$, ta có*

$$(2t)^{\alpha}=5t^{\alpha}\Leftrightarrow 2^{\alpha}=5\Leftrightarrow\alpha=\log_2 5.$$

Vậy ta đặt $h(t)=|t|^{\log_2 5}\phi(t),\forall t\neq 0$.

Nhận xét 8. *Tương tự ta giải được phương trình hàm sau*

$$\boxed{f(ax+b)=\alpha f(x)+c,\forall x\in\mathbb{R}\text{ với }a\neq\pm 1\text{ và }\alpha\pm 1}$$

Bài toán 1.86. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho*

$$f(-5x+4)=3f(x)-8,\forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Hướng dẫn. Đặt $f(x)=4+g(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (1):

$$\begin{aligned}&4+g(-5x+4)=3\left[4+g(x)\right]-8,\forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&g(-5x+4)=3g(x),\forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{2}$$

Đặt $x=\dfrac{2}{3}+t$, thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned}&g(-5t+\tfrac{2}{3})=3g(t+\tfrac{2}{3}),\forall t\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&h(-5t)=3h(t),\forall t\in\mathbb{R}\ (\text{với } h(t)=g(t+\tfrac{2}{3}),\forall t\in\mathbb{R})\\ \Rightarrow&h(25t)=9h(t),\forall t\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Bài toán 1.87 (Đề thi vô địch Brasil-1993). *Tìm một hàm số f xác định trên tập hợp các số thực không âm và thỏa mãn các điều kiện*

$$f(0)=0\text{ và }f(2x+1)=3f(x)+5,\forall x\geq 0. \tag{1}$$

Giải. Gọi f là hàm số thỏa mãn đề bài, khi đó ta có (1). Với mọi $x\geq 0$, đặt

$$f(x)=-\frac{5}{2}+g(x).$$

Khi đó $g(x)$ là hàm số xác định trên $[0;+\infty)$. Ta có

$$\begin{aligned}&-\frac{5}{2}+g(2x+1)=3[-\frac{5}{2}+g(x)]+5,\forall x\geq 0\\ \Leftrightarrow&g(2x+1)=3g(x),\forall x\in[0;+\infty).\end{aligned} \tag{2}$$

Đặt $x=-1+v$, khi đó $2x+1=-1+2v$. Thay vào (2) ta được

$$g(-1+2v)=3g(-1+v),\forall v\geq 1. \tag{3}$$

Đặt $g(-1+v)=h(v),\forall v\geq 1$. Khi đó h là hàm số xác định trên $[1;+\infty)$ và theo (3) ta có

$$h(2v)=3h(v),\forall v\geq 1. \tag{4}$$

Đặt $h(v)=v^{\log_2 3}\varphi(v),\forall v\geq 1$. Khi đó φ là hàm số xác định trên $[1;+\infty)$ và theo (4) ta có: $(2v)^{\log_2 3}\varphi(2v)=3v^{\log_2 3}\varphi(v),\forall v\geq 1$ hay

$$\varphi(2v)=\varphi(v),\forall v\geq 1. \tag{5}$$

Đặt $v=2^u$, thay vào (5) ta được: $\varphi(2^{u+1})=\varphi(2^u),\forall u\geq 0$. (6)

Đặt $\varphi(2^u)=\psi(u),\forall u\geq 0$. Khi đó ψ là hàm số xác định trên $[0;+\infty)$ và thay vào (6) ta được: $\psi(u+1)=\psi(u),\forall u\geq 0$. (7)

Vậy:

$$\begin{aligned}f(x)&=-\frac{5}{2}+g(x)=-\frac{5}{2}+g\left(-1+(x+1)\right)=-\frac{5}{2}+h(x+1)\\ &=-\frac{5}{2}+(x+1)^{\log_2 3}\varphi(x+1)=-\frac{5}{2}+(x+1)^{\log_2 3}\varphi\left(2^{\log_2(x+1)}\right)\\ &=-\frac{5}{2}+(x+1)^{\log_2 3}\psi(\log_2(x+1)),\forall x\in[0;+\infty),\end{aligned}$$

trong đó ψ là hàm số xác định trên $[0;+\infty)$ sao cho

$$\psi(0)=\frac{5}{2}\text{ và }\psi(x+1)=\psi(x),\forall x\in[0;+\infty).$$

Sau khi thử lại ta thấy rằng tất cả các hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x)=-\frac{5}{2}+(x+1)^{\log_2 3}\psi(\log_2(x+1)),\forall x\in[0;+\infty)$$

(trong đó ψ là hàm số như đã nói ở trên). Có thể chỉ ra cụ thể một hàm số thỏa mãn đề bài là (do ta lấy $\psi(x)=\dfrac{5}{2},\forall x\geq 0$) đó là

$$f(x)=-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}(x+1)^{\log_2 3},\forall x\in[0;+\infty).$$

Lưu ý. Trong lời giải trên, ta còn làm hơn cả mong đợi, không những ta tìm được một hàm số thỏa mãn đề bài mà còn tìm được tất cả các hàm số thỏa mãn đề bài.

1.4 Hàm số xác định bởi phép biến đổi phân tuyến tính

Khi gặp hàm phân tuyến tính $g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $c\neq 0$, $ad-bc\neq 0$, ta lưu ý kết quả sau:

Định lý 1. *Hàm số phân tuyến tính* $g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ *thỏa mãn điều kiện*

$$\begin{cases} g^n = I \\ g^m \neq I, \quad m=1,2,\ldots,n-1 \end{cases}$$

khi và chỉ khi $\begin{cases} a+d=2\cos\dfrac{k\pi}{n}, \quad k\in\{1,2,\ldots,n-1\}, \quad (n,k)=1 \\ ad-bc=1 \end{cases}$

1.4.1 Phương trình hàm dạng $f\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)=\alpha f(x)+\beta$

Trong mục này ta sẽ trình bày cách xây dựng đề toán và thuật giải các phương trình hàm dạng $f(g(x))=pf(x)+q$ thông qua "chuỗi" Ví dụ - Bài toán - Nhận xét.

Ví dụ 1. *Từ một phương trình bậc hai có nghiệm kép, chẳng hạn* $(x-1)^2=0$, *ta có* $x(x-2)=-1\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2-x}$. *Ta được bài toán sau đây.*

Bài toán 1.88. *Tìm tất cả các hàm số* f *xác định trên* $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ *sao cho*

$$f\left(\frac{1}{2-x}\right)=2f(x)-3, \forall x\neq 2. \tag{1}$$

Giải. Trong phương trình hàm (1) lấy $x=1$ ta được $f(1)=3$. Bây giờ ta xét $x\neq 1$ và $x\neq 2$. Đặt $f(x)=3+g(x), \forall x\neq 1$ và $x\neq 2$. Thay vào (1):

$$3+g\left(\frac{1}{2-x}\right)=2\left[3+g(x)\right]-3, \forall x\neq 1, x\neq 2$$

$$\Leftrightarrow g\left(\frac{1}{2-x}\right)=2g(x), \forall x\neq 2, x\neq 1. \tag{2}$$

Với mọi $x\neq 1$ và $x\neq 2$, ta đặt $\dfrac{1}{x-1}=t$. Khi đó $x=1+\dfrac{1}{t}$ và

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{1-\frac{1}{t}}=\frac{t}{t-1}=1+\frac{1}{t-1}.$$

Thay vào (2) ta được: $g\left(1+\dfrac{1}{t-1}\right)=2g\left(1+\dfrac{1}{t}\right), \forall t\neq 1, \forall t\neq 0.$ (3)

Đặt $g\left(1+\dfrac{1}{t}\right)=h(t), \forall t\neq 1, \forall t\neq 0$. Thay vào (3), ta được

$$h(t-1)=2h(t), \forall t\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}. \tag{4}$$

Đặt $h(t)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^t\phi(t), \forall t\neq 0, \forall t\neq 1$. Thay vào (4), ta được

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1}\phi(t-1)=2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^t\phi(t)\right], \forall t\neq 1, \forall t\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \phi(t-1)=\phi(t), \forall t\neq 1, t\neq 0.$$

Kết luận: $f(x)=\begin{cases} 3 & \text{khi } x=1 \\ 3+2^{\frac{1}{1-x}}\phi\left(\dfrac{1}{x-1}\right) & \text{khi } x\neq 1 \text{ và } x\neq 2, \end{cases}$ trong đó ϕ là hàm số tùy ý thỏa mãn $\phi(x-1)=\phi(x), \forall x\neq 1, x\neq 0$.

Lưu ý.

- Phép đặt $f(x)=3+g(x), \forall x\neq 2$ được tìm ra như sau: Hàm hằng $f(x)\equiv c$ thỏa mãn (1) khi $c=2c-3\Leftrightarrow c=3$. Vậy ta đặt $f(x)=3+g(x)$ để khử số -3 trong (1).
- Trên trục số ta đặc biệt quan tâm đến ba điểm đặc biệt, đó là $0, +\infty, -\infty$. Phép đặt $\dfrac{1}{x-1}=t, \forall x\neq 1, \forall x\neq 2$ được tìm ra như sau: Giải phương trình $\dfrac{1}{2-x}=x$ ta được nghiệm kép $x=1$, ta sẽ đẩy nghiệm kép $x=1$ ra ∞. Để đẩy nghiệm kép $x=1$ ra ∞ ta sẽ đặt $\dfrac{1}{x-1}=t$, vì khi $x\to 1$ thì $t\to\infty$. Chú ý rằng khi đã viết $x=\alpha+\dfrac{\beta}{?}$ thì cũng phải viết $\dfrac{1}{2-x}=\alpha+\dfrac{\beta}{??}$. Nếu viết như thế thì mới biết cả hai cùng tịnh tiến đi đâu. Lưu ý rằng các phân thức này có tử là hằng số giống nhau.
- Phép đặt $h(t)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^t\phi(t), \forall t\neq 1, \forall t\neq 0$ được tìm ra như sau: Từ (4) ta hình dung rằng $h(t-1)=h(t)h(-1)$, với $h(-1)=2$. Suy ra $h(t)=a^t$. Vậy từ $h(-1)=2$, ta có $a^{-1}=2\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$. Bởi vậy, từ (4) ta sẽ đặt

$$h(t)=\left(\frac{1}{2}\right)^t\phi(t), \forall t\neq 1, \forall t\neq 2.$$

- Hoàn toàn tương tự ta giải được phương trình hàm:

$$\boxed{f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)=\alpha f(x)+\beta}$$

trong đó phương trình $\dfrac{ax+b}{cx+d}=x$ có nghiệm kép.

Ví dụ 2. *Từ một phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt, chẳng hạn* $(x-1)(x-2)=0$ *có hai nghiệm phân biệt là* 1 *và* 2. *Ta có*

$$x^2-3x=-2\Leftrightarrow x^2-4x=-2-x\Leftrightarrow x=\frac{2+x}{4-x}.$$

Vậy ta có bài toán sau.

Bài toán 1.89. *Tìm tất cả các hàm số* f *xác định trên* $\mathbb{R}\setminus\{4\}$ *sao cho*

$$f\left(\frac{x+2}{4-x}\right)=3f(x)-8,\forall x\neq 4. \tag{1}$$

Giải. Nhận xét rằng

$$\frac{x+2}{4-x}=x\Leftrightarrow x+2=4x-x^2\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2.\end{array}\right.$$

Trong (1) lấy $x=1$ ta được $f(1)=3f(1)-8\Leftrightarrow 2f(1)=8\Leftrightarrow f(1)=4$. Tương tự ta được $f(2)=4$. Bây giờ ta xét $x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2,4\}$. Đặt

$$\frac{x-1}{x-2}=t\left(\Leftrightarrow x-1=xt-2t\Leftrightarrow x(t-1)=2t-1\Leftrightarrow x=\frac{2t-1}{t-1}\right).$$

Khi đó vì $x\notin\{1,2,4\}$. nên $t\notin\left\{0,\dfrac{3}{2},1\right\}$. Hơn nữa ta có

$$x=\frac{2t-1}{t-1}=2+\frac{1}{t-1},$$

$$\frac{x+2}{4-x}=\frac{\dfrac{2t-1}{t-1}+2}{4-\dfrac{2t-1}{t-1}}=\frac{4t-3}{2t-3}=2+\frac{3}{2t-3}=2+\frac{1}{\dfrac{2t}{3}-1}.$$

Đặt $f(x)=4+g(x),\forall x\neq 1,x\neq 2,x\neq 4$, thay vào (1) ta được

$$g\left(\frac{x+2}{4-x}\right)=3g(x),\forall x\neq 1,x\neq 2,x\neq 4.$$

Vậy: $g\left(2+\dfrac{1}{\dfrac{2t}{3}-1}\right)=3g\left(2+\dfrac{1}{t-1}\right),\forall t\neq 0,t\neq 1,t\neq\dfrac{3}{2}.$ (2)

Đặt $g\left(2+\dfrac{1}{t-1}\right)=h(t)$, thay vào (2) ta được:

$$h\left(\frac{2}{3}t\right)=3h(t),\forall t\notin\left\{0,1,\frac{3}{2}\right\}. \tag{3}$$

Đặt $h(t)=|t|^{\log_{\frac{2}{3}}3}\phi(t),\forall t\notin\left\{0,1,\dfrac{3}{2}\right\}$. Thay vào (3) ta được

$$\left|\frac{2}{3}t\right|^{\log_{\frac{2}{3}}3}\phi\left(\frac{2}{3}t\right)=3\,|t|^{\log_{\frac{2}{3}}3}\phi(t),\forall t\notin\left\{0,1,\frac{3}{2}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\phi\left(\frac{2}{3}t\right)=\phi(t),\forall t\notin\left\{0,1,\frac{3}{2}\right\}. \tag{4}$$

Vậy hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x)=\begin{cases}4 & \text{khi } x=1\\ 4 & \text{khi } x=2\\ 4+\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|^{\log_{\frac{2}{3}}3}\phi\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right) & \text{khi } x\notin\{1,2,4\},\end{cases}$$

trong đó ϕ là hàm số thỏa mãn điều kiện (4).

Lưu ý.

- Tại sao ta lại đặt $\dfrac{x-1}{x-2}=t$? Bởi vì khi có hai nghiệm phân biệt thì ta sẽ đẩy một nghiệm ra ∞ và đẩy một nghiệm về 0, nghiệm nào muốn đẩy ra ∞ thì ta viết xuống dưới mẫu. Do đó ta đặt $\dfrac{x-1}{x-2}=t$ (hoặc $\dfrac{x-2}{x-1}=t$). Chú ý rằng khi đó ta phải viết:

$$x=\alpha+\frac{\beta}{?}\ \text{ và }\ \frac{x+2}{4-x}=\alpha+\frac{\beta}{??}.$$

- Hoàn toàn tương tự ta giải được phương trình hàm:

$$\boxed{f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)=\alpha f(x)+\beta}$$

trong đó phương trình $\dfrac{ax+b}{cx+d}=x$ có hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ 3. *Từ một phương trình bậc hai vô nghiệm, chẳng hạn phương trình* $x^2+1=0$, *ta có* $x^2=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{x}$. *Vậy ta được bài toán sau.*

Bài toán 1.90. *Tìm tất cả các hàm số* $f(x)$ *sao cho:*

$$f(-\frac{1}{x})=2f(x)-5, \forall x\neq 0. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) thay x bởi $-\frac{1}{t}$ ta được: $f(t)=2f(-\frac{1}{t})-5, \forall t\neq 0$. Hay:

$$f(x)=2f(-\frac{1}{x})-5, \forall x\neq 0. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra với mọi $x\neq 0$ ta có

$$f(x)=2f(-\frac{1}{x})-5=2[2f(x)-5]-5=4f(x)-15 \Rightarrow f(x)=5.$$

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy $f(x)=5, \forall x\neq 0$ là hàm số cần tìm.

Bài toán 1.91. *Tìm tất cả các hàm số* $f(x)$ *sao cho*

$$f(-\frac{1}{x})+f(x)=2014, \forall x\neq 0. \quad (1)$$

Giải. Đặt $f(x)=1007+g(x), \forall x\neq 0$, thay vào (1) ta được

$$g(-\frac{1}{x})+g(x)=0, \forall x\neq 0$$

$$\Leftrightarrow g(x)=-g(-\frac{1}{x}), \forall x\neq 0 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow g(x)=\frac{1}{2}[g(x)-g(-\frac{1}{x})], \forall x\neq 0. \quad (3)$$

Xét hàm $g(x)=\frac{1}{2}[h(x)-h(-\frac{1}{x})], \forall x\neq 0$ (h là hàm số tùy ý trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$).(4)
Dễ thấy hàm số g xác định bởi (4) thỏa mãn (2). Ngược lại nếu hàm số g thỏa mãn (2) thì do (3) nên g có dạng (4). Bởi vậy

$$(2) \Leftrightarrow g(x)=\frac{1}{2}[h(x)-h(-\frac{1}{x})], \forall x\neq 0. \quad (5)$$

Từ (5) suy ra $f(x)=1007+\frac{1}{2}[h(x)-h(-\frac{1}{x})], \forall x\neq 0$ (trong đó h là hàm số xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tùy ý). Thử lại thấy thỏa mãn.

1.4.2 Phương trình hàm dạng $f(g(x))=g(f(x))$

Trong mục này ta xét phương trình hàm $f(g(x))=g(f(x))$, trong đó $f(x)$ là hàm số cần tìm, còn $g(x)$ là hàm số phân tuyến tính.

Bài toán 1.92. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ *thỏa mãn*

$$f\left(\frac{2x}{x+2}\right)=\frac{2f(x)}{f(x)+2}. \quad (1)$$

Hướng dẫn. Giả sử $f(x)$ là hàm số thỏa mãn đề bài. Đặt $t=\frac{1}{x}$, khi đó

$$x=0+\frac{1}{t};\ \frac{2x}{x+2}=\frac{\frac{2}{t}}{\frac{1}{t}+2}=\frac{2}{1+2t}=0+\frac{1}{\frac{1}{2}+t}.$$

Thay vào (1): $f\left(\frac{2}{1+2t}\right)=\frac{2f\left(\frac{1}{t}\right)}{f\left(\frac{1}{t}\right)+2} \Leftrightarrow \frac{1}{f\left(\frac{2}{1+2t}\right)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{f\left(\frac{1}{t}\right)}$. (2)

Đặt $\frac{1}{f\left(\frac{1}{t}\right)}=g(t)$, khi đó $g\left(t+\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{1+2t}{2}\right)=\frac{1}{f\left(\frac{2}{1+2t}\right)}$. Thay vào (2) ta được: $g\left(t+\frac{1}{2}\right)=g(t)+\frac{1}{2}$. (3)

Đặt $g(t)=t+h(t)$. Thay vào (3) ta được

$$t+\frac{1}{2}+h\left(t+\frac{1}{2}\right)=t+h(t)+\frac{1}{2} \Leftrightarrow h\left(t+\frac{1}{2}\right)=h(t).$$

Vậy $f(x)=\frac{1}{g\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{x}+h\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{x}{1+xh\left(\frac{1}{x}\right)}$, trong đó $h(x)$ là hàm số tuần hoàn chu kì $\frac{1}{2}$, bất kì. Thử lại thấy đúng, thật vậy

$$f\left(\frac{2x}{x+2}\right)=\frac{\frac{2x}{x+2}}{1+\frac{2x}{x+2}.h\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{2x}{x+2+2xh\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$\frac{2f(x)}{f(x)+2}=\frac{\dfrac{2x}{1+xh\left(\dfrac{1}{x}\right)}}{\dfrac{x}{1+xh\left(\dfrac{1}{x}\right)}+2}=\frac{2x}{x+2+2xh\left(\dfrac{1}{x}\right)}.$$

Tất cả các hàm số thỏa mãn đề bài là $f(x)=\dfrac{x}{1+xh\left(\dfrac{1}{x}\right)}$, trong đó $h(x)$ là hàm số tuần hoàn chu kì $\dfrac{1}{2}$, bất kì.

Lưu ý. Do phương trình $\dfrac{2x}{x+2}=x$ có nghiệm kép $x=0$ nên ta sẽ đẩy nghiệm kép $x=0$ này ra ∞ bằng cách đặt $t=\dfrac{1}{x}$.

Bài toán 1.93. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ *thỏa mãn*

$$f\left(\frac{-1}{x+2}\right)=\frac{-1}{f(x)+2},\forall x\neq -2. \tag{1}$$

Hướng dẫn. Giả sử $f(x)$ là hàm số thỏa mãn đề bài. Đặt $t=\dfrac{1}{x+1}$. Khi đó

$$x=-1+\frac{1}{t},\ \frac{-1}{x+2}=\frac{-1}{-1+\dfrac{1}{t}+2}=\frac{-t}{t+1}=-1+\frac{1}{t+1}.$$

Thay vào (1) ta được: $f\left(-1+\dfrac{1}{t+1}\right)=\dfrac{-1}{f\left(-1+\dfrac{1}{t}\right)+2},\forall t\notin\{0,-1\}$. (2)

Đặt $f\left(-1+\dfrac{1}{t}\right)+1=g(t)$. Thay vào (2) ta được:

$$\begin{aligned}&g(t+1)-1=\frac{-1}{g(t)+1},\forall t\notin\{0,-1\}\\ \Leftrightarrow\ &g(t+1)g(t)+g(t+1)-g(t)=0,\forall t\notin\{0,-1\}\\ \Leftrightarrow\ &g(t)-g(t+1)=g(t+1)g(t),\forall t\notin\{0,-1\}.\end{aligned} \tag{3}$$

Chia cả hai vế của (3) cho $g(t+1)g(t)$ ta được

$$\frac{1}{g(t+1)}-\frac{1}{g(t)}=1. \tag{4}$$

Đặt $\dfrac{1}{g(t)}=h(t)$, thay vào (4) ta được

$$h(t+1)-h(t)=1\Leftrightarrow h(t+1)=h(t)+1. \tag{5}$$

Đặt $h(t)=t+\varphi(t)$. Thay vào (6) ta được

$$t+1+\varphi(t+1)=t+\varphi(t)+1\Leftrightarrow\varphi(t+1)=\varphi(t). \tag{6}$$

Vậy: $f(x)=-1+g\left(\dfrac{1}{x+1}\right)=-1+\dfrac{1}{h\left(\dfrac{1}{x+1}\right)}$

$$=-1+\frac{1}{\dfrac{1}{x+1}+\varphi\left(\dfrac{1}{x+1}\right)}=-1+\frac{x+1}{1+(x+1)\varphi\left(\dfrac{1}{x+1}\right)}.$$

Thử lại thấy đúng, thật vậy, với φ là hàm số thỏa mãn (6) ta có:

$$f\left(\frac{-1}{x+2}\right)=-1+\frac{\dfrac{x+1}{x+2}}{1+\dfrac{x+1}{x+2}\varphi\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)}=-1+\frac{\dfrac{x+1}{x+2}}{1+\dfrac{x+1}{x+2}\varphi\left(\dfrac{1}{x+1}\right)}$$

$$=-1+\frac{x+1}{x+2+(x+1)\varphi\left(\dfrac{1}{x+1}\right)}=\frac{-1-(x+1)\varphi\left(\dfrac{1}{x+1}\right)}{x+2+(x+1)\varphi\left(\dfrac{1}{x+1}\right)} \tag{7}$$

và

$$\frac{-1}{f(x)+2}=\frac{-1}{-1+\dfrac{x+1}{1+(x+1)\varphi\left(\dfrac{1}{x+1}\right)}+2}=\frac{-1}{1+\dfrac{x+1}{1+(x+1)\varphi\left(\dfrac{1}{x+1}\right)}}$$

$$=\frac{-1-(x+1)\varphi\left(\dfrac{1}{x+1}\right)}{x+2+(x+1)\varphi\left(\dfrac{1}{x+1}\right)} \tag{8}$$

Từ (7) và (8) suy ra $f\left(\dfrac{-1}{x+2}\right)=\dfrac{-1}{f(x)+2}$. Vậy tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là: $f(x)=-1+\dfrac{x+1}{1+(x+1)\varphi\left(\dfrac{1}{x+1}\right)}$, trong đó φ là hàm số

thỏa mãn (6).

Lưu ý. Do phương trình $\dfrac{-1}{x+2} = x \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$ có nghiệm kép $x = -1$ nên ta sẽ đẩy nghiệm kép $x = -1$ này ra ∞ bằng cách đặt $t = \dfrac{1}{x+1}$.

Bài toán 1.94. *Tìm tất cả các hàm số xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, luôn nhận giá trị khác -1 và thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(\frac{4x-2}{x+1}\right) = \frac{4f(x)-2}{f(x)+1}, \forall x \neq -1. \tag{1}$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Trong (1) lấy $x = 1$ được

$$f(1) = \frac{4f(1)-2}{f(1)+1} \Leftrightarrow [f(1)]^2 - 3f(1) + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(1) = 2. \end{array}\right.$$

Tương tự ta được $\left[\begin{array}{l} f(2) = 1 \\ f(2) = 2. \end{array}\right.$ Tiếp theo ta xét $x \notin \{-1, 1, 2\}$. Đặt $t = \dfrac{x-1}{x-2}$. Khi đó

$$tx - 2t = x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{2t-1}{t-1} \Leftrightarrow x = 2 + \frac{1}{t-1}.$$

$$\frac{4x-2}{x+1} = \frac{\dfrac{8t-4}{t-1} - 2}{\dfrac{2t-1}{t-1} + 1} = \frac{6t-2}{3t-2} = 2 + \frac{2}{3t-2}.$$

Vậy $x = 2 + \dfrac{1}{t-1}$, $\dfrac{4x-2}{x+1} = 2 + \dfrac{2}{3t-2}, \forall t \notin \left\{0, 1, \dfrac{2}{3}\right\}$. Thay vào (1) được

$$f\left(2 + \frac{2}{3t-2}\right) = \frac{4f\left(2 + \dfrac{1}{t-1}\right) - 2}{f\left(2 + \dfrac{1}{t-1}\right) + 1}, \forall t \notin \left\{0, 1, \frac{2}{3}\right\}$$

$$\Leftrightarrow f\left(2 + \frac{1}{\dfrac{3}{2}t - 1}\right) = \frac{4f\left(2 + \dfrac{1}{t-1}\right) - 2}{f\left(2 + \dfrac{1}{t-1}\right) + 1}, \forall t \notin \left\{0, 1, \frac{2}{3}\right\}. \tag{2}$$

Đặt $f\left(2 + \dfrac{1}{t-1}\right) = g(t)$. Thay vào (2) ta được

$$g\left(\frac{3}{2}t\right) = \frac{4g(t)-2}{g(t)+1}, \forall t \notin \left\{0, 1, \frac{2}{3}\right\}. \tag{3}$$

Đặt $g(t) = h(t) + 1$, thay vào (3) ta được

$$h\left(\frac{3}{2}t\right) + 1 = \frac{4h(t)+2}{h(t)+2}, \forall t \notin \left\{0, 1, \frac{2}{3}\right\}.$$

$$\Leftrightarrow h\left(\frac{3}{2}t\right) h(t) + 2h\left(\frac{3}{2}t\right) + h(t) + 2 = 4h(t) + 2, \forall t \notin \left\{0, 1, \frac{2}{3}\right\}.$$

$$\Leftrightarrow h\left(\frac{3}{2}t\right) h(t) = -2h\left(\frac{3}{2}t\right) + 3h(t), \forall t \notin \left\{0, 1, \frac{2}{3}\right\}. \tag{4}$$

Chia cả hai vế của (4) cho $h\left(\dfrac{3}{2}t\right) h(t)$ ta được $1 = -\dfrac{2}{h(t)} + \dfrac{3}{h\left(\dfrac{3}{2}t\right)}$. (5)

Đặt $\dfrac{1}{h(t)} = k(t)$. Thay vào (5) ta được $k\left(\dfrac{3}{2}t\right) = \dfrac{2}{3}k(t) + \dfrac{1}{3}$. (6)

Đặt $k(t) = 1 + e(t)$. Thay vào (6) ta được

$$1 + e\left(\frac{3}{2}t\right) = \frac{2}{3}[1 + e(t)] + \frac{1}{3} \Leftrightarrow e\left(\frac{3}{2}t\right) = \frac{2}{3}e(t). \tag{7}$$

Đặt $e(t) = \dfrac{\phi(t)}{t}$. Thay vào (7) được $\dfrac{\phi\left(\dfrac{3}{2}t\right)}{\dfrac{3}{2}t} = \dfrac{2}{3}\dfrac{\phi(t)}{t} \Leftrightarrow \phi\left(\dfrac{3}{2}t\right) = \phi(t)$. Vậy

$$f(x) = g\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = h\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + 1 = \frac{1}{k\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)} + 1 = \frac{1}{1 + e\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)} + 1$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{x-2}{x-1}\phi\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)} + 1 = 1 + \frac{x-1}{x - 1 + (x-2)\phi\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)}.$$

Thử lại thấy thỏa mãn (với ϕ là hàm số thỏa mãn $\phi\left(\dfrac{3}{2}t\right) = \phi(t)$).

1.4.3 Một vài dạng khác

Bài toán 1.95. *Cho trước số thực a. Tìm tất cả các hàm số f xác định $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ và thỏa mãn điều kiện:*

$$f(x) + af\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = a + 2, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}. \tag{1}$$

Giải.

Trường hợp 1: $a \neq 1$. Giả sử f là hàm số thỏa mãn đề bài. Lấy x_1 là một giá trị tùy ý trong $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, ta xây dựng dãy số $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ như sau:

$$x_{n+1} = \frac{1}{1-x_n}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Ta có

$$x_2 = \frac{1}{1-x_1},\ x_3 = \frac{1}{1-x_2} = \frac{x_1-1}{x_1},\ x_4 = \frac{1}{1-x_3} = x_1.$$

Vậy dãy (x_n) là dãy số hoàn (cộng tính) chu kỳ 1. Trong (1) lần lượt thay x bởi x_1, x_2, x_3, ta được:

$$\begin{cases} f(x_1) + af(x_2) + f(x_3) = a+2 \\ f(x_2) + af(x_3) + f(x_1) = a+2 \\ f(x_3) + af(x_1) + f(x_2) = a+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_1) = 1 \\ f(x_2) = 1 \\ f(x_3) = 1. \end{cases}$$

Do x_1 lấy tùy ý trong $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ nên khi $a \neq 1$ thì có duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

Trường hợp 2: $a = 1$. Đặt $f(x) - 1 = g(x)$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow g(x) + g\left(\frac{1}{1-x}\right) + g\left(\frac{x-1}{x}\right) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{3}\left[g(x) - g\left(\frac{1}{1-x}\right) - g\left(\frac{x-1}{x}\right)\right], \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}. \quad (3)$$

Ta sẽ chứng minh (2) tương đương với

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{3}\left[h(x) - h\left(\frac{1}{1-x}\right) - h\left(\frac{x-1}{x}\right)\right], \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}. \\ h \text{ là hàm số xác định trên } \mathbb{R}\setminus\{0,1\}, \text{ tùy ý.} \end{cases} \quad (4)$$

Ta kiểm tra được mọi hàm g có dạng (4) đều thỏa mãn (2). Ngược lại nếu hàm g thỏa mãn (2) thì do có (3) nên suy ra hàm g có dạng (4). Vậy ta có kết luận như sau:

- Nếu $a \neq 1$ thì có duy nhất hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}.$$

- Nếu $a = 1$ thì tất cả các hàm số thỏa mãn đề bài đều có dạng

$$\begin{cases} f(x) = 1 + \frac{1}{3}\left[h(x) - h\left(\frac{1}{1-x}\right) - h\left(\frac{x-1}{x}\right)\right], \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}. \\ h \text{ là hàm số xác định trên } \mathbb{R}\setminus\{0,1\}, \text{ tùy ý.} \end{cases}$$

Bài toán 1.96 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2011). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}\setminus\{0,1\} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: Với mọi $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ ta có*

$$(x-1)f(x) - x(x-1)^2 f\left(\frac{1}{1-x}\right) + x^2 f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 2011\left(x^2 - x\right).$$

Giải. Với mọi $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ ta có:

$$(x-1)f(x) - x(x-1)^2 f\left(\frac{1}{1-x}\right) + x^2 f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 2011\left(x^2 - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}f(x) + (1-x)f\left(\frac{1}{1-x}\right) + \frac{x}{x-1}f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 2011$$

$$\Leftrightarrow g(x) + g\left(\frac{1}{1-x}\right) + g\left(\frac{x-1}{x}\right) = 2011, \text{ với } g(x) = \frac{1}{x}f(x)$$

$$\Leftrightarrow g(x) - \frac{2011}{3} + g\left(\frac{1}{1-x}\right) - \frac{2011}{3} + g\left(\frac{x-1}{x}\right) - \frac{2011}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow h(x) + h\left(\frac{1}{1-x}\right) + h\left(\frac{x-1}{x}\right) = 0, \text{ với } h(x) = g(x) - \frac{2011}{3} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow h(x) = \frac{1}{3}\left[2h(x) - h\left(\frac{1}{1-x}\right) - h\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]. \quad (2)$$

Ta sẽ chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow h(x) = \frac{1}{3}\left[2k(x) - k\left(\frac{1}{1-x}\right) - k\left(\frac{x-1}{x}\right)\right], \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}, \quad (3)$$

với k là hàm số xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, tùy ý. Dễ thấy nếu h được xác định bởi (3) thì thỏa mãn (1). Ngược lại, nếu h thỏa mãn (1) thì do (2) nên h có dạng (3). Tóm lại h được xác định bởi (3). Vậy

$$f(x) = x\left[h(x) + \frac{2011}{3}\right] = \frac{x}{3}\left[2k(x) - k\left(\frac{1}{1-x}\right) - k\left(\frac{x-1}{x}\right)\right] + \frac{2011x}{3}.$$

Kết luận: Tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài đều có dạng

$$f(x) = \frac{x}{3}\left[2k(x) - k\left(\frac{1}{1-x}\right) - k\left(\frac{x-1}{x}\right)\right] + \frac{2011x}{3}, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\},$$

với k là hàm số xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, tùy ý.

Bài toán 1.97. *Cho h là hàm số xác định trên D và thỏa mãn điều kiện*

$$h\Big(h(h(x))\Big) = x, \forall x \in D.$$

Tìm tất cả các hàm số f xác định trên D và thỏa mãn điều kiện

$$f(x)+f(h(x))+f\Big(h(h(x))\Big)=0, \forall x\in D \tag{1}$$

Hướng dẫn. Ta có

$$f(x)=\frac{1}{3}\Big[2f(x)-f\big(h(x)\big)-f\Big(h\big(h(x)\big)\Big)\Big], \forall x\in D. \tag{2}$$

Ta sẽ chứng minh (1) tương đương

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{3}\Big[2g(x)-g\big(h(x)\big)-g\Big(h\big(h(x)\big)\Big)\Big], \forall x\in D \\ g \text{ là hàm số xác định trên } D, \text{ tùy ý.} \end{cases} \tag{3}$$

Giả sử $f(x)$ có dạng (3). Khi đó

$$\begin{aligned} &f(x)+f\big(h(x)\big)+f\big(h\big(h(x)\big)\big)\\ =&\frac{1}{3}\Big[2g(x)-g\big(h(x)\big)-g\Big(h\big(h(x)\big)\Big)\Big]\\ +&\frac{1}{3}\Big[2g\big(h(x)\big)-g\Big(h\big(h(x)\big)\Big)-g(x)\Big]\\ +&\frac{1}{3}\Big[2g\Big(h\big(h(x)\big)\Big)-g(x)-g\big(h(x)\big)\Big]=0, \forall x\in D. \end{aligned}$$

Vậy $f(x)$ thỏa mãn (1). Ngược lại, giả sử $f(x)$ thỏa mãn (1), khi đó vì có (2) nên suy ra $f(x)$ có dạng (3). Vậy tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài đều có dạng (3).

1.5 Một số bài toán về hệ phương trình hàm

Trong bài này ta sẽ giải một số hệ phương trình hàm. Các kĩ thuật giải hệ phương trình thông thường như phương pháp thế, phương pháp cộng, trừ, phương pháp dùng định thức thường xuyên được sử dụng. Hi vọng rằng qua các bài toán này bạn đọc sẽ nắm được những kĩ thuật quan trọng nhất trong việc giải các hệ phương trình hàm.

Bài toán 1.98. *Tìm tất cả các hàm f và g thỏa mãn*

$$f(2x+1)+2g(2x+1)=2x, \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right)+g\left(\frac{x}{x-1}\right)=x, \forall x\neq 1. \tag{2}$$

Giải. Đặt $u=2x+1$, thay vào (1) ta được $f(u)+2g(u)=u-1, \forall u\in\mathbb{R}$.(3)
Trong (2) đặt $v=\dfrac{x}{x-1}$ ta được $f(v)+g(v)=\dfrac{v}{v-1}, \forall v\neq 1$, nghĩa là

$$f(u)+g(u)=\frac{u}{u-1}, \forall u\neq 1. \tag{4}$$

Lấy (3) trừ (4) theo vế ta được $g(u)=\dfrac{u^2-3u+1}{u-1}, \forall u\neq 1$. Từ đây thay vào (4) ta được $f(u)=\dfrac{-u^2+4u-1}{u-1}, \forall u\neq 1$. Sau khi thử lại ta kết luận:

$$g(x)=\frac{x^2-3x+1}{x-1}, \forall x\neq 1 \text{ và } f(x)=\frac{-x^2+4x-1}{x-1}, \forall x\neq 1.$$

Bài toán 1.99. *Tìm $f(x), g(x)$ nếu biết, với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có*

$$\begin{cases} f(x+6)+2g(2x+15)=\dfrac{x+2}{2} & (1) \\ f\left(\dfrac{x+2}{2}\right)+g(x+5)=x+4. & (2) \end{cases}$$

Giải. Trong phương trình (2) thay x bởi $2x+10$ ta được

$$f(x+6)+g(2x+15)=2x+14.$$

Kết hợp với phương trình (1) của hệ ta được

$$g(2x+15)=\frac{-3x-26}{2},\ f(x+6)=\frac{7x+54}{2}.$$

Suy ra $f(x)=\dfrac{7x+12}{2}$, $g(x)=\dfrac{-3x-7}{4}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Lưu ý. Phép thay x bởi $2x+10$ được tìm ra từ các phép biến đổi:

$$x+6=\frac{x+2}{2}\Leftrightarrow 2x+12=x+2\Leftrightarrow x=2x+10$$
$$2x+15=x+5\Leftrightarrow x=2x+10.$$

Bài toán 1.100 (Đề thi Olympic 30/04/2013, Toán 11). *Tìm các hàm số $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, thỏa mãn* $\begin{cases} f(x-1)+g(2x+1)=2x, \forall x\in\mathbb{R} & (1) \\ f(2x+2)+2g(4x+7)=x-1, \forall x\in\mathbb{R}. & (2) \end{cases}$

Giải. Trong (1), thay x bởi $(x+1)$, ta được

$$\begin{aligned} &f(x)+g(2x+3)=2x+2, \forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow &f(2x+2)+g(4x+7)=4x+6, \forall x\in\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3}$$

Từ (2) và (3), suy ra $f(2x+2)=7x+13, \forall x\in\mathbb{R}$. Từ đây, thay x bởi $\dfrac{t-2}{2}$, ta được $f(t)=\dfrac{7t-14}{2}+13=\dfrac{7t+12}{2}$. Như vậy

$$\frac{7x+12}{2}+g(2x+3)=2x+2, \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow g(2x+3)=\frac{-3x-8}{2},\forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow g(x)=\frac{-3\dfrac{x-3}{2}-8}{2},\forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow g(x)=\frac{-3x-7}{4},\forall x\in\mathbb{R}.$$

Thử lại thấy hai hàm số $f(x)=\dfrac{7x+12}{2},\forall x\in\mathbb{R}$ và $g(x)=\dfrac{-3x-7}{4},\forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 1.101. *Tìm tất cả các hàm f và g thỏa mãn đồng thời*

$$f(2x-1)+g(1-x)=x+1,\forall x\in\mathbb{R}. \quad (1)$$
$$f\left(\frac{x}{x+1}\right)+2g\left(\frac{1}{2x+2}\right)=3,\forall x\neq -1. \quad (2)$$

Hướng dẫn. Đặt

$$2x-1=\frac{u}{u+1}\Leftrightarrow x=\frac{2u+1}{2u+2}\Leftrightarrow 1-x=1-\frac{2u+1}{2u+2}=\frac{1}{2u+2}$$

Thay vào (1) ta được $f\left(\dfrac{u}{u+1}\right)+g\left(\dfrac{1}{2u+2}\right)=\dfrac{4u+3}{2u+2}$. Thay u bởi x được

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right)+g\left(\frac{1}{2x+2}\right)=\frac{4x+3}{2x+2} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta có $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=\dfrac{x}{x+1}\Rightarrow f(x)=x,\forall x\neq 1$ (có được điều này là do hàm số $\varphi(x)=\dfrac{x}{x+1},\ \forall x\neq -1$ có tập giá trị là $\mathbb{R}\setminus\{1\}$). Thay vào (2) ta được

$$g\left(\frac{1}{2x+2}\right)=\frac{1}{2}\left(3-\frac{x}{x+1}\right)=\frac{2x+3}{2x+2}=1+\frac{1}{2x+2}. \quad (4)$$

Từ (4) suy ra $g(x)=x+1,\forall x\neq 1$. Từ (1) lấy $x=1$ ta được

$$f(1)+g(0)=2\Rightarrow f(1)=2-g(0)=2-1=1.$$

Từ (1) lấy $x=0$ ta được

$$f(-1)+g(1)=1\Rightarrow g(1)=1-f(-1)=1-(-1)=2.$$

Vậy $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $g(x)=x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 1.102. *Tìm $f(x)$, $g(x)$ nếu biết, với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có*

$$\begin{cases} f(3x-1)+g(6x-1)=3x \\ f(x+1)+xg(2x+3)=2x^2+x. \end{cases}$$

Giải. Đặt $3x-1=t$, thay vào phương trình thứ nhất ta được

$$f(t)+g(2t+1)=t+1,\forall t\in\mathbb{R}. \quad (*)$$

Đặt $x+1=t$, thay vào phương trình thứ hai ta được

$$f(t)+(t-1)g(2t+1)=2t^2-3t+1,\forall t\in\mathbb{R}. \quad (**)$$

Lấy (**) trừ (*) ta được

$$(t-2)g(2t+1)=2t^2-4t=2t(t-2)\Rightarrow g(2t+1)=2t,\forall t\neq 2.$$

Bởi vậy $g(x)=x-1,\forall x\neq 5$. Kết hợp với (*) suy ra

$$f(x)+2x=x+1\Rightarrow f(x)=1-x,\forall x\neq 5.$$

Tiếp theo ta tính $f(5)$ và $g(5)$. Từ (*) lấy $t=2$ ta được $f(2)+g(5)=3$, suy ra $g(5)=4$ (do $f(2)=-1$). Từ (*) lấy $t=5$ ta được:

$$f(5)+g(11)=6\Rightarrow f(5)=6-10=-4.$$

Như vậy $f(x)=1-x$ và $g(x)=x-1$ với mọi x. Đảo lại, dễ thấy hai hàm này thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài toán 1.103. *Tìm $f(x)$, $g(x)$ nếu biết*

$$\begin{cases} f(x+1)+xg(x+1)=2x \\ f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)+g\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=x-1. \end{cases}$$

Đáp số. $f(x)\equiv -2; g(x)=\dfrac{2x}{x-1},\forall x\neq 1$.

Bài toán 1.104. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(2009-x)+af(x)=b,\forall x\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

(với a,b là hai số thực cho trước).

Hướng dẫn. Tương tự bài toán 1.55 ở trang 33.

1.6 Phương trình hàm sai phân bậc một

Việc tìm số hạng tổng quát của dãy truy hồi tuyến tính đã được giải quyết trong nhiều tài liệu viết về dãy số. Trong bài này ta sẽ sử dụng những công cụ có sẵn trong dãy số để áp dụng vào giải một số dạng phương trình hàm. *Xét bài toán dãy số: Tìm dãy số (x_n) biết: $x_1 = \alpha$ và*

$$\boxed{ax_{n+1} + bx_n = P_k(n).\gamma^n, \forall n = 1, 2, \ldots}$$

trong đó α, a, b, γ là các hằng số cho trước, $a \neq 0, b \neq 0, \gamma \neq 0, P_k(n)$ là đa thức bậc k theo n.

Cách giải. Giải phương trình đặc trưng $a\lambda + b = 0$ tìm được λ. Ta có

$$x_n = \overline{x_n} + x_n^*.$$

Trong đó $\overline{x_n} = c\lambda^n, \forall n = 1, 2, \ldots$ (c là hằng số sẽ tìm sau). Còn x_n^* là một nghiệm riêng bất kì của $ax_{n+1} + bx_n = P_k(n).\gamma^n, \forall n = 1, 2, \ldots$ và được xác định như sau:

- Nếu $\lambda \neq \gamma$ thì $x_n^* = Q_k(n).\gamma^n$, với $Q_k(n)$ là đa thức bậc k theo n.
- Nếu $\lambda = \gamma$ thì $x_n^* = nQ_k(n).\gamma^n$, với $Q_k(n)$ là đa thức bậc k theo n.

Thay x_n^* vào $ax_{n+1} + bx_n = P_k(n).\gamma^n$, rồi đồng nhất hệ số ta tìm được x_n^*.

Bài toán 1.105. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+1) - f(x) = 2015.3^{-x}, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Đặt $f(x) = -\frac{2015}{2}.3^{1-x} + g(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào (1) ta được

$$g(x+1) = g(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ (2) sử dụng kết quả bài toán 1.33 ở trang 21 ta được

$$g(x) = h(\{x\}), \forall x \in \mathbb{R},$$

trong đó h là hàm số tùy ý, xác định trên nửa khoảng $[0; 1)$. Vậy tất cả các hàm số cần tìm đều có dạng

$$f(x) = -\frac{2015}{2}.3^{1-x} + h(\{x\}), \ \forall x \in \mathbb{R},$$

trong đó h là hàm số tùy ý, xác định trên nửa khoảng $[0; 1)$.

Lưu ý. Phép đặt $f(x) = -\frac{2015}{2}.3^{1-x} + g(x)$ được tìm như sau: Dễ thấy rằng một nghiệm riêng của (1) có dạng $f_0(x) = \alpha\left(\frac{1}{3}\right)^x$. Thay vào (1) được:

$$\alpha\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - \alpha\left(\frac{1}{3}\right)^x = 2015.3^{-x} \Rightarrow -\frac{2}{3}\alpha\left(\frac{1}{3}\right)^x = 2015\left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{2015.3}{2} \Rightarrow f_0(x) = -\frac{2015}{2}.3^{1-x}.$$

Vậy ta có phép đặt nói trên.

Bài toán 1.106. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+1) - f(x) = (x+1)5^{-x}, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Đặt $f(x) = -\left(\frac{x}{4} + \frac{5}{16}\right)5^{1-x} + g(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào (1) ta được

$$g(x+1) = g(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ (2) sử dụng kết quả bài toán 1.33 ở trang 21 ta được

$$g(x) = h(\{x\}), \forall x \in \mathbb{R},$$

trong đó h là hàm số tùy ý, xác định trên nửa khoảng $[0; 1)$. Vậy tất cả các hàm số cần tìm đều có dạng: $f(x) = -\left(\frac{x}{4} + \frac{5}{16}\right)5^{1-x} + h(\{x\}), \ \forall x \in \mathbb{R}$, trong đó h là hàm số tùy ý, xác định trên nửa khoảng $[0; 1)$.

Lưu ý. Phép đặt $f(x) = -\left(\frac{x}{4} + \frac{5}{16}\right)5^{1-x} + g(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$ được tìm như sau: Dễ thấy một nghiệm riêng của (1) có dạng $f_0(x) = (ax + b)\left(\frac{1}{5}\right)^x$. Thay vào (1) và đồng nhất hệ số được $(a; b) = \left(-\frac{5}{4}; -\frac{25}{16}\right)$. Vậy ta có phép đặt nói trên.

Chú ý 12. *Ta có thể đưa một phương trình hàm sai phân cấp k về phương trình hàm sai phân cấp 1. Chẳng hạn, xét phương trình hàm sai phân cấp 1 không thuần nhất trong bài toán 1.106 ở trang 71:*

$$f(x+1) - f(x) = (x+1)5^{-x}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta được bài toán sau.

Bài toán 1.107. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:*

$$f(x+3) - f(x) = \frac{x+3}{3\sqrt[3]{5^x}}, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Hướng dẫn. Trong (1) thay x bởi $3x$ và đặt $f(3x) = g(x)$ ta được

$$g(x+1) - g(x) = (x+1)5^{-x}, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ (2) sử dụng bài toán 1.106 ở trang 71 ta được kết quả.

Bài toán 1.108. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+1)-3f(x)=2.3^x,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Hướng dẫn. Đặt $f(x)=(2x-3)\,3^{x-1}+g(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (1) ta được

$$g(x+1)=3g(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Đặt $g(x)=3^x h(x)$. Khi đó $h(x+1)=h(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Bài toán 1.109. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+2016)-3f(x)=\frac{(x+2016)2^{\frac{x-10080}{2016}}}{63},\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Trong (1) thay x bởi $2016x$, ta được

$$f(2016x+2016)-3f(2016x)=(x+1)\,2^x,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Đặt $f(2016x)=g(x)$, thay vào (2) ta được

$$g(x+1)-3g(x)=(x+1)\,2^x,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Đặt $g(x)=-(x+3)\,2^x+h(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$, thay vào (3) ta được

$$h(x+1)=3h(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Đặt $h(x)=3^x\varphi(x)$, thay vào (4) ta được $\varphi(x+1)=\varphi(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. (5)
Từ (5) sử dụng kết quả bài toán 1.33 ở trang 21 ta được

$$\varphi(x)=k\left(\{x\}\right),\forall x\in\mathbb{R},$$

trong đó k là hàm số tùy ý, xác định trên nửa khoảng $[0;1)$. Vậy tất cả các hàm số cần tìm đều có dạng

$$f(x)=-\left(\frac{x}{2016}+3\right)2^{\frac{x}{2016}}+3^{\frac{x}{2016}}.k\left(\left\{\frac{x}{2016}\right\}\right),\ \forall x\in\mathbb{R},$$

trong đó k là hàm số tùy ý, xác định trên nửa khoảng $[0;1)$.

Xét bài toán dãy số: Tìm dãy số (x_n) biết: $x_1=\alpha$ và

$$\boxed{ax_{n+1}+bx_n=f_n,\forall n=1,2,\ldots}$$

trong đó $\alpha, a, b,$ là các hằng số cho trước,

$$a\neq 0, b\neq 0, f_n=u\sin nx+v\cos nx, u^2+v^2\neq 0, x\neq k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Cách giải. Giải phương trình đặc trưng $a\lambda+b=0$ tìm được λ. Ta có

$$x_n=\overline{x_n}+x_n^*.$$

Trong đó $\overline{x_n}=c\lambda^n,\forall n=1,2,\ldots$ (c là hằng số sẽ tìm sau). Còn x_n^* được xác định như sau: $x^*=A\sin nx+B\cos nx$.

Bài toán 1.110. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$2f(x+1)-f(x)=\sqrt{3}\cos\frac{\pi x}{3},\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Đặt $f(x)=\sin\frac{\pi x}{3}+g(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (1) ta được

$$g(x+1)=\frac{1}{2}g(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Đặt $g(x)=2^{-x}h(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (2) ta được $h(x+1)=h(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Từ đây sử dụng kết quả bài toán 1.33 ở trang 21 ta được

$$h(x)=k\left(\{x\}\right),\forall x\in\mathbb{R},$$

trong đó k là hàm số tùy ý, xác định trên nửa khoảng $[0;1)$. Vậy tất cả các hàm số cần tìm đều có dạng $f(x)=\sin\frac{\pi x}{3}+2^{-x}.k\left(\{x\}\right),\ \forall x\in\mathbb{R}$, trong đó k là hàm số tùy ý, xác định trên $[0;1)$.

Lưu ý. Phép đặt $f(x)=\sin\frac{\pi x}{3}+g(x)$ được tìm ra như sau: Dễ thấy một nghiệm riêng của (1) có dạng $f_0(x)=A\sin\frac{\pi x}{3}+B\cos\frac{\pi x}{3}$. Thay vào (1) ta được

$$2A\sin\frac{\pi(x+1)}{3}+2B\cos\frac{\pi(x+1)}{3}=A\sin\frac{\pi x}{3}+B\cos\frac{\pi x}{3}+\sqrt{3}\cos\frac{\pi x}{3}. \quad (*)$$

Do $\sin\frac{\pi(x+1)}{3}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi x}{3}, \cos\frac{\pi(x+1)}{3}=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi x}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi x}{3}$ nên từ (*), so sánh hệ số của $\sin\frac{\pi x}{3}$ và $\cos\frac{\pi x}{3}$ ở hai vế ta được

$$\begin{cases} A+\sqrt{3}B=A \\ \sqrt{3}A+B=B+\sqrt{3} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} A=1 \\ B=0 \end{cases}\Rightarrow f_0(x)=\sin\frac{\pi x}{3}.$$

Từ đây ta có phép đặt nói trên.

Bài toán 1.111. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$\sqrt{2}f(x+4)=f(x)-\sin\frac{\pi x}{16},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Xét bài toán dãy số sau: Tìm dãy số (x_n) biết: $x_1=\alpha$ và

$$\boxed{ax_{n+1}+bx_n=f_{1n}+f_{2n}+\cdots+f_{sn},\forall n=1,2,\ldots}$$

trong đó α, a, b là các hằng số cho trước.

Cách giải. Giải phương trình đặc trưng $a\lambda+b=0$ tìm được λ. Ta có

$$x_n=\overline{x_n}+x_{1n}^*+x_{2n}^*+\cdots+x_{sn}^*$$

Trong đó $\overline{x_n}=c\lambda^n,\forall n=1,2,\ldots$ (c là hằng số sẽ tìm sau), $x_{kn}^*\ (k=1,2,\ldots,s)$ là nghiệm riêng của $ax_{n+1}+bx_n=f_{kn}$.

Bài toán 1.112. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+1)-2f(x)=x^2+2^{x+1},\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Đặt $f(x)=x2^x-\left(x^2+2x+3\right)+g(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (1) ta được:

$$g(x+1)=2g(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Đặt $g(x)=2^x\varphi(x)$, thay vào (2) ta được: $\varphi(x+1)=\varphi(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. (3)
Từ (3) sử dụng bài toán 1.33 ở trang 21 ta được $\varphi(x)=k(\{x\}),\forall x\in\mathbb{R}$, trong đó k là hàm số tùy ý, xác định trên nửa khoảng $[0;1)$. Vậy tất cả các hàm số cần tìm đều có dạng

$$f(x)=x.2^x-\left(x^2+2x+3\right)+2^x.k(\{x\}),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Chú ý 13. *Phương trình sai phân tuyến tính có khá nhiều dạng, bằng phương pháp tương tự ta có thể giải được nhiều dạng phương trình hàm tương ứng. Bài 1.7 (Phương trình hàm sai phân bậc hai) sau đây sẽ tiếp tục phát triển phương pháp này.*

1.7 Phương trình hàm sai phân bậc hai

1.7.1 Phương trình hàm sai phân bậc hai với hàm tuần hoàn và phản tuần hoàn cộng tính

Trong mục này ta sẽ giải phương trình hàm

$$\boxed{f(x+2a)+\alpha f(x+a)+\beta f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R},}$$

trong đó a,α,β là các hằng số thực, $a\neq 0$ và $\beta\neq 0$. Phương trình hàm trên được gọi là phương trình hàm sai phân tuyến tính thuần nhất bậc hai.
Phương pháp giải. Xét phương trình đặc trưng $\lambda^2+\alpha\lambda+\beta=0$ và tính $\Delta=\alpha^2-4\beta$.

- Khi $\Delta>0$: tiến hành tương tự như bài toán 1.113 ở trang 75 và bài toán 1.114 ở trang 76.

- Khi $\Delta=0\Leftrightarrow\alpha^2-4\beta=0\Leftrightarrow\beta=\dfrac{\alpha^2}{4}$. Ta biến đổi

$$\begin{aligned}
&f(x+2a)+\alpha f(x+a)+\beta f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}\\
\Leftrightarrow&f(x+2a)+\alpha f(x+a)+\frac{\alpha^2}{4}f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}\\
\Leftrightarrow&f(x+2a)+\frac{\alpha}{2}f(x+a)=-\frac{\alpha}{2}\left[f(x+a)+\frac{\alpha}{2}f(x)\right],\forall x\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow&g(x+a)=-\frac{\alpha}{2}g(x),\forall x\in\mathbb{R},
\end{aligned}$$

trong đó $g(x)=f(x+a)+\dfrac{\alpha}{2}f(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

  - Nếu $-\dfrac{\alpha}{2}=1$ hay $\alpha=-2$ thì tiến hành tương tự như bài toán 1.115 ở trang 77.
  - Nếu $0<-\dfrac{\alpha}{2}\neq 1$ hay $-2\neq\alpha<0$ thì tiến hành tương tự như bài toán 1.116 ở trang 77.
  - Nếu $-\dfrac{\alpha}{2}<0$ hay $\alpha>0$ thì tiến hành tương tự như bài toán 1.117 ở trang 78.

- Khi $\Delta<0$, phương trình đặc trưng có nghiệm phức, ta tiến hành tương tự như bài toán 1.119 ở trang 82.

Chú ý 14. *Phương trình hàm*

$$f(x+2a)+\alpha f(x+a)+\beta f(x)=C,\forall x\in\mathbb{R},$$

trong đó a,α,β,C là các hằng số thực, $a\neq 0$ và $\beta\neq 0$ luôn đưa được về phương trình hàm sai phân tuyến tính thuần nhất bậc hai.

Bài toán 1.113. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+2)-8f(x+1)+15f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Phương trình đặc trưng $\lambda^2-8\lambda+15=0$ có hai nghiệm phân biệt $\lambda_1=3,\ \lambda_2=5$. Ta có

$$\begin{aligned}
(1)&\Leftrightarrow f(x+2)-(3+5)f(x+1)+3.5f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow f(x+2)-3f(x+1)=5\left[f(x+1)-3f(x)\right],\forall x\in\mathbb{R} &(2)\\
&\Leftrightarrow g_1(x+1)=5g_1(x),\forall x\in\mathbb{R},\text{với } g_1(x)=f(x+1)-3f(x),\forall x\in\mathbb{R}. &(3)
\end{aligned}$$

Đặt $g_1(x)=5^xh_1(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó hàm số h_1 xác định trên $\mathbb{R}$. Từ (3) được

$$\begin{aligned}
&5^{x+1}h_1(x+1)=5.5^xh_1(x),\forall x\in\mathbb{R}\\
\Leftrightarrow&h_1(x+1)=h_1(x),\forall x\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Vậy: $f(x+1)-3f(x)=5^xh_1(x),\forall x\in\mathbb{R}$. (4)
Từ (2), tiến hành tương tự ta được: $f(x+1)-5f(x)=3^xh_2(x),\forall x\in\mathbb{R}$. (5)
trong đó h_2 là hàm số tuần hoàn cộng tính chu kì 1 trên $\mathbb{R}$, tùy ý.
Trừ (4) và (5) theo vế ta được: $f(x)=\dfrac{1}{2}\left[5^xh_1(x)-3^xh_2(x)\right],\forall x\in\mathbb{R}$.
Sau khi thử lại ta kết luận: Tất cả các hàm số cần tìm đều có dạng:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[5^xh_1(x)-3^xh_2(x)\right],\forall x\in\mathbb{R},$$

trong đó h_1,h_2 là các hàm số tuần hoàn cộng tính chu kì 1 trên $\mathbb{R}$, tùy ý.

Bài toán 1.114. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+4)-4f(x+2)-21f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Phương trình đặc trưng $\lambda^2-4\lambda-21=0$ có hai nghiệm phân biệt là $\lambda_1=7$, $\lambda_2=-3$. Ta có

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow f(x+4)-(7-3)f(x+2)-3.7f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}\\&\Leftrightarrow f(x+4)+3f(x+2)=7\left[f(x+2)+3f(x)\right],\forall x\in\mathbb{R} \quad (2)\\&\Leftrightarrow g_1(x+2)=7g_1(x),\forall x\in\mathbb{R},\text{ với } g_1(x)=f(x+2)+3f(x),\forall x\in\mathbb{R}. \quad (3)\end{aligned}$$

Đặt $g_1(x)=(\sqrt{7})^x h_1(x)$. Khi đó hàm số h_1 xác định trên $\mathbb{R}$. Từ (3) ta được

$$(\sqrt{7})^{x+2}h_1(x+2)=7.(\sqrt{7})^x h_1(x),\forall x\in\mathbb{R}$$

hay $h_1(x+2)=h_1(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Vậy

$$f(x+2)+3f(x)=(\sqrt{7})^x h_1(x),\forall x\in\mathbb{R}. \quad (4)$$

Mặt khác (1) tương đương với

$$\begin{aligned}&f(x+4)-(7-3)f(x+2)-3.7f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}\\\Leftrightarrow&f(x+4)-7f(x+2)=-3\left[f(x+2)-7f(x)\right],\forall x\in\mathbb{R}\\\Leftrightarrow&g_2(x+2)=-3g_2(x),\forall x\in\mathbb{R},\text{ với } g_2(x)=f(x+2)-7f(x),\forall x\in\mathbb{R}. \quad (5)\end{aligned}$$

Đặt $g_2(x)=(\sqrt{3})^x h_2(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó h_2 là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$. Từ (5) ta được

$$\begin{aligned}&(\sqrt{3})^{x+2}h_2(x+2)=-3.(\sqrt{3})^x h_2(x),\forall x\in\mathbb{R}\\\Leftrightarrow&h_2(x+2)=-h_2(x),\forall x\in\mathbb{R}.\\\Leftrightarrow&h_2(x)=\frac{1}{2}\left[h_2(x)-h_2(x+2)\right],\forall x\in\mathbb{R}\\\Leftrightarrow&\begin{cases}h_2(x)=\dfrac{1}{2}\left[h_2(x)-h_2(x+2)\right],\forall x\in\mathbb{R}\\h_2(x)=h_2(x+4),\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}\\\Leftrightarrow&\begin{cases}h_2(x)=\dfrac{1}{2}\left[\varphi(x)-\varphi(x+2)\right],\forall x\in\mathbb{R}\\\varphi\text{ là hàm số tuần hoàn cộng tính chu kì 4 trên }\mathbb{R},\text{ tùy ý.}\end{cases}\end{aligned}$$

Vậy: $f(x+2)-7f(x)=\dfrac{\sqrt{3}^x}{2}\left[\varphi(x)-\varphi(x+2)\right],\forall x\in\mathbb{R}.$ (6)

Trừ (4) và (6) theo vế ta được:

$$f(x)=\frac{1}{10}\left[7^{\frac{x}{2}}h_1(x)-\frac{3^{\frac{x}{2}}}{2}\left(\varphi(x)-\varphi(x+2)\right)\right],\forall x\in\mathbb{R}.$$

Sau khi thử lại ta kết luận: Tất cả các hàm số cần tìm đều có dạng:

$$f(x)=\frac{1}{10}\left[7^{\frac{x}{2}}h_1(x)-\frac{3^{\frac{x}{2}}}{2}\left(\varphi(x)-\varphi(x+2)\right)\right],\forall x\in\mathbb{R},$$

trong đó h_1 là hàm số tuần hoàn cộng tính chu kì 2 trên $\mathbb{R}$, tùy ý còn φ là hàm số tuần hoàn cộng tính chu kì 4 trên $\mathbb{R}$, tùy ý.

Bài toán 1.115. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+6)-2f(x+3)+f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Phương trình đặc trưng $\lambda^2-2\lambda+1=0$ có nghiệm kép $\lambda=1$. Ta có

$$(1)\Leftrightarrow f(x+6)-f(x+3)=f(x+3)-f(x),\forall x\in\mathbb{R}. \quad (2)$$

Xét hàm số g như sau: $g(x)=f(x+3)-f(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó

$$(2)\Leftrightarrow g(x+3)=g(x),\forall x\in\mathbb{R}. \quad (3)$$

Vì $g(x)=\dfrac{(x+3)-x}{3}g(x)\overset{\text{do (3)}}{=}\dfrac{x+3}{3}g(x+3)-\dfrac{x}{3}g(x),\forall x\in\mathbb{R}$ nên

$$\begin{aligned}&f(x+3)-f(x)=\frac{x+3}{3}g(x+3)-\frac{x}{3}g(x),\forall x\in\mathbb{R}\\\Leftrightarrow&f(x+3)-\frac{x+3}{3}g(x+3)=f(x)-\frac{x}{3}g(x),\forall x\in\mathbb{R}\\\Leftrightarrow&h(x+3)=h(x),\forall x\in\mathbb{R},\text{ với } h(x)=f(x)-\frac{x}{3}g(x),\forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Vậy $f(x)=h(x)+\dfrac{x}{3}g(x),\forall x\in\mathbb{R}$, trong đó h,g là hàm số tuần hoàn cộng tính chu kì 3 trên $\mathbb{R}$, tùy ý. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 1.116. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+8)-6f(x+4)+9f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Phương trình đặc trưng $\lambda^2-6\lambda+9=0$ có nghiệm kép $\lambda=3$. Ta có

$$(1)\Leftrightarrow f(x+8)-3f(x+4)=3[f(x+4)-3f(x)],\forall x\in\mathbb{R}. \quad (2)$$

Xét hàm số g như sau: $g(x)=f(x+4)-3f(x),\forall x\in\mathbb{R}$. (3)

Khi đó: $(2)\Leftrightarrow g(x+4)=3g(x),\forall x\in\mathbb{R}$. (4)

Đặt $g(x)=3^{\frac{x}{4}}h(x)$. Khi đó h là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$. Từ (4) ta có

$$\begin{aligned}&3^{\frac{x+4}{4}}h(x+4)=3.3^{\frac{x}{4}}h(x),\forall x\in\mathbb{R}\\\Leftrightarrow&h(x+4)=h(x),\forall x\in\mathbb{R}. \quad (5)\end{aligned}$$

Từ (3) ta có

$$f(x+4)-3f(x)=3^{\frac{x}{4}}h(x),\forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow\frac{f(x+4)}{3^{\frac{x}{4}}}-\frac{3f(x)}{3^{\frac{x}{4}}}=h(x),\forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow\frac{f(x+4)}{3^{\frac{x+4}{4}}}-\frac{f(x)}{3^{\frac{x}{4}}}=\frac{h(x)}{3},\forall x\in\mathbb{R}. \quad (6)$$

Xét hàm số I như sau $I(x)=\dfrac{f(x)}{3^{\frac{x}{4}}},\forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (6) ta được

$$I(x+4)-I(x)=\frac{h(x)}{3},\forall x\in\mathbb{R}. \quad (7)$$

Vì $\dfrac{h(x)}{3}=\dfrac{(x+4)-x}{12}h(x)\overset{\text{do (5)}}{=}\dfrac{x+4}{12}h(x+4)-\dfrac{x}{12}h(x),\forall x\in\mathbb{R}$ nên từ (7) ta được:

$$I(x+4)-I(x)=\frac{x+4}{12}h(x+4)-\frac{x}{12}h(x),\forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow I(x+4)-\frac{x+4}{12}h(x+4)=I(x)-\frac{x}{12}h(x),\forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow k(x+4)=k(x),\forall x\in\mathbb{R},\text{ với } k(x)=I(x)-\frac{x}{12}h(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Vậy: $I(x)=k(x)+\dfrac{xh(x)}{12},\forall x\in\mathbb{R}$. Hay:

$$f(x)=3^{\frac{x}{4}}\left[k(x)+\frac{xh(x)}{12}\right],\forall x\in\mathbb{R}.$$

Thử lại ta kết luận: Tất cả các hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là:

$$f(x)=3^{\frac{x}{4}}\left[k(x)+\frac{xh(x)}{12}\right],\forall x\in\mathbb{R},$$

trong đó h,k là các hàm số tuần hoàn cộng tính chu kì 4 trên $\mathbb{R}$, tùy ý.

Bài toán 1.117. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$4f(x+5)+20f(x+1)+25f(x-3)=2010,\forall x\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Đặt $f(x-3)=\dfrac{2010}{49}+g(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó g là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$. Thay vào (1) ta được: $4g(x+8)+20g(x+4)+25g(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$. Hay:

$$g(x+8)+5g(x+4)+\frac{25}{4}g(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}. \quad (2)$$

Phương trình đặc trưng $\lambda^2+5\lambda+\dfrac{25}{4}=0$ có nghiệm kép $\lambda=-\dfrac{5}{2}$. Ta có:

$$(2)\Leftrightarrow g(x+8)+\frac{5}{2}g(x+4)=-\frac{5}{2}\left[g(x+4)+\frac{5}{2}g(x)\right]=0,\forall x\in\mathbb{R}. \quad (3)$$

Đặt $g(x+4)+\dfrac{5}{2}g(x)=h(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó h là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Từ (3) ta được: $h(x+4)=-\dfrac{5}{2}h(x),\forall x\in\mathbb{R}$. (4)

Đặt $h(x)=\left(\dfrac{5}{2}\right)^{\frac{x}{4}}k(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó k là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$. Từ (4) ta được

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x+4}{4}}k(x+4)=-\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x}{4}}k(x),\forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow k(x+4)=-k(x),\forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}k(x)=\dfrac{1}{2}\left[k(x)-k(x+4)\right],\forall x\in\mathbb{R}\\ k(x)=k(x+8),\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}k(x)=\dfrac{1}{2}\left[n(x)-n(x+4)\right],\forall x\in\mathbb{R}\\ n\text{ là hàm số tuần hoàn cộng tính chu kì 8 trên }\mathbb{R},\text{ tùy ý.}\end{cases}$$

Ta có

$$g(x+4)+\frac{5}{2}g(x)=\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x}{4}}k(x),\forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow\frac{g(x+4)}{\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x}{4}}}+\frac{g(x)}{\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x-4}{4}}}=k(x),\forall x\in\mathbb{R}. \quad (5)$$

Xét hàm số I như sau $I(x)=\dfrac{g(x)}{\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x-4}{4}}},\forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (5) ta được

$$I(x+4)+I(x)=k(x),\forall x\in\mathbb{R}. \quad (6)$$

Vì với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì

$$k(x)=\frac{4-x+x}{4}k(x)=\frac{x}{4}k(x)-\frac{x-4}{4}k(x)=-\frac{x}{4}k(x+4)-\frac{x-4}{4}k(x)$$

nên từ (6) ta được

$$I(x+4)+\frac{x}{4}k(x+4)=-\left[I(x)+\frac{x-4}{4}k(x)\right]\forall x\in\mathbb{R}. \quad (7)$$

Xét hàm số J như sau $J(x) = I(x) + \dfrac{x-4}{4}k(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó từ (7) ta được

$$J(x+4) = -J(x), \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} J(x) = \dfrac{1}{2}[J(x) - J(x+4)], \forall x \in \mathbb{R} \\ J(x) = J(x+8), \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} J(x) = \dfrac{1}{2}[m(x) - m(x+4)], \forall x \in \mathbb{R} \\ m \text{ là hàm số tuần hoàn cộng tính chu kì 8 trên } \mathbb{R}, \text{ tùy ý.} \end{cases}$$

Vậy với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$g(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x-4}{4}} I(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x-4}{4}} \left[J(x) - \frac{x-4}{4}k(x)\right]$$
$$= \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x-4}{4}} \left[\frac{m(x) - m(x+4)}{2} - \frac{x-4}{4}.\frac{n(x) - n(x+4)}{2}\right].$$

Mà $f(x-3) = \dfrac{2010}{49} + g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ nên suy ra tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài đều có dạng

$$f(x) = \frac{2010}{49} + \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x-1}{4}} \left[\frac{m(x+3) - m(x+7)}{2} - \frac{x-1}{4}.\frac{n(x+3) - n(x+7)}{2}\right], \forall x \in \mathbb{R}$$

trong đó n, m là những hàm số tuần hoàn cộng tính chu kì 8 trên $\mathbb{R}$, tùy ý (thử lại thấy thỏa mãn).

Bài toán 1.118 (Việt Nam TST năm học 1993-1994). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(\sqrt{2}x) + f\left((4+3\sqrt{2})x\right) = 2f\left((2+\sqrt{2})x\right), \ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Từ (1) cho $x = 0$ được $2f(0) = 2f(0)$. Vậy $f(0) = a$ là hằng số tùy ý.

• Với $x > 0$. Ta đặt $(2+\sqrt{2})x = t$ hay $x = \dfrac{t}{2+\sqrt{2}}$. Lúc đó (1) trở thành

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}t\right) + f\left(\frac{4+3\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}t\right) = 2f(t), \ \forall t > 0. \quad (2)$$

Ta chú ý rằng $\dfrac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$ và

$$\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}.\frac{4+3\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{6+4\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \frac{4+3\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}.$$

Vì thế: (2) $\Leftrightarrow f\left((\sqrt{2}-1)t\right) + f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}t\right) = 2f(t), \ \forall t > 0.$ (3)

Đặt $t = (\sqrt{2}-1)^u$ (hay $u = \log_{\sqrt{2}-1} t$). Khi đó (3) trở thành

$$f\left((\sqrt{2}-1)^{u+1}\right) + f\left((\sqrt{2}-1)^{u-1}\right) = 2f\left((\sqrt{2}-1)^u\right), \ \forall u \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Đặt $f\left((\sqrt{2}-1)^u\right) = g(u)$. Thay vào (4) ta được

$$g(u+1) - 2g(u) + g(u-1) = 0, \ \forall u \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow g(u+1) - g(u) = g(u) - g(u-1), \ \forall u \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Xét hàm số $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ như sau: $h(u) = g(u) - g(u-1), \ \forall u \in \mathbb{R}.$ (6)

Khi đó: (5) $\Leftrightarrow h(u+1) = h(u), \ \forall u \in \mathbb{R}.$ (7)

Từ (7), sử dụng bài toán 1.33 ở trang 21 ta được $h(x) = k_1(\{x\}), \forall x \in \mathbb{R}$, trong đó k_1 là hàm số tùy ý, xác định trên nửa khoảng $[0;1)$. Từ (7) ta có

$$h(u) = [(u+1) - u]\, h(u) = (u+1)h(u+1) - uh(u), \ \forall u \in \mathbb{R}.$$

Do vậy

$$(6) \Leftrightarrow (u+1)h(u+1) - uh(u) = g(u) - g(u-1), \ \forall u \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow (u+1)h(u+1) - g(u) = uh(u) - g(u-1), \ \forall u \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Đặt $\psi(u) = uh(u) - g(u-1), \ \forall u \in \mathbb{R}$. Thay vào (8) được

$$\psi(u+1) = \psi(u), \ \forall u \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Từ (9), sử dụng bài toán 1.33 ở trang 21 ta được $\psi(x) = k_2(\{x\}), \forall x \in \mathbb{R}$, trong đó k_2 là hàm số tùy ý, xác định trên nửa khoảng $[0;1)$. Như vậy

$$g(u) = (u+1)h(u+1) - \psi(u+1)$$
$$= (u+1)k_1(\{u+1\}) - k_2(\{u+1\})$$
$$= (u+1)k_1(\{u\}) - k_2(\{u\}), \ \forall u \in \mathbb{R}.$$

Mà $f\left((\sqrt{2}-1)^u\right) = g(u), \ \forall u \in \mathbb{R}$ nên

$$f(x) = (1 + \log_{\sqrt{2}-1} x)k_1\left(\left\{\log_{\sqrt{2}-1} x\right\}\right) - k_2\left(\left\{\log_{\sqrt{2}-1} x\right\}\right), \ \forall x > 0.$$

• Với $x < 0$. Ta đặt $-(2+\sqrt{2})x = w$ hay $x = \dfrac{-w}{2+\sqrt{2}}$. Lúc đó (1) trở thành

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}w\right) + f\left(-\frac{4+3\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}w\right) = 2f(-w), \ \forall w > 0$$
$$\Leftrightarrow f\left(-(\sqrt{2}-1)w\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}-1}w\right) = 2f(-w), \ \forall w > 0. \quad (10)$$

Đặt $w=(\sqrt{2}-1)^z$ (hay $z=\log_{\sqrt{2}-1}w$). Khi đó (10) trở thành

$$f\left(-(\sqrt{2}-1)^{z+1}\right)+f\left(-(\sqrt{2}-1)^{z-1}\right)=2f\left(-(\sqrt{2}-1)^z\right),\ \forall z\in\mathbb{R}. \quad (11)$$

Đặt $f\left(-(\sqrt{2}-1)^z\right)=n(z)$. Thay vào (11) ta được

$$n(z+1)-2n(z)+n(z-1)=0,\ \forall z\in\mathbb{R}.$$

Tương tự ta được $n(z)=(z+1)k_3(\{z\})-k_4(\{z\}),\forall z\in\mathbb{R}$, với k_3, k_4 là những hàm số tùy ý, xác định trên nửa khoảng $[0;1)$. Mà $f\left(-(\sqrt{2}-1)^z\right)=n(z)$ nên $f(x)=n\left(\log_{\sqrt{2}-1}(-x)\right)$, dẫn tới

$$f(x)=\left(1+\log_{\sqrt{2}-1}(-x)\right)k_3\left(\left\{\log_{\sqrt{2}-1}(-x)\right\}\right)-k_4\left(\left\{\log_{\sqrt{2}-1}(-x)\right\}\right),\forall x<0.$$

Bài toán 1.119. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+6)+2\sqrt{3}f(x+3)+4f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow f(x+6)-\left[\left(\sqrt{3}+i\right)+\left(\sqrt{3}-i\right)\right]f(x+3)+4f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}\\&\Leftrightarrow f(x+6)-\left(\sqrt{3}+i\right)f(x+3)\\&=\left(\sqrt{3}-i\right)\left[f(x+3)-\left(\sqrt{3}+i\right)f(x)\right],\forall x\in\mathbb{R}. \quad (2)\end{aligned}$$

Đặt: $f(x+3)-\left(\sqrt{3}+i\right)f(x)=g_1(x),\forall x\in\mathbb{R}$. (3)

Khi đó g_1 là hàm số $g_1:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. Từ (2) ta được:

$$\begin{aligned}&g_1(x+3)=\left(\sqrt{3}-i\right)g_1(x),\forall x\in\mathbb{R}\\&\Leftrightarrow g_1(x+3)=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]g_1(x),\forall x\in\mathbb{R}\\&\Leftrightarrow\frac{g_1(x+3)}{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]}=g_1(x),\forall x\in\mathbb{R}\\&\Leftrightarrow\frac{g_1(x+3)}{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right].2^{\frac{x}{3}}.\left(\cos\frac{-\pi x}{18}+i\sin\frac{-\pi x}{18}\right)}\\&=\frac{g_1(x)}{2^{\frac{x}{3}}.\left(\cos\frac{-\pi x}{18}+i\sin\frac{-\pi x}{18}\right)},\forall x\in\mathbb{R}\\&\Leftrightarrow\frac{g_1(x+3)}{2^{\frac{x+3}{3}}\left[\cos\left(-\frac{3\pi+\pi x}{18}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi+\pi x}{18}\right)\right]}\end{aligned}$$

$$=\frac{g_1(x)}{2^{\frac{x}{3}}.\left(\cos\frac{-\pi x}{18}+i\sin\frac{-\pi x}{18}\right)},\forall x\in\mathbb{R}. \quad (4)$$

Đặt $\dfrac{g_1(x)}{2^{\frac{x}{3}}.\left(\cos\frac{-\pi x}{18}+i\sin\frac{-\pi x}{18}\right)}=h_1(x)$. Khi đó h_1 là hàm số xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$. Từ (4) ta được: $h_1(x+3)=h_1(x),\forall x\in\mathbb{R}$. (5)

Ta có:

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow f(x+6)-\left[\left(\sqrt{3}+i\right)+\left(\sqrt{3}-i\right)\right]f(x+3)+4f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}\\&\Leftrightarrow f(x+6)-\left(\sqrt{3}-i\right)f(x+3)\\&=\left(\sqrt{3}+i\right)\left[f(x+3)-\left(\sqrt{3}-i\right)f(x)\right],\forall x\in\mathbb{R}. \quad (6)\end{aligned}$$

Đặt $f(x+3)-\left(\sqrt{3}-i\right)f(x)=g_2(x)$. Khi đó g_2 là hàm số $g_2:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. Từ (6) ta được

$$\begin{aligned}&g_2(x+3)=\left(\sqrt{3}+i\right)g_2(x),\forall x\in\mathbb{R}\\&\Leftrightarrow g_2(x+3)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)g_2(x),\forall x\in\mathbb{R}\\&\Leftrightarrow\frac{g_2(x+3)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}=g_2(x),\forall x\in\mathbb{R}\\&\Leftrightarrow\frac{g_2(x+3)}{2.\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).2^{\frac{x}{3}}.\left(\cos\frac{\pi x}{18}+i\sin\frac{\pi x}{18}\right)}\\&=\frac{g_2(x)}{2^{\frac{x}{3}}.\left(\cos\frac{\pi x}{18}+i\sin\frac{\pi x}{18}\right)},\forall x\in\mathbb{R}\\&\Leftrightarrow\frac{g_2(x+3)}{2^{\frac{x+3}{3}}\left[\cos\left(\frac{3\pi+\pi x}{18}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi+\pi x}{18}\right)\right]}\\&=\frac{g_2(x)}{2^{\frac{x}{3}}.\left(\cos\frac{\pi x}{18}+i\sin\frac{\pi x}{18}\right)},\forall x\in\mathbb{R}. \quad (7)\end{aligned}$$

Đặt $\dfrac{g_2(x)}{2^{\frac{x}{3}}.\left(\cos\frac{\pi x}{18}+i\sin\frac{\pi x}{18}\right)}=h_2(x)$. Khi đó h_2 là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Từ (7) ta được

$$h_2(x+3)=h_2(x),\forall x\in\mathbb{R}. \quad (8)$$

Do $f(x)$, $f(x+3)$ là các số thực nên

$$\overline{g_1(x)} = \overline{f(x+3) - \left(\sqrt{3}+i\right) f(x)} = \overline{f(x+3)} - \overline{\sqrt{3}+i}.\overline{f(x)}$$
$$= f(x+3) - \left(\sqrt{3}-i\right) f(x) = g_2(x).$$

Vì vậy

$$\overline{h_1(x)} = \frac{\overline{g_1(x)}}{2^{\frac{x}{3}}\left(\cos\frac{-\pi x}{18} + i\sin\frac{-\pi x}{18}\right)} = \frac{g_2(x)}{2^{\frac{x}{3}}\left(\cos\frac{\pi x}{18} + i\sin\frac{\pi x}{18}\right)} = h_2(x).$$

Lưu ý rằng $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Đặt $h_1(x) = m(x) + in(x)$, trong đó các hàm $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tuần hoàn chu kì 3. Theo chứng minh trên thì

$$\overline{h_1(x)} = h_2(x) \Rightarrow h_2(x) = m(x) - in(x).$$

Quay trở lại bài toán ban đầu, ta có

$$f(x+3) - \left(\sqrt{3}+i\right) f(x) = 2^{\frac{x}{3}}\left(\cos\frac{-\pi x}{18} + i\sin\frac{-\pi x}{18}\right).h_1(x). \quad (9)$$
$$f(x+3) - \left(\sqrt{3}-i\right) f(x) = 2^{\frac{x}{3}}\left(\cos\frac{\pi x}{18} + i\sin\frac{\pi x}{18}\right) h_2(x). \quad (10)$$

Trừ (9) và (10) theo vế ta được

$$f(x) = \frac{2^{\frac{x}{3}}}{2i}\left[\left(\cos\frac{\pi x}{18} + i\sin\frac{\pi x}{18}\right) h_2(x) - \left(\cos\frac{-\pi x}{18} + i\sin\frac{-\pi x}{18}\right) h_1(x)\right]. \quad (11)$$

Để ý rằng

$$\left(\cos\frac{\pi x}{18} + i\sin\frac{\pi x}{18}\right) h_2(x) = \left(\cos\frac{\pi x}{18} + i\sin\frac{\pi x}{18}\right)[m(x) - in(x)]$$
$$= m(x)\cos\frac{\pi x}{18} + n(x)\sin\frac{\pi x}{18} + \left[m(x)\sin\frac{\pi x}{18} - n(x)\cos\frac{\pi x}{18}\right] i.$$

và

$$\left(\cos\frac{-\pi x}{18} + i\sin\frac{-\pi x}{18}\right) h_1(x) = \left(\cos\frac{\pi x}{18} - i\sin\frac{\pi x}{18}\right)[m(x) + in(x)]$$
$$= m(x)\cos\frac{\pi x}{18} + n(x)\sin\frac{\pi x}{18} - \left[m(x)\sin\frac{\pi x}{18} - n(x)\cos\frac{\pi x}{18}\right] i.$$

Vậy từ (11) suy ra

$$f(x) = \frac{2^{\frac{x}{3}}}{2i}\left[m(x)\sin\frac{\pi x}{18} - n(x)\cos\frac{\pi x}{18}\right] 2i$$

$$= 2^{\frac{x}{3}}\left[m(x)\sin\frac{\pi x}{18} - n(x)\cos\frac{\pi x}{18}\right], \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sau khi thử lại ta kết luận: Tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài đều có dạng

$$f(x) = 2^{\frac{x}{3}}\left[m(x)\sin\frac{\pi x}{18} - n(x)\cos\frac{\pi x}{18}\right], \forall x \in \mathbb{R},$$

trong đó m, n là các hàm số tuần hoàn cộng tính chu kì 3 trên $\mathbb{R}$, tùy ý.

1.7.2 Phương trình hàm sai phân bậc hai với hàm tuần hoàn và phản tuần hoàn nhân tính

Dạng 1. Phương trình hàm dạng

$$\boldsymbol{f\left(a^2x\right) + \alpha f\left(ax\right) + \beta f(x) = h(x), \forall x \neq 0,}$$

trong đó $a \in \mathbb{R}\setminus\{0,1,-1\}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$; h là hàm tuần hoàn nhân tính chu kì a.

Phương pháp giải. Phương trình đặc trưng $\lambda^2+\alpha\lambda+\beta = 0$ $\left(\Delta = \alpha^2 - 4\beta\right)$.

- Nếu phương trình đặc trưng có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm bằng 1 thì làm tương tự như bài toán 1.120.
- Nếu phương trình đặc trưng có hai nghiệm phân biệt, và cả hai nghiệm cùng khác 1 thì làm tương tự như bài toán 1.121.
- Trường hợp $\Delta = \alpha^2 - 4\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha}{4}$, hay phương trình đặc trưng có nghiệm kép.
  - Nếu $\alpha = -2$, hay nghiệm kép là 1 thì làm tương tự bài toán 1.122.
  - Nếu $\alpha \neq -2$ thì làm tương tự bài toán 1.123.

Bài toán 1.120. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(25x) - 3f(5x) + 2f(x) = \cos\left(2\pi\log_5|x|\right), \forall x \neq 0. \quad (1)$$

Giải. Đặt $h(x) = \cos\left(2\pi\log_5|x|\right) \Rightarrow h(5x) = h(x), \forall x \neq 0$. Bởi vì phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ có hai nghiệm là 1 và 2 nên ta biến đổi (1) thành

$$f(25x) - (1+2)f(5x) + 1.2.f(x) = \cos\left(2\pi\log_5|x|\right), \forall x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow f(25x) - 2f(5x) - [f(5x) - 2f(x)] = h(x), \forall x \neq 0. \quad (2)$$

Đặt $g_1(x) = f(5x) - 2f(x)$, thay vào (2) ta được

$$g_1(5x) - g_1(x) = h(x), \forall x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow g_1(5x) - g_1(x) = (\log_5 |5x| - \log_5 |x|)\, h(x), \forall x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow g_1(5x) - (\log_5 |5x|)\, h(5x) = g_1(x) - (\log_5 |x|)\, h(x), \forall x \neq 0. \quad (3)$$

Đặt $g(x) = g_1(x) - (\log_5 |x|)\, h(x)$, thay vào (3) ta được

$$g(5x) = g(x), \forall x \neq 0. \quad (4)$$

Vậy $g_1(x) = g(x) + (\log_5 |x|)\, h(x), \forall x \neq 0$, suy ra

$$f(5x) - 2f(x) = g(x) + (\log_5 |x|)\, h(x), \forall x \neq 0, \quad (5)$$

với g là hàm tuần hoàn nhân tính chu kì 5 trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (g xác định bởi (4)). Ta lại biến đổi (1) thành

$$f(25x) - f(5x) - 2[f(5x) - f(x)] = h(x), \forall x \neq 0. \quad (6)$$

Đặt $g_2(x) = f(5x) - f(x)$, thay vào (6) ta được

$$g_2(5x) - 2g_2(x) = h(x), \forall x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow g_2(5x) + h(5x) = 2[g_2(x) + h(x)], \forall x \neq 0. \quad (7)$$

Đặt $k(x) = g_2(x) + h(x)$, thay vào (7) ta được

$$k(5x) = 2k(x), \forall x \neq 0. \quad (8)$$

Đặt $k(x) = |x|^{\log_5 2} q(x)$, thay vào (8) ta được

$$|5x|^{\log_5 2} q(5x) = 2|x|^{\log_5 2} q(x), \forall x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow q(5x) = q(x), \forall x \neq 0. \quad (9)$$

Vậy

$$g_2(x) = |x|^{\log_5 2} q(x) - h(x), \forall x \neq 0. \quad (10)$$

Suy ra

$$f(5x) - f(x) = |x|^{\log_5 2} q(x) - h(x), \forall x \neq 0. \quad (11)$$

Từ (5) và (11) suy ra

$$f(x) = |x|^{\log_5 2} q(x) - g(x) - (1 + \log_5 |x|) \cos(2\pi \log_5 |x|), \forall x \neq 0,$$

trong đó g và q là các hàm tuần hoàn nhân tính chu kì 5 trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (xác định bởi (4) và (9)).

Bài toán 1.121. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(4x) + 2f(2x) - 15f(x) = \sin(2\pi \log_2 |x|), \forall x \neq 0.. \quad (1)$$

Giải. Đặt $h(x) = \sin(2\pi \log_2 |x|) \Rightarrow h(x) = h(2x), \forall x \neq 0$. Dễ thấy phương trình đặc trưng $k(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0$ có hai nghiệm $\lambda = 3$ và $\lambda = -5$. Ta có $k(1) = 1 + 2 - 15 = -12$. Vậy

$$h(x) = \frac{1+2-15}{-12} h(x) = \frac{h(4x) + 2h(2x) - 15h(x)}{-12}.$$

Do đó (1) viết lại

$$f(4x) + \frac{h(4x)}{12} + 2\left[f(2x) + \frac{h(2x)}{12}\right] - 15\left[f(x) + \frac{h(x)}{12}\right] = 0, \forall x \neq 0. \quad (2)$$

Đặt $g(x) = f(x) + \dfrac{h(x)}{12}$, thay vào (2) ta được

$$g(4x) + 2g(2x) - 15g(x) = 0, \forall x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow g(4x) + (5-3)g(2x) - 5.3.g(x) = 0, \forall x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow g(4x) - 3g(2x) = -5[g(2x) - 3g(x)], \forall x \neq 0. \quad (3)$$

Đặt $\varphi(x) = g(2x) - 3g(x)$, thay vào (3) ta được $\varphi(2x) = -5\varphi(x), \forall x \neq 0$. (4)
Đặt $\varphi(x) = |x|^{\log_2 5} h_1(x)$, thay vào (4) được

$$|2x|^{\log_2 5} h_1(2x) = -5.|x|^{\log_2 5} h_1(x), \forall x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow h_1(2x) = -h_1(x), \forall x \neq 0. \quad (5)$$

Vậy

$$g(2x) - 3g(x) = |x|^{\log_2 5} h_1(x), \forall x \neq 0. \quad (6)$$

Ta lại biến đổi (1) thành

$$g(4x) + 5g(2x) = 3[g(2x) + 5g(x)], \forall x \neq 0. \quad (7)$$

Đặt $\psi(x) = g(2x) + 5g(x)$, thay vào (7) ta được

$$\psi(2x) = 3\psi(x), \forall x \neq 0. \quad (8)$$

Đặt $\psi(x) = |x|^{\log_2 3} h_2(x)$, thay vào (8) ta được

$$|2x|^{\log_2 3} h_2(2x) = 3.|x|^{\log_2 3} h_2(x), \forall x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow h_2(2x) = h_2(x), \forall x \neq 0. \quad (9)$$

Vậy

$$g(2x) + 5g(x) = |x|^{\log_2 3} h_2(x), \forall x \neq 0. \quad (10)$$

Từ (6) và (10) suy ra

$$g(x) = \frac{1}{8}\left[|x|^{\log_2 3} h_2(x) - |x|^{\log_2 5} h_1(x)\right], \forall x \neq 0. \quad (11)$$

Do đó

$$f(x)=\frac{1}{8}\left[|x|^{\log_2 3}h_2(x)-|x|^{\log_2 5}h_1(x)\right]-\frac{\sin(2\pi\log_2|x|)}{12},\forall x\neq 0,$$

trong đó h_1 là hàm tuần hoàn nhân tính chu kì 2 trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, h_2 là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kì 2 trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (h_1, h_2 xác định bởi (5), (9)).

Bài toán 1.122. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(9x)-2f(3x)+f(x)=\{\log_3|x|\},\forall x\neq 0. \quad (1)$$

Giải. Đặt $h(x)=\{\log_3|x|\}$, khi đó

$$h(3x)=\{\log_3|3x|\}=\{1+\log_3|x|\}=\{\log_3|x|\}=h(x),\forall x\neq 0.$$

Phương trình đặc trưng $\lambda^2-2\lambda+1=0$ có nghiệm kép là 1. Ta biến đổi (1)

$$\begin{aligned}&f(9x)-(1+1)f(3x)+1.1f(x)=h(x),\forall x\neq 0\\ \Leftrightarrow&f(9x)-f(3x)-[f(3x)-f(x)]=h(x),\forall x\neq 0. \quad (2)\end{aligned}$$

Đặt $g(x)=f(3x)-f(x)$, thay vào (2) được

$$\begin{aligned}&g(3x)-g(x)=h(x),\forall x\neq 0\\ \Leftrightarrow&g(3x)-g(x)=(\log_3|3x|-\log_3|x|)\,h(x),\forall x\neq 0\\ \Leftrightarrow&[g(3x)-h(3x)\log_3|3x|]=[g(x)-h(x)\log_3|x|],\forall x\neq 0. \quad (3)\end{aligned}$$

Đặt $k(x)=g(x)-h(x)\log_3|x|$, thay vào (3) được $k(3x)=k(x),\forall x\neq 0$. (4)
Vậy

$$g(x)=k(x)+h(x)\log_3|x|,\forall x\neq 0, \quad (5)$$

trong đó k là hàm tuần hoàn nhân tính chu kì 3 trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Do đó

$$\begin{aligned}&f(3x)-f(x)=k(x)+h(x)\log_3|x|,\forall x\neq 0\\ \Leftrightarrow&f(3x)-f(x)-h(x)\log_3|x|=k(x),\forall x\neq 0\\ \Leftrightarrow&\left[f(3x)-\frac{(\log_3|3x|)^2-\log_3|3x|}{2}h(3x)\right]\\ &-\left[f(x)-\frac{(\log_3|x|)^2-\log_3|x|}{2}h(x)\right]=k(x),\forall x\neq 0. \quad (6)\end{aligned}$$

Đặt $p(x)=f(x)-\dfrac{(\log_3|x|)^2-\log_3|x|}{2}h(x)$, thay vào (6) ta được

$$\begin{aligned}&p(3x)-p(x)=k(x),\forall x\neq 0\\ \Leftrightarrow&p(3x)-p(x)=(\log_3|3x|-\log_3|x|)\,k(x),\forall x\neq 0\\ \Leftrightarrow&[p(3x)-k(3x)\log_3|3x|]=[p(x)-k(x)\log_3|x|],\forall x\neq 0. \quad (7)\end{aligned}$$

Đặt $I(x)=p(x)-k(x)\log_3|x|$, thay vào (7) ta được $I(3x)=I(x),\forall x\neq 0$. (8)
Vậy

$$\begin{aligned}f(x)&=p(x)+\frac{(\log_3|x|)^2-\log_3|x|}{2}h(x)\\ &=I(x)+k(x)\log_3|x|+\frac{(\log_3|x|)^2-\log_3|x|}{2}h(x),\forall x\neq 0.\end{aligned}$$

Sau khi thử lại ta kết luận: Hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài có dạng

$$f(x)=I(x)+k(x)\log_3|x|+\frac{(\log_3|x|)^2-\log_3|x|}{2}\{\log_3|x|\},\forall x\neq 0,$$

trong đó I, k là các hàm số tuần hoàn nhân tính chu kì 3 trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (I, k xác định bởi (4) và (8)).

Bài toán 1.123. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(36x)-4f(-6x)+4f(x)=\sqrt{\{\log_6|x|\}},\forall x\neq 0. \quad (1)$$

Giải. Đặt $h(x)=\sqrt{\{\log_6|x|\}}$, khi đó

$$h(-6x)=\sqrt{\{\log_6|-6x|\}}=\sqrt{\{1+\log_6|x|\}}=\sqrt{\{\log_6|x|\}}=h(x),\forall x\neq 0.$$

Phương trình đặc trưng $\lambda^2-4\lambda+4=0$ có nghiệm kép là 4. Biến đổi (1) thành

$$\begin{aligned}&f(36x)-(2+2)f(-6x)+2.2f(x)=h(x),\forall x\neq 0\\ \Leftrightarrow&f(36x)-2f(-6x)-2[f(-6x)-2f(x)]=h(x),\forall x\neq 0. \quad (2)\end{aligned}$$

Đặt $g(x)=f(-6x)-2f(x)$, thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned}&g(-6x)-2g(x)=h(x),\forall x\neq 0\\ \Leftrightarrow&g(-6x)+h(-6x)=2[g(x)+h(x)],\forall x\neq 0. \quad (3)\end{aligned}$$

Đặt $q(x)=g(x)+h(x)$, thay vào (3) ta được $q(-6x)=2q(x),\forall x\neq 0$. (4)
Đặt $q(x)=|x|^{\log_6 2}\phi(x)$, thay vào (4) ta được $\phi(-6x)=\phi(x),\forall x\neq 0$. (5)
Ta có

$$\begin{aligned}&f(-6x)-2f(x)=|x|^{\log_6 2}\phi(x)-h(x),\forall x\neq 0\\ \Leftrightarrow&f(-6x)-2f(x)+h(x)=|x|^{\log_6 2}\phi(x),\forall x\neq 0\\ \Leftrightarrow&f(-6x)-2f(x)+[2h(x)-h(-6x)]=|x|^{\log_6 2}\phi(x),\forall x\neq 0\\ \Leftrightarrow&f(-6x)-h(-6x)-2[f(x)-h(x)]=|x|^{\log_6 2}\phi(x),\forall x\neq 0. \quad (6)\end{aligned}$$

Đặt $p(x)=f(x)-h(x)$, thay vào (6) ta được

$$p(-6x)-2p(x)=|x|^{\log_6 2}\phi(x),\forall x\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{p(-6x)-2p(x)}{|x|^{\log_6 2}} = \phi(x), \forall x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2p(-6x)}{|-6x|^{\log_6 2}} - \frac{2p(x)}{|x|^{\log_6 2}} = \phi(x), \forall x \neq 0. \quad (7)$$

Đặt $t(x) = \dfrac{2p(x)}{|x|^{\log_6 2}}$, thay vào (7) ta được

$$t(-6x) - t(x) = \phi(x), \forall x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow t(-6x) - t(x) = (\log_6 |-6x| - \log_6 |x|)\,\phi(x), \forall x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow t(-6x) - \phi(-6x)\log_6 |-6x| = t(x) - \phi(x)\log_6 |x|, \forall x \neq 0. \quad (8)$$

Đặt $u(x) = t(x) - \phi(x)\log_6 |x|$, thay vào (8) ta được

$$u(-6x) = u(x), \forall x \neq 0. \quad (9)$$

Vậy

$$f(x) = p(x) + h(x) = \frac{|x|^{\log_6 2}\, t(x)}{2} + h(x)$$
$$= \frac{|x|^{\log_6 2}\,[u(x) + \phi(x)\log_6 |x|]}{2} + h(x).$$

Thử lại ta kết luận: Tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài có dạng:

$$f(x) = \frac{|x|^{\log_6 2}\,[u(x) + \phi(x)\log_6 |x|]}{2} + \sqrt{\{\log_6 |x|\}}, \forall x \neq 0,$$

trong đó ϕ, u là các hàm số trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ xác định bởi (5) và (9).

1.8 Phương trình hàm sai phân tuyến tính bậc ba

Như ta đã thấy, việc giải phương trình hàm sai phân bậc hai là rất phức tạp và khó khăn, do đó giải phương trình hàm sai phân bậc ba chắc chắn sẽ nhiều chông gai hơn, tuy nhiên sẽ giải được và phương pháp là tương tự. Do vậy bài này chỉ trình bày một bài toán với lời giải chi tiết, để từ đó bạn đọc có thể đề xuất và giải các bài toán cho các trường hợp khác.

Bài toán 1.124. *Cho $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+3a) + \alpha f(x+2a) + \beta f(x+a) + \gamma f(x) = 0 \quad (1)$$

biết rằng phương trình đặc trưng

$$\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0. \quad (2)$$

có ba nghiệm thực phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Phương trình có dạng (1) được gọi là phương trình hàm sai phân tuyến tính thuần nhất bậc ba.

Giải. Áp dụng định lí Viete cho (2), ta có $\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &= -\alpha, \\ \lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1 &= \beta, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= -\gamma. \end{cases}$

Thay vào (1), ta được

$$f(x+3a) - (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)f(x+2a) + (\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)f(x+a) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Phương trình (3) tương đương

$$f(x+3a) - \lambda_1 f(x+2a) - (\lambda_2+\lambda_3)f(x+2a) + \lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)f(x+a) + \lambda_2\lambda_3\Big(f(x+a) - \lambda_1 f(x)\Big) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hay

$$f(x+3a) - \lambda_1 f(x+2a) - (\lambda_2+\lambda_3)[f(x+2a) - \lambda_1 f(x+a)] + \lambda_2\lambda_3[f(x+a) - \lambda_1 f(x)] = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Đặt $f_1(x) = f(x+a) - \lambda_1 f(x)$. Phương trình (4) trở thành

$$f_1(x+2a) - (\lambda_2+\lambda_3)f_1(x+a) + \lambda_2\lambda_3 f_1(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f_1(x+2a) - \lambda_2 f_1(x+a) = \lambda_3\Big[f_1(x+a) - \lambda_2 f_1(x)\Big],\ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Đặt $g_1(x) = f_1(x+a) - \lambda_2 f_1(x)$. Phương trình (5) trở thành

$$g_1(x+a) = \lambda_3 g_1(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Đặt $g_1(x) = |\lambda_3|^{\frac{x}{a}} h_1(x)$. Khi đó (6) viết lại

$$h_1(x+a) = \begin{cases} h_1(x) & \text{nếu } \lambda_3 > 0, \\ -h_1(x) & \text{nếu } \lambda_3 < 0. \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$f_1(x+a) - \lambda_2 f_1(x) = |\lambda_3|^{\frac{x}{a}} h_1(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Đổi vai trò λ_2 và λ_3 và biến đổi tương tự, ta được

$$f_1(x+a) - \lambda_3 f_1(x) = |\lambda_2|^{\frac{x}{a}} h_2(x),\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

trong đó $h_2(x+a) = \begin{cases} h_2(x) & \text{nếu } \lambda_2 > 0, \\ -h_2(x) & \text{nếu } \lambda_2 < 0. \end{cases}$ Lấy (7) trừ (8), ta được

$$(\lambda_3 - \lambda_2) f_1(x) = |\lambda_3|^{\frac{x}{a}} h_1(x) - |\lambda_2|^{\frac{x}{a}} h_2(x),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

nên

$$f_1(x) = \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2}\Big(|\lambda_3|^{\frac{x}{a}} h_1(x) - |\lambda_2|^{\frac{x}{a}} h_2(x)\Big),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Như vậy

$$f(x+a) - \lambda_1 f(x) = \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2}\Big(|\lambda_3|^{\frac{x}{a}} h_1(x) - |\lambda_2|^{\frac{x}{a}} h_2(x)\Big),\ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Dối vai trò $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ và làm như trên, ta được

$$f(x+a) - \lambda_2 f(x) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_3}\Big(|\lambda_1|^{\frac{x}{a}} k_1(x) - |\lambda_3|^{\frac{x}{a}} k_2(x)\Big),\ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Từ (9) và (10) suy ra

$$f(x) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big[\frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2}\Big(|\lambda_3|^{\frac{x}{a}} h_1(x) - |\lambda_2|^{\frac{x}{a}} h_2(x)\Big)\Big] - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big[\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_3}\Big(|\lambda_1|^{\frac{x}{a}} k_1(x) - |\lambda_3|^{\frac{x}{a}} k_2(x)\Big)\Big],\ \forall x \in \mathbb{R},$$

trong đó

$$h_1(x+a) = \begin{cases} h_1(x) & \text{nếu } \lambda_3 > 0, \\ -h_1(x) & \text{nếu } \lambda_3 < 0. \end{cases}$$

$$h_2(x+a) = \begin{cases} h_2(x) & \text{nếu } \lambda_2 > 0, \\ -h_2(x) & \text{nếu } \lambda_2 < 0. \end{cases}$$

$$k_1(x+a) = \begin{cases} k_1(x) & \text{nếu } \lambda_1 > 0, \\ -k_1(x) & \text{nếu } \lambda_1 < 0. \end{cases}$$

$$k_2(x+a) = \begin{cases} k_2(x) & \text{nếu } \lambda_3 > 0, \\ -k_2(x) & \text{nếu } \lambda_3 < 0. \end{cases}$$

Bài toán 1.125. *Cho $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+3a) + \alpha f(x+2a) + \beta f(x+a) + \gamma f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

biết rằng phương trình đặc trưng $\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0$ có ba nghiệm thực $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ thỏa mãn $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$.

Bài toán 1.126. *Cho $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+3a) + \alpha f(x+2a) + \beta f(x+a) + \gamma f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

biết rằng phương trình đặc trưng $\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0$ có nghiệm thực bội ba.

Chương 2

Giải phương trình hàm trên tập số thực

2.1 Giải phương trình hàm bằng phép thế

Phương pháp thế là phương pháp thường hay sử dụng khi giải các phương trình hàm, đặc biệt là phương trình hàm với cặp biến tự do. Nội dung cơ bản của phương pháp này là ta thay các biến bởi các giá trị đặc biệt. Điều quan trọng phải lưu ý là giá trị các biến này phải thuộc tập xác định của hàm số và phải thỏa mãn các điều kiện ràng buộc giữa các biến nếu có. Trong phương pháp này khi thay biến x bởi các giá trị đặc biệt thì việc chọn các giá trị đặc biệt đòi hỏi phải có sự nhạy cảm nhất định, nó giúp ta tìm được hàm $f(x)$ từ một phương trình.

2.1.1 Một số lưu ý

Những lưu ý này không chỉ sử dụng trong bài này mà chúng còn được sử dụng nhiều nơi trong quyển sách này.

- Nếu hệ thức đã cho có tính đối xứng giữa các biến thì cố gắng hoán vị các biến với nhau, cho $y = x$ (chẳng hạn xem bài toán 2.41 ở trang 111, bài toán 2.135 ở trang 190, bài toán 2.80 ở trang 142...). Nếu một bộ phận nào đó trong phương trình hàm đối xứng đối với x và y thì nên thay x bởi y và thay y bởi x, nghĩa là hoán vị x và y (chẳng hạn xem bài toán 2.89 ở trang 150).
- Nên sử dụng các phép thế có thể giản ước được hai vế của phương trình hàm. Từ đó ta tìm được một đẳng thức đơn giản hơn. Nếu muốn khử hai biểu thức $f(\psi(x,y))$, $f(\varphi(x,y))$ ở hai vế của phương trình hàm, ta xét phương trình $\psi(x,y) = \varphi(x,y) \Rightarrow y = \lambda(x)$, để thay y bởi $\lambda(x)$ vào phương trình hàm (xem bài toán 2.48 ở trang 116, bài toán 2.49 ở trang 117, bài toán 2.54 ở trang 121...)

- Nếu đã có $f(x^3) = [f(x)]^3$ hoặc $f(x^3) = x^2 f(x)$ thì ta nên sử dụng phép thế x bởi $x + y$ rồi so sánh hai vế (xem bài toán 2.101 ở trang 161).
- Trong trường hợp có $f(g(x)) = g(x)$ thì cố gắng tìm các điểm bất động của hàm f (xem bài toán 2.137 ở trang 191).
- Nếu một vế có chứa $f(x)$ và vế còn lại có chứa biến x bên ngoài thì thông thường f là đơn ánh (chẳng hạn xem bài toán 2.114 ở trang 175, bài toán 2.135 ở trang 190, bài toán 2.121 ở trang 180, bài toán 2.137 ở trang 191).
- Nếu trong phương trình hàm có chứa $x + y$ và $x - y$ thì ta thường đặt $u = x + y$ và $v = x - y$ (chẳng hạn xem bài toán 2.47 ở trang 115, bài toán 2.45 ở trang 114).
- Phương pháp phân li biến số: Nếu $f(x) = f(y)$, với mọi x thuộc tập xác định D thì f là hàm hằng (xem bài toán 2.41 ở trang 111, 2.45 ở trang 114, 2.40 ở trang 111).
- Kết quả của bài toán 2.169 ở trang 218 được sử dụng nhiều.
- Phương pháp thế giá trị đặc biệt còn được sử dụng nhiều đối với phương trình hàm mang bóng dáng của các công thức lượng giác. Bạn đọc hãy tìm hiểu thêm kĩ thuật này ở bài 2.9: Phương trình hàm trong lớp hàm lượng giác (bắt đầu từ trang 337).
- Đối với phương trình hàm chứa cặp biến tự do x, y và chứa nhiều ẩn hàm, chẳng hạn hai ẩn hàm f và g, ta thường phân li biến số hoặc cho y (hoặc x) bằng một số nào đó để biểu diễn hàm f theo g, sau đó thay vào phương trình hàm đã cho để đưa về còn một ẩn hàm (chẳng hạn bài toán 2.66 ở trang 132, mục 2.7.8 ở trang 303, trong bài 2.9 ở trang 337: Phương trình hàm trong lớp hàm lượng giác cũng có nhiều bài toán phương trình hàm với hai ẩn hàm).

2.1.2 Làm quen với phép thế giá trị đặc biệt

Đối với phương trình hàm với cặp biến tụ do x và y thì phép thế giá trị đặc biệt được sử dụng nhiều nhất.

- Các phép thế thường được sử dụng là $x = y = 0$, $x = y = \pm 1$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $x = \pm y$, $x = \pm f(y)$,...
- Tính các giá trị đặc biệt của hàm số $f(x)$, chẳng hạn: $f(0)$, $f(\pm 1)$, $f(2)$,... Đôi khi $f(0)$ hoặc $f(1)$ không tính được, ta có thể đặt chúng bằng các chữ (tham số).

- Bởi vì khi thế các giá trị đặc biệt vào phương trình hàm đã cho ta sẽ thu được các hệ quả, sau đó ta kết nối các hệ quả đó với nhau để thu được dạng $f(x)$ nên lời giải của bài toán giải phương trình hàm thường được bắt đầu bằng mệnh đề "Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài". Khi tìm được biểu thức của hàm số, ta phải thử lại rồi mới được kết luận.

Bài toán 2.1. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(xy) = yf(x), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Đặt $f(1) = C$. Trong (1) cho $x = 1$ ta được $f(y) = Cy$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Vậy $f(x)$ có dạng

$$f(x) = Cx, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } C \text{ là hằng số).} \quad (2)$$

Thử lại thấy (2) thỏa mãn (1). Vậy hàm số cần tìm là

$$f(x) = Cx, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } C \text{ là hằng số tùy ý).}$$

Bài toán 2.2. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(xy) = y^{2011} f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Đặt $f(1) = C$. Trong (1) cho $x = 1$ ta được $f(y) = Cy^{2011}$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Vậy $f(x)$ có dạng

$$f(x) = Cx^{2011}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } C \text{ là hằng số).} \quad (2)$$

Thử lại thấy (2) thỏa mãn (1). Hàm số cần tìm là

$$f(x) = Cx^{2011}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } C \text{ là hằng số).}$$

Bài toán 2.3. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(xy) = y^{\sqrt{2}} f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0. \quad (1)$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Đặt $f(1) = C$. Trong (1) cho $x = 1$ được $f(y) = Cy^{\sqrt{2}}$, $\forall y \in (0; +\infty)$. Vậy nếu $x > 0$ thì $f(x)$ có dạng

$$f(x) = Cx^{\sqrt{2}} \text{ (với } C \text{ là hằng số).}$$

Trong (1) cho $x = -1$ ta được $f(-y) = y^{\sqrt{2}} f(-1)$, $\forall y > 0$. Đặt $f(-1) = D$, và thay $y = -u$ ta được $f(u) = D(-u)^{\sqrt{2}}$, $\forall u < 0$. Hay

$$f(x) = D(-x)^{\sqrt{2}}, \forall x < 0.$$

Trong (1) cho $x = 0$ và $y = 3$ ta được $f(0) = 3^{\sqrt{2}} f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$. Vậy

$$f(x) = \begin{cases} Cx^{\sqrt{2}} & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ D(-x)^{\sqrt{2}} & \text{nếu } x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

Thử lại thấy (2) thỏa mãn (1). Vậy hàm số cần tìm là

$$f(x) = \begin{cases} Cx^{\sqrt{2}} & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ D(-x)^{\sqrt{2}} & \text{nếu } x < 0 \end{cases} \quad \text{với } C \text{ và } D \text{ là hằng số bất kì.}$$

Bài toán 2.4. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x + y) = f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Đặt $f(0) = C$. Trong (1) cho $x = 0$ ta được $f(y) = C, \forall y \in \mathbb{R}$. Vậy $f(x)$ có dạng

$$f(x) = C, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } C \text{ là hằng số).} \quad (2)$$

Thử lại thấy (2) thỏa mãn (1). Vậy hàm số cần tìm là

$$f(x) = C, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } C \text{ là hằng số).}$$

Bài toán 2.5. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x + y) = y + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Đặt $f(0) = C$. Trong (1) cho $x = 0$ ta được $f(y) = y + C, \forall y \in \mathbb{R}$. Vậy $f(x)$ có dạng

$$f(x) = x + C, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } C \text{ là hằng số).} \quad (2)$$

Thử lại thấy (2) thỏa mãn (1). Vậy hàm số cần tìm là

$$f(x) = x + C, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } C \text{ là hằng số).}$$

Bài toán 2.6 (AHSME-1997). *Cho hàm f thỏa mãn điều kiện*

$$f(0) = 2 \text{ và } f(x + y) = x + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Tìm $f(1998)$.

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Trong (1) cho $y = 0$ ta thu được $f(x) = x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn (1). Do đó $f(1998) = 2000$.

Bài toán 2.7. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(xy) = f(x) + y, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Đặt $f(1) = C$. Trong (1) cho $x = 1$ ta được $f(y) = y + C, \forall y \in \mathbb{R}$. Vậy $f(x)$ có dạng

$$f(x) = x + C, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } C \text{ là hằng số).} \quad (2)$$

Thử lại: Thay (2) vào (1) ta được

$$xy + C = x + y + C, \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow xy = x + y, \forall x, y \in \mathbb{R},$$

Điều này không đúng, chẳng hạn $2.3 \neq 2 + 3$. Vậy không có hàm số nào thỏa mãn đề bài.

Cách khác. Trong (1) lấy $y = 1$, suy ra không có hàm số nào thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài toán 2.8. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x + y) = f(x)y, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Đặt $f(0) = C$. Trong (1) cho $x = 0$ ta được $f(y) = Cy, \forall y \in \mathbb{R}$. Vậy

$$f(x) = Cx, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } C \text{ là hằng số).} \quad (2)$$

Thử lại: Thay (2) vào (1) ta được $C(x + y) = Cxy, \forall x, y \in \mathbb{R}$. (3)
Nếu $C \neq 0$ thì không thể có (3). Dễ thấy $C = 0$ thỏa mãn (3). Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Cách khác. Trong (1) lấy $y = 0$, suy ra đáp số.

Bài toán 2.9. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x + y) = f(x)2015^y, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Đặt $f(0) = C$. Trong (1) cho $x = 0$ được $f(y) = C2015^y, \forall y \in \mathbb{R}$. Vậy

$$f(x) = C2015^x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } C \text{ là hằng số).} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) thấy thỏa mãn. Vậy hàm số thỏa mãn đề bài có dạng

$$f(x) = C2015^x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } C \text{ là hằng số).}$$

Bài toán 2.10. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to (0; +\infty)$ thỏa mãn*

$$f(x + y) = [f(x)]^y, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Vì $f(x) \in (0;+\infty)$ nên $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Đặt $f(0) = C > 0$. Trong (1) cho $x = 0$ ta được $f(y) = C^y, \forall y \in \mathbb{R}$. Vậy $f(x)$ có dạng

$$f(x) = C^x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } C \text{ là hằng số dương).} \quad (2)$$

Thử lại: Thay (2) vào (1) ta được $C^{x+y} = C^{xy}, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Vậy $C = 1$. Do đó có duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Cách khác. Trong (1) lấy $y = 0$, suy ra đáp số.

Bài toán 2.11. *Tìm tất cả các hàm* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f(x+y) = f(x)e^{f(y)-1}, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Thay $y = 0$ vào (1) ta được $f(x) = f(x)e^{f(0)-1} \Leftrightarrow f(x)\left[1 - e^{f(0)-1}\right]$. Nhận xét rằng hàm $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn đề bài. Xét trường hợp $f(x) \not\equiv 0$. Khi đó tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) \neq 0$, suy ra $f(0) = 1$. Trong (1) lấy $x = 0$ ta được $f(y) = f(0)e^{f(y)-1} = e^{f(y)-1}, \forall y \in \mathbb{R}$. Hay

$$f(x) = e^{f(x)-1}, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Xét hàm số $g(t) = e^{t-1} - t, \forall t \in \mathbb{R}$. Bằng cách tính $g'(t)$, lập bảng biến thiên của hàm g ta kết luận: $g(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Vậy từ (2) ta có $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Tóm lại, tất cả các hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.12. *Tìm tất cả các hàm* $f : (0;+\infty) \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f(x^y) = yf(x), \forall x, y \in (0;+\infty) \quad (1)$$

Giải. Đặt $f(2) = C$. Trong (1) cho $x = 2$ ta được $f(2^y) = Cy, \forall y > 0$. Với $y > 0$ đặt $2^y = u$. Khi đó $u > 1$ và $y = \log_2 u$. Vậy $f(u) = C\log_2 u, \forall u > 1$. Do đó

$$f(x) = C\log_2 x, \forall x \in (1;+\infty) \text{ (với } C \text{ là hằng số).} \quad (2)$$

Đặt $f(\frac{1}{3}) = D$. Trong (1) cho $x = \frac{1}{3}$ ta được $f((\frac{1}{3})^y) = Dy, \forall y \in (0;+\infty)$. Với $y \in (0;+\infty)$ đặt $\left(\frac{1}{3}\right)^y = u$. Khi đó $0 < u < 1$ và $y = \log_{\frac{1}{3}} u$. Vậy $f(u) = D\log_{\frac{1}{3}} u = E.\log_2 u, \forall u \in (0;1)$ (với $E = D.\log_{\frac{1}{3}} 2$) hay

$$f(x) = E\log_2 x, \forall x \in (0;1) \text{ (với } E \text{ là hằng số).} \quad (3)$$

Trong (1) lấy $x = 1$ và $y = 2$ ta được $f(1) = 2f(1) \Leftrightarrow f(1) = 0$. Do đó kết hợp (2) và (3) ta được $f(x) = A.\log_2 x, \forall x \in (0;+\infty)$ (A là hằng số). Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.13. *Tìm tất cả các hàm* $f : (0;+\infty) \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f(xy) = f(x) + \ln y, \forall x, y \in (0;+\infty) \quad (1)$$

Giải. Đặt $f(1) = C$. Trong (1) cho $x = 1$ được $f(y) = C + \ln y, \forall y \in (0;+\infty)$. Vậy $f(x)$ có dạng $f(x) = C + \ln x, \forall x \in (0;+\infty)$ (với C là hằng số). (2)
Thử lại thấy (2) thỏa mãn (1). Vậy hàm số cần tìm có dạng

$$f(x) = C + \ln x, \forall x \in (0;+\infty)$$

Bài toán 2.14. *Tìm tất cả các hàm* $f : (0;+\infty) \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f(xy) = yf(x) + xy\ln y, \forall x, y \in (0;+\infty) \quad (1)$$

Giải. Trong (1) cho $x = 1$ ta được $f(y) = f(1)y + y\ln y, \forall y \in (0;+\infty)$. Vậy

$$f(x) = Cx + x\ln x, \forall x \in (0;+\infty) \text{ (với } C \text{ là hằng số).} \quad (2)$$

Thử lại: Thay (2) vào (1) ta được

$$Cxy + xy\ln(xy) = y(Cx + x\ln x) + xy\ln y, \ \forall x, y \in (0;+\infty)$$
$$\Leftrightarrow xy\ln(xy) = xy\ln x + xy\ln y, \ \forall x, y \in (0;+\infty) \ (\text{đúng}).$$

Vậy các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài đều có dạng:

$$f(x) = Cx + x\ln x, \forall x \in (0;+\infty) \text{ (với } C \text{ là hằng số).}$$

Bài toán 2.15. *Tìm tất cả các hàm* $f : (0;+\infty) \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f(x^y) = yx^{1-y}f(x), \forall x, y \in (0;+\infty). \quad (1)$$

Giải. Trong (1) cho $x = 3$, ta được $f(3^y) = 3^{1-y}f(3)y, \forall y \in (0;+\infty)$. (2)
Với mọi $y \in (0;+\infty)$, đặt $3^y = u$. Khi đó $u > 1$ và $y = \log_3 u$. Từ (2) ta có:

$$f(u) = 3^{1-\log_3 u}f(3)\log_3 u = 3.u^{-1}f(3)\log_3 u = 3f(3)\frac{\log_3 u}{u}, \forall u > 1.$$

Vậy $f(x)$ có dạng: $f(x) = C\frac{\ln x}{x}, \forall x \in (1;+\infty)$ (với C là hằng số). (3)
Trong (1) cho $x = b$, với $0 < b < 1$ ta được

$$f(b^y) = b^{1-y}f(b)y, \forall y \in (0;+\infty).$$

Với mọi $y \in (0;+\infty)$, đặt $b^y = u$. Khi đó $0 < u < 1$ và $y = \log_b u$. Vậy

$$f(u) = b^{1-\log_b u}f(b)\log_b u = b.u^{-1}f(b)\log_b u = bf(b)\frac{\log_b u}{u}, \forall u \in (0;1).$$

Vậy $f(x)$ có dạng: $f(x) = D\dfrac{\ln x}{x}$, $\forall x \in (0;1)$ (với D là hằng số). (4)

Trong (1) lấy $x = 1$ và $y = 2$ ta được $f(1) = 2f(1) \Leftrightarrow f(1) = 0$. Từ đây kết hợp với (3) và (4) ta được $f(x) = C\dfrac{\ln x}{x}$, $\forall x \in (0;+\infty)$ (với C là hằng số). Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy hàm số cần tìm có dạng

$$f(x) = C\frac{\ln x}{x},\ \forall x \in (0;+\infty) \text{ (với } C \text{ là hằng số).}$$

Bài toán 2.16 (Turkey National Olympiad First Round 2012). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x)f(y)f(z) = 12f(xyz) - 16xyz,\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1), thay bộ (x, y, z) bởi bộ $(1, 1, 1)$, ta được

$$[f(1)]^3 = 12f(1) - 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) = -4 \\ f(1) = 2. \end{array}\right.$$

Trong (1), thay bộ (x, y, z) bởi bộ $(x, 1, 1)$, ta được

$$\begin{aligned} &[f(1)]^2 f(x) = 12f(x) - 16x,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &f(x) = \frac{-16x}{[f(1)]^2 - 12},\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2)$$

- Khi $f(1) = -4$, thay vào (2), ta được $f(x) = -4x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.
- Khi $f(1) = 2$, thay vào (2), ta được $f(x) = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Kết luận : các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$f(x) = -4x,\ \forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f(x) = 2x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.17. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y)f(z) = f(x)\,[f(y) + f(z)],\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Từ (1) cho $y = z = 0$ ta được: $f(x)f(0) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. (2)

- Dễ thấy $f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.
- Xét $f(x) \not\equiv 0$, khi đó tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Từ (2) cho $x = x_0$ ta được $f(0) = 0$. Từ (1) cho $z = 0$ được $f(x)f(y) = 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Từ đây cho $y = x_0$ ta được $f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, mâu thuẫn với trường hợp đang xét.

Vậy $f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ là hàm số duy nhất thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 2.18 (Estonian 2003-2004). *Tìm tất các các hàm số*

$$f : (0;+\infty) \to (0;+\infty)$$

thỏa mãn: $f(x)f(y) = f(xy) + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y},\ \forall x, y \in (0;+\infty)$. (1)

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Trong (1), chọn $y = 1$ ta thu được $f(x)f(1) = f(x) + \dfrac{1}{x} + 1,\ \forall x \in (0;+\infty)$. (2)

Từ (2) chọn $x = 1$ ta được

$$[f(1)]^2 = f(1) + 2 \Leftrightarrow [f(1)]^2 - f(1) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 2 \text{ (do } f(1) > 0).$$

Thay $f(1) = 2$ vào (2) ta được $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}, \forall x \in (0;+\infty)$. Sau khi thử lại ta kết luận: Có duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}, \forall x \in (0;+\infty).$$

Bài toán 2.19 (Moldova National Olympiad 2008). *Tìm tất cả các hàm số $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, thỏa mãn $f(2008) = 1$ và*

$$f(x)f(y) + f\left(\frac{2008}{x}\right)f\left(\frac{2008}{y}\right) = 2f(xy),\ \forall x, y \in (0;+\infty). \quad (1)$$

Giải. Trong (1) cho $x = y = 1$ và sử dụng $f(2008) = 1$, ta được

$$[f(1)]^2 + 1 = 2f(1) \Leftrightarrow f(1) = 1.$$

Trong (1) cho $y = 1$, suy ra với mọi $x > 0$, ta có

$$f(x) + f\left(\frac{2008}{x}\right) = 2f(x) \Leftrightarrow f\left(\frac{2008}{x}\right) = f(x).$$

Vậy (1) trở thành: $2f(x)f(y) = 2f(xy),\ \forall x, y \in (0;+\infty)$. Hay:

$$f(x)f(y) = f(xy),\ \forall x, y \in (0;+\infty). \quad (2)$$

Từ (1), lấy $y = \dfrac{2008}{x}$, suy ra với mọi $x > 0$, ta có

$$2f(x)f\left(\frac{2008}{x}\right) = 2 \Rightarrow f(x)f\left(\frac{2008}{x}\right) = 1 \Rightarrow [f(x)]^2 = 1. \quad (3)$$

Từ (2), cho $y = x$, ta được $[f(x)]^2 = f(x^2), \forall x > 0$. Từ đây, sử dụng (3), ta được $f(x^2) = 1, \forall x > 0$, hay $f(x) = 1, \forall x > 0$. Thử lại, thấy hàm số $f(x) = 1, \forall x > 0$, thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 2.20 (Olympic toán Oxtrâylia năm1995). *Tìm tất cả các hàm số* $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn các điều kiện sau đây*

$$f(1)=\frac{1}{2} \text{ và } f(xy)=f(x)f(\frac{3}{y})+f(y)f(\frac{3}{x}),\ \forall x,y\in(0;+\infty). \quad (1)$$

Giải. Giả sử hàm f thỏa mãn yêu cầu đề bài. Trong (1) lấy $y=1$ ta được

$$f(x)=f(x)f(3)+\frac{1}{2}f(\frac{3}{x}),\ \forall x\in(0;+\infty). \quad (2)$$

Trong (2) lấy $x=3$ ta được $f(3)=[f(3)]^2+(\frac{1}{2})^2\Leftrightarrow f(3)=\frac{1}{2}$. Thay vào (2) ta được $f(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(\frac{3}{x})\ \forall x\in(0;+\infty)$. Hay $f(x)=f(\frac{3}{x}),\forall x>0$. Do đó (1) trở thành: $f(xy)=2f(x)f(y),\ \forall x,y\in(0;+\infty)$. (3)
Trong (3) thay y bởi $\frac{3}{x}$ ta được $f(3)=2f(x)f(\frac{3}{x}),\ \forall x,y\in(0;+\infty)$. Do đó $[f(x)]^2=\frac{1}{4}$. Trong (3) thay y bởi x được

$$f(x^2)=2f(x)f(x)=2[f(x)]^2=2.\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

Từ đây suy ra với $x>0$ ta có $f(x)=\frac{1}{2}$. Đó là hàm số duy nhất thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

Bài toán 2.21 (HSG Tp Hồ Chí Minh, năm học 2002-2003). *Tìm các hàm số* $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ *thỏa mãn*

$$f(1)=\frac{1}{2}, f(xy)=f(x)f(\frac{2}{y})+f(y)f(\frac{2}{x}),\ \forall x,y\in(0;+\infty).$$

Bài toán 2.22 (Ôlympic Toán Châu Phi năm 2013). *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn:* $f(x)f(y)+f(x+y)=xy,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. (1)

Giải. Dễ thấy hàm số $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ không thỏa mãn (1). Do đó giả sử $f(x)\equiv 0$, tức là tồn tại $a\in\mathbb{R}$ sao cho $f(a)\neq 0$. Trong (1) lấy $x=a,\ y=0$, ta được: $f(a)f(0)+f(a)=0\Leftrightarrow f(a)[f(0)+1]=0\overset{\text{do } f(a)\neq 0}{\Rightarrow} f(0)=-1$.
Trong (1) lấy $x=1,\ y=-1$, ta được: $f(1)f(-1)-1=-1\Leftrightarrow f(1)f(-1)=0$.
• Khi $f(1)=0$. Trong (1) thay x bởi $z-1$, thay y bởi 1, ta được

$$f(z)=z-1,\ \forall z\in\mathbb{R}.$$

Thử lại thấy hàm số $f(x)=x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.
• Khi $f(1)\neq 0\Rightarrow f(-1)=0$. Trong (1) thay x bởi $x+1$, thay y bởi -1, ta

được $f(x)=-x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy hàm số $f(x)=-x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.
Kết luận : các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x)=x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}\ ; f(x)=-x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Lưu ý. Bài toán 2.22 này tương tự như bài toán 2.109 (ở trang 169).

Bài toán 2.23 (Japan Mathematical Olympiad Finals-2012). *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *sao cho*

$$f\big(f(x+y)f(x-y)\big)=x^2-yf(y),\forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Từ (1) cho $x=y=0$ ta thu được $f\big(f^2(0)\big)=0$. Từ (1) cho $x=0$, $y=f^2(0)$, kết hợp với kết quả $f\big(f^2(0)\big)=0$ ta thu được $f(0)=0$. Từ (1) cho $x=y$ ta thu được

$$x^2-xf(x)=0\Rightarrow f(x)=x \text{ với mọi } x\neq 0.$$

Thêm việc $f(0)=0$ suy ra $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại đúng.

Bài toán 2.24. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f\left(x^2-y^2\right)=x^2-f\left(y^2\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (1). Thực hiện $P(0,0)$ ta được $f(0)=0$. Thực hiện $P(x,0)$ ta được $f(x^2)=x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$$P\left(\frac{x+1}{2},\frac{x-1}{2}\right)\Rightarrow f(x)=\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-f\left(\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right)$$
$$=\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2=x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Vậy $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.25. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f\left(x+f(y+z)\right)+f\left(f(x+y)+z\right)=2y,\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Kí hiệu $P(u,v,w)$ chỉ việc thay $(x;y;z)$ bởi $(u;v;w)$ vào phương trình hàm (1). Đặt $f(0)=a$.

$$P\left(x-a,\frac{a-x}{2},\frac{x-a}{2}\right)\Rightarrow f(x)+f\left(f\left(\frac{x-a}{2}\right)+\frac{x-a}{2}\right)=a-x. \quad (2)$$
$$P\left(\frac{x-a}{2},0,\frac{x-a}{2}\right)\Rightarrow f\left(f\left(\frac{x-a}{2}\right)+\frac{x-a}{2}\right)=0. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $f(x)=a-x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.26. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f(y)+f\left(f(y)+x\right)=y+f\left(f\left(f(y)\right)+f(x)\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Trong (1) thay x bởi $f(x)$ và thay y bởi 0 ta được

$$f(0)+f\left(f(0)+f(x)\right)=f\left(f\left(f(0)\right)+f\left(f(x)\right)\right),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Trong (1) thay x bởi $f(0)$ và thay y bởi x ta được

$$f(x)+f\left(f(x)+f(0)\right)=x+f\left(f\left(f(x)\right)+f\left(f(0)\right)\right),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Từ (2) và (3) suy ra $f(x)=x+f(0)$. Vậy $f(x)=x+a,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (1) ta được: $y+a+y+a+x+a=y+y+2a+x+a+a\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Hay:

$$2y+3a+x=2y+4a+x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Vậy $a=0$, do đó hàm số cần tìm là $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Bài toán 2.27. *Tìm tất cả các hàm* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f(f(x)+y)=yf(x-f(y)),\forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Đặt $f(0)=a$. Thay $y=0$ vào (1) ta được $f(f(x))=0,\forall x\in\mathbb{R}$. Thay x bởi $f(y)$ vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&f\left(f(f(y))+y\right)=yf(0)=ay,\forall y\in\mathbb{R}\\ \Rightarrow&f(y)=ay,\forall y\in\mathbb{R}\quad(\text{do } f\left(f(y)\right)=0,\forall y\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Tìm a ?

Cách 1. Thay x bởi $f(x)$ vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&f(f(f(x))+y)=yf(f(x)-f(y)),\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\ \Rightarrow&f(y)=yf(f(x)-f(y)),\forall x,y\in\mathbb{R}\\ \Rightarrow&a=f(0)=0.f(f(x)-f(0))=0.\end{aligned}$$

Cách 2. Thay $f(x)=ax$ vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&a[f(x)+y]=ya(x-f(y)),\forall x,y\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&a[ax+y]=ya(x-ay),\forall x,y\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&a^2(x+y^2)+a(y-yx)=0,\forall x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Chọn $x=y=1$ ta được $a=0$.

Cách 3. Thay $x=y=1$ vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&f(1+f(1))=f(1-f(1))\Rightarrow a(1+f(1))=a(1-f(1))\\ \Rightarrow&2af(1)=0\overset{\text{do } f(1)=a}{\Rightarrow}a^2=0\Rightarrow a=0.\end{aligned}$$

Cách 4. Ta có $f(x)=ax,\forall x\in\mathbb{R}$. Thay x bởi $f(x)$ ta được

$$\begin{aligned}&f(f(x))=af(x),\forall x\in\mathbb{R}\\ \Rightarrow&af(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}\ (\text{do }\ f(f(x))=0,\forall x\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Dễ thấy $f(x)\equiv 0$ thỏa (1). Còn nếu $f(x)\not\equiv 0$ thì $a=0$.
Vậy cả 4 cách ta đều có $a=0$, suy ra $f(x)\equiv 0$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.28. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(xy+f(z)\right)=\frac{xf(y)+yf(x)}{2}+z,\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Trong (1) lấy $x=y=z=0$ ta được $f\left(f(0)\right)=0$. Trong (1) lấy $x=1$, $y=z=0$ ta được $f\left(f(0)\right)=\dfrac{f(0)}{2}\Rightarrow f(0)=0$. Trong (1) lấy $y=1$, $z=0$ ta được

$$\begin{aligned}&f\left(x+f(0)\right)=\frac{xf(1)+f(x)}{2},\ \forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&f(x)=\frac{xf(1)+f(x)}{2},\ \forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&f(x)=f(1)x,\ \forall x\in\mathbb{R}\\ \Rightarrow&f(x)=ax,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \text{với } a=f(1).\end{aligned}$$

Thay vào (1) được

$$\begin{aligned}&a\left(xy+az\right)=\frac{xay+yax}{2}+z,\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&axy+a^2z=axy+z,\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&a^2z=z,\ \forall z\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&a=\pm1.\end{aligned}$$

Vậy có hai hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}\text{ và }f(x)=-x,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 2.29. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f(xf(y)+x)=xy+f(x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Trong (1) thay $x=1$ ta được: $f(f(y)+1)=y+f(1),\ \forall y\in\mathbb{R}$. (2)
Trong (2) thay y bởi $-1-f(1)$ ta được $f(f(-1-f(1))+1)=-1$. Đặt

$$1+f(-1-f(1))=a,\ f(0)=b.$$

Ta có $f(xf(a)+x)=f(0)=b$. Hay

$$b=f(xf(a)+x)=ax+f(x)\Rightarrow f(x)=-ax+b.$$

Thay biểu thức của $f(x)$ vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&-a(xf(y)+x)+b=xy-ax+b,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&-a[x(-ay+b)+x]+b=xy-ax+b,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&a^2xy-abx-ax+b=xy-ax+b,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Bằng cách đồng nhất các hệ số ta được

$$\left\{\begin{array}{l}a^2=1\\ ab+a=a\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a^2=1\\ ab=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}a=1\\ b=0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}a=-1\\ b=0.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Vậy $f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(x)=-x,\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Lưu ý. Do $f(xf(y)+x)=f(x(f(y)+1))$ nên để có $f(0)$ ta cần chọn y để $f(y)=-1$. Trong (1) đã có $xy+f(x)$, vậy sẽ chọn x sao cho $xy+f(x)=-1$, chẳng hạn chọn $x=1$ ta được $y=-1-f(1)$. Từ đó $f(f(-1-f(1))+1)=-1$, số y cần tìm ở trên là $f(-1-f(1))+1$ và ta có lời giải đã trình bày. Nếu chọn x là số khác, ví dụ chọn $x=2$, vẫn với ý tưởng trên ta có lời giải khác:

- Thay $x=2, y=\dfrac{-1-f(2)}{2}$ ta có $f\left(2f\left(\dfrac{-1-f(2)}{2}\right)+2\right)=-1$.
- Đặt $2f\left(\dfrac{-1-f(2)}{2}\right)+2=a$. Thay $y=a$ vào giả thiết ta có

$$f(0)=f(xf(a)+x)=ax+f(x)\Leftrightarrow f(x)=f(0)-ax=b-ax.$$

Bài toán 2.30. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(xf(y)+x)=4xy+f(x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Hướng dẫn. Tương tự bài toán 2.29.

Bài toán 2.31. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(xy)+f(x-y)+f(x+y+1)=xy+2x+1,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Đặt $f(0)=a$. Trong (1) thay $y=-1$ ta được

$$f(-x)+f(x+1)+f(x)=x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Trong (1) thay $y=0$ ta được: $a+f(x)+f(x+1)=2x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. (3)
Từ (2) và (3) suy ra $f(-x)=a-x,\forall x\in\mathbb{R}$. Do đó: $f(x)=a+x,\forall x\in\mathbb{R}$.
Thử lại: Thay $f(x)=x+a$ vào (1) ta được

$$xy+a+x-y+a+x+y+1+a=xy+2x+1\Rightarrow a=0.$$

Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là $f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$.

Bài toán 2.32. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(2xy)+f(x-2y)+f(x+2y+1)=2xy+2x+1,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Đặt $f(0)=a$. Trong (1) thay $y=-\dfrac{1}{2}$ ta được

$$f(-x)+f(x+1)+f(x)=x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Trong (1) thay $y=0$ ta được: $a+f(x)+f(x+1)=2x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. (3)
Từ (2) và (3) suy ra $f(-x)=a-x,\forall x\in\mathbb{R}$. Do đó: $f(x)=a+x,\forall x\in\mathbb{R}$.
Thử lại: Thay $f(x)=x+a$ vào (1) ta được

$$2xy+a+x-2y+a+x+2y+1+a=2xy+2x+1\Rightarrow a=0.$$

Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là $f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$.

Bài toán 2.33. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(2xy+x)+f(3x+2y+1)+f(3x-2y+4)=2xy+7x+8,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Đặt $f(0)=a$. Trong (1) thay $y=2$ ta được

$$f(5x)+f(3x+5)+f(3x)=11x+8,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Trong (1) thay $y=-\dfrac{1}{2}$ ta được: $a+f(3x)+f(3x+5)=6x+8,\ \forall x\in\mathbb{R}$. (3)
Từ (2) và (3) suy ra $f(5x)=a+5x,\forall x\in\mathbb{R}$. Do đó: $f(x)=a+x,\forall x\in\mathbb{R}$.
Thử lại: Thay $f(x)=x+a$ vào (1) ta được

$$2xy+x+a+3x+2y+1+a+3x-2y+4+a=2xy+7x+8\Rightarrow a=1.$$

Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là $f(x)=x+1,\forall x\in\mathbb{R}$.

Bài toán 2.34. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+y)=\max\{f(x),y\}+\min\{x,f(y)\},\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u, thay y bởi v vào (1).

$$P(x,0)\Rightarrow f(x)=\max\{f(x),0\}+\min\{x,f(0)\},\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$
$$P(0,x)\Rightarrow f(x)=\max\{f(0),x\}+\min\{0,f(x)\},\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Cộng (2) với (3) và lưu ý rằng $\max\{u,v\}+\min\{u,v\}=u+v$ ta được

$$f(x)=x+f(0),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Từ (4) thay x bởi $f(0)$ ta được $f(f(0))=2f(0)$. Do đó

$$\begin{aligned}P(0,f(0))&\Rightarrow f(f(0))=f(0)+\min\{0,f(f(0))\}\\ &\Rightarrow 2f(0)=f(0)+\min\{0,2f(0)\}\\ &\Rightarrow f(0)=\min\{0,2f(0)\}\Rightarrow f(0)=0.\end{aligned}$$

Vậy $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.35. *Tìm các hàm số* $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ *thỏa mãn*

$$yf(yf(x))=f(f(x)),\forall x,y\in(0;+\infty). \quad (1)$$

Giải. Đặt $f(1)=a>0$. Thay $y=\dfrac{1}{f(x)}$ vào (1) ta được

$$\frac{1}{f(x)}f(1)=f(f(x)),\forall x\in(0;+\infty)$$
$$\Rightarrow f(f(x))=\frac{a}{f(x)},\forall x\in(0;+\infty).$$

Thay y bởi $\dfrac{1}{f(y)}$ vào (1) ta được

$$\frac{1}{f(y)}f\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)=f\left(f(x)\right)=\frac{a}{f(x)}\Rightarrow f\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)=a.\frac{f(y)}{f(x)}. \quad (2)$$

Từ (1) suy ra $y=\dfrac{f(f(x))}{f(yf(x))}$. Do đó kết hợp với (2) được

$$f(y)=f\left(\frac{f\left(f(x)\right)}{f\left(yf(x)\right)}\right)=a\frac{f\left(yf(x)\right)}{f\left(f(x)\right)}=a.\frac{1}{y}=\frac{a}{y}.$$

Vậy $f(x)=\dfrac{a}{x},\forall x\in(0;+\infty)$. Thử lại thấy thỏa mãn. Hàm số cần tìm là

$$f(x)=\frac{a}{x},\forall x\in(0;+\infty)\ \text{(với } a \text{ là hằng số dương bất kì)}.$$

Lưu ý. Từ giả thiết ta có $y=\dfrac{f\left(f(x)\right)}{f\left(yf(x)\right)}$, $\forall x,y>0$, suy ra

$$(0;+\infty)=\left\{\frac{f(u)}{f(v)}\middle|u>0,\ v>0\right\}.$$

Vì thế ta cần tìm: $f\left(\dfrac{f(x)}{f(y)}\right)=\dfrac{1}{f(y)}f\left(\dfrac{f(x)}{f(y)}\right).f(y)=f\left(f(x)\right).f(y)$.

Từ đây nảy sinh nhu cầu phải tìm $f\left(f(x)\right)$ trước.

Bài toán 2.36 (Đề nghị thi Olympic 30/4/2011). *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn phương trình hàm*

$$f\left(f(x)+y^2\right)=f^2(x)-f(x)f(y)+xy+x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Từ (1) lần lượt cho $y=1$, $y=-1$ ta được:

$$f\left(f(x)+1\right)=f^2(x)-f(x)f(1)+2x,\ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (2)$$

$$f\left(f(x)+1\right)=f^2(x)-f(x)f(-1),\ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (3)$$

Từ (1) và (2) suy ra $f(x)f(1)-2x=f(x)f(-1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, hay

$$\left[f(1)-f(-1)\right]f(x)=2x,\ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (4)$$

Nếu $f(1)-f(-1)=0$ thì từ (4) lấy $x=2$ dẫn tới vô lí, vậy $f(1)-f(-1)\neq 0$.

Từ (4) suy ra $f(x)=cx$, $\forall x\in\mathbb{R}$, với $c=\dfrac{2}{f(1)-f(-1)}$. Thay vào (1) ta được: $c\left(cx+y^2\right)=c^2x^2-c^2xy+xy+x$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$. Từ đây lấy $x=0$ và $y=1$ ta được $c=0$. Vậy $f(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (1) thấy không thỏa mãn, do đó không có hàm số nào thỏa mãn yêu cầu đề bài.

2.1.3 Sử dụng tính chất đối xứng của các biến

- Nếu hệ thức đã cho có tính đối xứng giữa các biến thì cố gắng hoán vị các biến với nhau, cho $y=x$ (chẳng hạn xem bài toán 2.41 ở trang 111, bài toán 2.135 ở trang 190, bài toán 2.80 ở trang 142...).
- Nếu một bộ phận nào đó trong phương trình hàm đối xứng đối với x và y thì nên thay x bởi y và thay y bởi x, nghĩa là hoán vị x và y (chẳng hạn xem bài toán 2.89 ở trang 150).
- Đôi khi ta chỉ cần sử dụng tính đối xứng ở một vế hay một bộ phận nào đó của phương trình hàm đã cho.

Bài toán 2.37. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn:*

$$f\left(f(x+y)\right)=x+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Trong (1) thay x bởi y và thay y bởi x ta được: $f\left(f(x+y)\right)=y+f(x)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra: $x+f(y)=y+f(x)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$. (3)
Từ (3) lấy $y=0$ được: $f(x)=x+C$, $\forall x\in\mathbb{R}$ (với $C=f(0)$). Thay vào (1) ta được: $x+y+2C=x+y+C$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ hay $C=0$. Vậy hàm số cần tìm là

$$f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 2.38. *Tìm các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn:* $f\left(f(1)\right)=1$ *và:*

$$f\Big(m+f\big(f(n)\big)\Big)=-f\big(f(m+1)\big)-n,\ \forall m,n\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Kí hiệu $f_2(m)=f\big(f(m)\big)$. Trong (1) thay m bởi $f_2(m)$, ta được:

$$f\big(f_2(m)+f_2(n)\big)=-f_2\big(f_2(m)+1\big)-n,\ \forall m,n\in\mathbb{R}. \quad (2)$$

Trong (2) thay hoán vị m, n với nhau ta được:

$$f\big(f_2(m)+f_2(n)\big) = -f_2\big(f_2(n)+1\big) - m,\ \forall m,n \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Từ (2) và (3) suy ra:

$$\begin{aligned} & f_2\big(f_2(m)+1\big)+n = f_2\big(f_2(n)+1\big)+m,\ \forall m,n\in\mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & m-n = f_2\big(f_2(m)+1\big) - f_2\big(f_2(n)+1\big),\ \forall m,n\in\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4}$$

Trong (1) cho $m=1$, ta được:

$$\begin{aligned} & f\big(1+f_2(n)\big) = -f_2(2) - n,\ \forall n\in\mathbb{R} \\ \Rightarrow & f_2\big(1+f_2(n)\big) = f\big(-f_2(2)-n\big) = f(-k-n),\ \forall n\in\mathbb{R}\ \ (k=f_2(2)). \end{aligned} \tag{5}$$

Kết hợp (4) và (5) suy ra: $m-n = f(-k-m) - f(-k-n)$. Lấy $n=-k$, ta được: $m+k = f(-k-m) - f(0),\ \forall m\in\mathbb{R}$, hay:

$$f(n) = -n + C,\ \forall n\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Thay (6) vào (1), ta được:

$$\begin{aligned} & -[m+f(f(n))] + C = f(m+1) - C - n,\ \forall m,n\in\mathbb{R} \\ \Rightarrow & -m + f(n) - C + C = -m - 1 + C - C - n,\ \forall m,n\in\mathbb{R} \\ \Rightarrow & -m - n + C = -m - n - 1,\ \forall m,n\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy $C=-1$. Do đó: $f(n) = -n-1,\ \forall n\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

2.1.4 Phương pháp phân li biến số

Nhiều bài toán phương trình hàm được giải bằng cách sử dụng kết quả sau: Nếu $f(x)=f(y), \forall x,y\in D$ và $x\neq y$ thì f là hàm hằng trên D.

Bài toán 2.39. *Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$(x+y)[f(x)-f(y)] = (x-y)[f(x)+f(y)],\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} (1) & \Leftrightarrow -xf(y)+yf(x) = xf(y) - yf(x),\ \forall x,y\in\mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow xf(y) = yf(x),\ \forall x,y\in\mathbb{R} \qquad (2) \\ & \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y},\ \forall x\neq 0, y\neq 0. \qquad (3) \end{aligned}$$

Từ (3) cho $y=1$ ta được: $f(x)=cx,\ \forall x\neq 0$ $(c=f(1)$ là hằng số). (4)
Từ (2) lấy $x=1$ và $y=0$ ta được $f(0)=0$. Kết hợp với (4) ta được

$$f(x) = cx,\ \forall x\in\mathbb{R}\ \ (c=f(1) \text{ là hằng số}). \tag{5}$$

Thay (5) vào (1) thấy thỏa mãn. Vậy hàm số cần tìm là

$$f(x) = cx,\ \forall x\in\mathbb{R}\ \ (c \text{ là hằng số tùy ý}).$$

Bài toán 2.40. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện*

$$f(2010x - f(y)) = f(2009x) - f(y) + x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Trong (1) thay $(x;y)$ bởi $(0;0)$ ta được $f(-f(0)) = 0$. Trong (1) lấy $y=-f(0)$ ta được: $f(2010x) = f(2009x) + x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned} & f(2010x - f(y)) = f(2010x) - f(y), \forall x,y\in\mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & f(x - f(y)) = f(x) - f(y), \forall x,y\in\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3}$$

Đặt $x - f(y) = u \Rightarrow f(y) = x - u$, thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned} & f(u) = f(x) - x + u, \forall x,u\in\mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & f(u) - u = f(x) - x, \forall x,u\in\mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & f(x) - x \equiv c. \end{aligned}$$

Vậy $f(x) = x + c,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (c là hằng số tùy ý). Thử lại thấy thỏa mãn.
Lưu ý. Dạng tổng quát của bài toán trên là

$$f(ax - bf(y)) = bf(cx) - bf(y) + dx,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 2.41 (Đề thi HSG tỉnh Gia Lai, năm học 2007-2008). *Tìm tất cả các hàm số $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x)f(y) = xf\left(\frac{y}{2}\right) + yf\left(\frac{x}{2}\right), \forall x,y\in(0;+\infty). \tag{1}$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Trong (1), lấy $x=y$, ta được

$$(f(x))^2 = 2xf\left(\frac{x}{2}\right), \forall x\in(0;+\infty).$$

Suy ra $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{[f(x)]^2}{2x}, \forall x\in(0;+\infty)$. Thay vào (1), ta được

$$\begin{aligned} & f(x)f(y) = x\frac{[f(y)]^2}{2y} + y\frac{[f(x)]^2}{2x}, \forall x,y\in(0;+\infty) \\ \Rightarrow & \left[\frac{\sqrt{x}f(y)}{\sqrt{2y}}\right]^2 - f(x)f(y) + \left[\frac{\sqrt{y}f(x)}{\sqrt{2x}}\right]^2, \forall x,y\in(0;+\infty) \\ \Leftrightarrow & \left[\frac{\sqrt{x}f(y)}{\sqrt{2y}} - \frac{\sqrt{y}f(x)}{\sqrt{2x}}\right]^2 = 0, \forall x,y\in(0;+\infty) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}f(y)}{\sqrt{2y}} = \frac{\sqrt{y}f(x)}{\sqrt{2x}}, \forall x, y \in (0; +\infty)$$
$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}, \forall x, y \in (0; +\infty).$$

Bởi vậy, $\frac{f(x)}{x}$ là hằng số, do đó $f(x) = ax, \forall x \in (0; +\infty)$ (với a là hằng số). Thay vào (1), ta được $ax.ay = ax\frac{y}{2} + ay\frac{x}{2} = axy, \forall x, y \in (0; +\infty)$. Hay $a \in \{0, 1\}$. Vậy có hai hàm số thỏa đề bài là

$\cdot f(x) = 0, \forall x \in (0; +\infty)$ và $f(x) = x, \forall x \in (0; +\infty)$.

Bài toán 2.42 (Bangladesh MO-2012). *Tìm các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mà*

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)[f(x) + f(y)], \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Từ (1) cho $x = y$ ta được $f(0) = 0$. Từ (1) cho $y = 0$ ta được

$$f(x^2) = x[f(x) + f(0)] = xf(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đây ta có

$$f(x^2) = -xf(-x) \Rightarrow xf(x) = -xf(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \neq 0.$$

Kết hợp $f(0) = 0$ ta được $f(-x) = -f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết ta có

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)[f(x) + f(y)] = xf(x) - yf(y) + xf(y) - yf(x) \quad (2)$$
$$f(x^2 - y^2) = f\left(x^2 - (-y)^2\right) = (x + y)[f(x) + f(-y)] = (x + y)[f(x) - f(y)]$$
$$= xf(x) - yf(y) + yf(x) - xf(y). \quad (3)$$

Kết hợp (2) và (3) ta được: $xf(y) - yf(x) = yf(x) - xf(y)$. Hay:

$$xf(y) = yf(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}, \ \forall x \neq 0, y \neq 0.$$

Từ đây suy ra $f(x) = cx, \forall x \neq 0$. Kết hợp với $f(0) = 0$ ta được

$$f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } c \text{ là hằng số)}.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.43 (Pan African 2012). *Tìm các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mà*

$$f(x^2 - y^2) = (x + y)[f(x) - f(y)], \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Từ (1) cho $x = y$ ta được $f(0) = 0$. Từ (1) cho $y = 0$ ta được

$$f(x^2) = x[f(x) - f(0)] = xf(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đây ta có

$$f(x^2) = -xf(-x) \Rightarrow xf(x) = -xf(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \neq 0.$$

Kết hợp $f(0) = 0$, ta được: $f(-x) = -f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết ta có

$$f(x^2 - y^2) = (x + y)[f(x) - f(y)] = xf(x) - yf(y) - xf(y) + yf(x) \quad (2)$$
$$f(x^2 - y^2) = f\left(x^2 - (-y)^2\right) = (x - y)[f(x) - f(-y)] = (x - y)[f(x) + f(y)]$$
$$= xf(x) - yf(y) - yf(x) + xf(y). \quad (3)$$

Kết hợp (2) và (3) ta được: $xf(y) - yf(x) = yf(x) - xf(y)$. Hay:

$$xf(y) = yf(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}, \ \forall x \neq 0, y \neq 0.$$

Từ đây suy ra $f(x) = cx, \forall x \neq 0$. Kết hợp với $f(0) = 0$ ta được

$$f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } c \text{ là hằng số)}.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.44. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$xf(y) - yf(x) = f\left(\frac{y}{x}\right), \ \forall x \neq 0, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) cho $x = 2$ và $y = 0$ ta được $2f(0) = f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$. Từ (1) cho $x = y = 1$ ta được $f(1) = 0$. Từ (1) cho $y = 1$ ta được

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x), \ \forall x \neq 0. \quad (2)$$

Từ (1) thay y bởi $\frac{1}{x}$ và sử dụng (2) ta được

$$-xf(x) - \frac{1}{x}f(x) = -f(x^2), \ \forall x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow f(x^2) = \left(x + \frac{1}{x}\right)f(x), \ \forall x \neq 0. \quad (3)$$

Từ (1) ta có $x^2 f(y^2) - y^2 f(x^2) = f\left(\frac{y^2}{x^2}\right), \ \forall x \neq 0, y \in \mathbb{R}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra với mọi $x \neq 0$ và $y \neq 0$ ta có

$$x^2\left(y + \frac{1}{y}\right)f(y) - y^2\left(x + \frac{1}{x}\right)f(x) = \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right)[xf(y) - yf(x)]$$

$$\Leftrightarrow x^2yf(y) - y^2xf(x) = yf(y) - xf(x)$$
$$\Leftrightarrow (x^2-1)yf(y) = (y^2-1)xf(x). \quad (5)$$

Từ (5) lấy $x = 2$ và $y = -1$ ta được $f(-1) = 0$. Từ (5) suy ra

$$\frac{yf(y)}{y^2-1} = \frac{xf(x)}{x^2-1},\ \forall x, y \notin \{1, -1\}$$
$$\Rightarrow \frac{xf(x)}{x^2-1} = C,\ \forall x \notin \{1, -1\}\ (C \text{ là hằng số})$$
$$\Rightarrow f(x) = C\left(x - \frac{1}{x}\right),\ \forall x \notin \{1, -1\}.$$

Từ đó $f(x) = \begin{cases} C\left(x - \dfrac{1}{x}\right) & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0. \end{cases}$ Thử lại thấy thỏa mãn.

2.1.5 Phép thế tổng-hiệu

Phép đặt $u = x + y$, $v = x - y$ là một trong những phép đặt cơ bản, thường gặp trong giải phương trình hàm cũng như giải phương trình. Khi đặt như vậy thì các biểu thức sau được tính theo u và v:

$u + v = 2x$	$u - v = 2y$
$uv = x^2 - y^2$	$u^2 + v^2 = 2\left(x^2 + y^2\right)$
$u^3 + v^3 = 2\left(x^3 + 3y^2x\right)$	$u^3 - v^3 = 2y\left(3x^2 + y^2\right)$
$u^4 + v^4 = 2\left(x^4 + 6x^2y^2 + y^4\right)$	$u^4 - v^4 = 8xy\left(x^2 + y^2\right)$
$u^5 + v^5 = 2x\left(x^4 + 10x^2y^2 + 5y^4\right)$	$u^5 - v^5 = 2y\left(5x^4 + 5x^2y^2 + y^4\right)$.

Bài toán 2.45 (Olympic Toán Sinh viên toàn quốc năm 2011). *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2-y^2), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Với hai số thực u, v ta đặt $x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{u-v}{2}$. Khi đó $u = x + y$, $v = x - y$. Do đó (1) tương đương với

$$vf(u) - uf(v) = (u+v)(u-v)uv, \forall u, v \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \frac{f(u)}{u} - \frac{f(v)}{v} = (u+v)(u-v) = u^2 - v^2, \forall u \neq 0,\ v \neq 0$$
$$\Rightarrow \frac{f(u)}{u} - u^2 = \frac{f(v)}{v} - v^2, \forall u \neq 0,\ v \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x} - x^2 = a, \forall x \neq 0 \text{ (với } a \text{ là hằng số).}$$

Suy ra $f(x) = x^3 + ax, \forall x \neq 0$. Trong (1), lấy $x = y = 2$ ta được

$$-4f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

Vậy $f(x) = x^3 + ax, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Cách khác. Trong (1) thay x bởi $x + 1$ và y bởi x ta được

$$f(2x+1) = f(1)(2x+1) + 4x(x+1)(2x+1), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Trong (2), thay $2x + 1$ bởi u, ta được

$$f(u) = f(1)u + (u-1)(u+1)u = u^3 + [f(1) - 1]u, \forall u \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Hay $f(x) = x^3 + ax, \forall x \in \mathbb{R}$ (a là hằng số). Thử lại thấy thỏa mãn.

Lưu ý. Bài toán 2.45 còn được giải tương tự như bài toán 2.303 ở trang 348.

Bài toán 2.46. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y) - f(x-y) = 2y\left(3x^2 + y^2\right),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Đặt $u = x + y$, $v = x - y$. Khi đó $x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{u-v}{2}$. Ta có: $u^3 - v^3 = 2y\left(3x^2 + y^2\right)$. Thay vào (1) ta được

$$f(u) - f(v) = u^3 - v^3, \forall u, v \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f(u) - u^3 = f(v) - v^3, \forall u, v \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f(u) - u^3 \equiv C\ (C \text{ là hằng số})$$
$$\Leftrightarrow f(x) \equiv x^3 + C.$$

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy tất cả các hàm số cần tìm đều có dạng

$$f(x) = x^3 + C, \forall x \in \mathbb{R}\ (C \text{ là hằng số tùy ý}).$$

Bài toán 2.47 (Baltic Way 2012). *Tìm các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f(x+y) = f(x-y) + f\left(f(1-xy)\right), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Kí hiệu $P(u, v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (1).

$$P(x,0) \Rightarrow f\left(f(1)\right) = 0$$
$$P(0,y) \Rightarrow f(y) = f(-y), \forall y \in \mathbb{R} \quad (2)$$
$$P(x,1) \Rightarrow f(x+1) = f(x-1) + f\left(f(1-x)\right), \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f(x+1) = f(x-1) + f\left(f(x-1)\right), \forall x \in \mathbb{R}\ (\text{do } (2)). \quad (3)$$

Do đó:

$$f(x+2) = f(x) + f(f(x)) \overset{\text{do}}{\underset{(2)}{=}} f(-x) + f(f(-x))$$
$$\overset{\text{do}}{\underset{(3)}{=}} f(-x+2) \overset{\text{do}}{\underset{(2)}{=}} f(x-2), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Mặt khác: $P(x,2) \Rightarrow f(x+2) = f(x-2) + f(f(1-2x)), \forall x \in \mathbb{R}$. Kết hợp với (4) ta được: $f(f(1-2x)), \forall x \in \mathbb{R}$ hay $f(f(x)), \forall x \in \mathbb{R}$ (do tương ứng $x \mapsto 1-2x$ là song ánh). Như vậy (1) trở thành:

$$f(x+y) = f(x-y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Với mọi u, v thuộc $\mathbb{R}$, đặt: $\begin{cases} \dfrac{u+v}{2} = x \\ \dfrac{u-v}{2} = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = u \\ x-y = v. \end{cases}$ Do đó:

$$f(u) = f(x+y) \overset{\text{do}}{\underset{(5)}{=}} f(x-y) = f(v), \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Như vậy f là hàm hằng: $f(x) \equiv c$. Thay vào (1), ta được: $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2.1.6 Phép thế triệt tiêu

Nhiều khi ta phải sử dụng các phép thế có thể giản ước được hai vế của phương trình hàm. Từ đó ta tìm được một đẳng thức đơn giản hơn. Nếu muốn khử hai biểu thức $f(\psi(x,y)), f(\varphi(x,y))$ ở hai vế của phương trình hàm, ta xét phương trình $\psi(x,y) = \varphi(x,y) \Rightarrow y = \lambda(x)$, để thay y bởi $\lambda(x)$ vào phương trình hàm (xem bài toán 2.48 ở trang 116, bài toán 2.49 ở trang 117, bài toán 2.54 ở trang 121...)

Bài toán 2.48. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x + f(y)) = 2f(xf(y)), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u, thay y bởi v vào (1). Dễ thấy hàm $f(x) \equiv 1$ không thỏa mãn (1). Tiếp theo giả sử $\exists u \in \mathbb{R} : f(u) \neq 1$.

$$P\left(\frac{f(u)}{f(u)-1}, u\right) \Rightarrow f\left(\frac{f(u)}{f(u)-1} + f(u)\right) = 2f\left(\frac{f(u)}{f(u)-1}.f(u)\right)$$
$$\Rightarrow f\left(\frac{f^2(u)}{f(u)-1}\right) = 0 \Rightarrow f(v) = 0, \text{ với } v = \frac{f^2(u)}{f(u)-1}.$$

Thực hiện $P(0,v)$ ta được $f(0) = 2f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$. Từ đây thực hiện $P(x,v)$ ta được $f(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.49 (Olympic toán sinh viên toàn quốc-2012). *Tìm các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm*

$$f\left(\frac{x+y}{2012}\right) = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x}{2013}\right) + f\left(\frac{y}{2014}\right)\right], \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Từ (1) thay $(x;y)$ bởi $(2014x; 2014y)$ ta được

$$f(\alpha(x+y)) = \frac{1}{2}[f(\beta x) + f(y)], \forall x, y \in \mathbb{R} \ \left(\alpha = \frac{2014}{2012}, \ \beta = \frac{2014}{2013}\right). \quad (2)$$

Đặt $g(x) = f(x) - f(0)$. Khi đó $g(0) = 0$ và thay vào (2) ta được

$$g(\alpha(x+y)) = \frac{1}{2}[g(\beta x) + g(y)], \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Từ (2) suy ra

$$\begin{aligned} g(\alpha(x+y)) &= g(\alpha(x+y+0)) = f(\alpha(x+y+0)) - f(0) \\ &= \frac{1}{2}[f(\beta(x+y)) + f(0)] - f(0) \\ &= \frac{1}{2}[f(\beta(x+y)) - f(0)] = \frac{1}{2}g(\beta(x+y)), \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra: $g(\beta(x+y)) = g(\beta x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. (5)

Từ (5) thay y bởi $\dfrac{\beta x}{1-\beta}$ ta được $g(\beta x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ hay $g(x) \equiv 0$. Vậy f là hàm hằng. Thử lại thấy thỏa mãn.

Lưu ý. Từ (5) để khử $g(\beta(x+y))$ và $g(y)$, ta xét phương trình

$$\beta(x+y) = y \Leftrightarrow y = \frac{\beta x}{1-\beta}.$$

Vậy từ (5) nếu thay y bởi $\dfrac{\beta x}{1-\beta}$, chắc chắn sẽ triệt tiêu $g(\beta(x+y))$ và $g(y)$.

Bài toán 2.50 (Middle European Mathematical Olympiad 2012). *Tìm tất cả các hàm số $f : (0;+\infty) \to (0;+\infty)$ thỏa mãn*

$$f(x + f(y)) = yf(xy+1), \forall x, y \in (0;+\infty). \quad (1)$$

Giải. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (1).

Cách 1. Giả sử $\dfrac{f(y)-1}{y-1} > 0$, khi đó

$$P\left(\frac{f(y)-1}{y-1}, y\right) \Rightarrow f\left(\frac{yf(y)-1}{y-1}\right) = yf\left(\frac{yf(y)-1}{y-1}\right) \Rightarrow y = 1.$$

đến đây ta gặp mâu thuẫn. Vậy $\frac{f(y)-1}{y-1} < 0, \forall y \in (0;+\infty)\backslash\{1\}$. (i)

Xét $y > 1$.

$$P\left(1-\frac{1}{y}, y\right) \Rightarrow f(1-\frac{1}{y}+f(y)) = yf(y), \forall y > 1. \quad (ii)$$

• Nếu $f(y) > \frac{1}{y}$ thì $1+f(y)-\frac{1}{y} > 1 \Rightarrow f(1+f(y)-\frac{1}{y}) \overset{do(ii)}{=} yf(y) > 1$, mâu thuẫn với (i).

• Nếu $f(y) < \frac{1}{y}$ thì $0 < 1+f(y)-\frac{1}{y} < 1 \Rightarrow f(1+f(y)-\frac{1}{y}) \overset{do(ii)}{=} yf(y) < 1$, mâu thuẫn với (i).

Từ hai trường hợp trên dẫn tới $f(y) = \frac{1}{y}, \forall y > 1$. $(3i)$.

Bây giờ xét $x > 0$, ta có

$$\frac{1}{1+f(x)} \overset{do(3i)}{=} f(1+f(x)) \overset{do(1)}{=} xf(x+1) \overset{do(3i)}{=} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow 1+f(x) = 1+\frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0.$$

Thử lại thấy hàm số $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Cách 2. Xét $x > 1$.

$$P\left(\frac{x-1}{x}, f(x)\right) \Rightarrow f\left(\frac{x-1}{x}+f(x)\right) = xf(x), \forall x > 1. \quad (2)$$

Thực hiện $P\left(x, \frac{x-1}{x}+f(x)\right)$, ta được

$$f\left(x+f\left(\frac{x-1}{x}+f(x)\right)\right) = \left[\frac{x-1}{x}+f(x)\right] f(x+xf(x)), \forall x > 1. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$\frac{x-1}{x}+f(x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1-\frac{x-1}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 1. \quad (4)$$

Đến đây làm tương tự như ở cách 1.

Lưu ý.

• Từ "kết cấu" của phương trình hàm (1) ta dự đoán $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0$.

• Để $f(x+f(y)) = f(xy+1)$, ta xét phương trình

$$x+f(y) = xy+1 \Rightarrow x = \frac{f(y)-1}{y-1}.$$

• Do dự đoán được $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0$ nên ta cần chứng minh $yf(y) = 1$. Vậy từ (1) thấy rằng cần có $yf(xy+1) = yf(y)$, vì thế xét

$$xy+1 = y \Rightarrow x = \frac{y-1}{y} = 1-\frac{1}{y}.$$

Bài toán 2.51. *Cho α, β là hai số không âm có tổng bằng 1. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm*

$$f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x)+\beta f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Đặt $g(x) = f(x)-f(0)$, khi đó g là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ và $g(0) = 0$. Thay vào (1) ta được

$$g(\alpha x+\beta y)+f(0) = \alpha g(x)+\beta g(y)+(\alpha+\beta)f(0), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow g(\alpha x+\beta y) = \alpha g(x)+\beta g(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Lấy $x \in \mathbb{R}$ tùy ý. Nếu $0 \le \lambda \le 1$ thì

$$g(\lambda x) = g((1-\lambda)0+\lambda x) \overset{\text{theo (2)}}{=} (1-\lambda)g(0)+\lambda g(x) = \lambda g(x). \quad (3)$$

Với $\gamma > 1$, ta có $0 < \frac{1}{\gamma} < 1$, $0 < 1-\frac{1}{\gamma} < 1$. Do vậy

$$g(x) = g\left((1-\frac{1}{\gamma})0+\frac{1}{\gamma}(\gamma x)\right) \overset{\text{theo (2)}}{=} (1-\frac{1}{\gamma})g(0)+\frac{1}{\gamma}g(\gamma x) = \frac{1}{\gamma}g(\gamma x)$$
$$\Rightarrow g(\gamma x) = \gamma g(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Để ý rằng

$$0 = g(0) = g\left(\frac{1}{2}(-x)+\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}g(-x)+\frac{1}{2}g(x) \Rightarrow g(-x) = -g(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Với $\mu < 0$ ta có $-\mu > 0$, do vậy theo (3) và (4) ta có

$$g(\mu x) = g(-\mu(-x)) = -\mu g(-x) = -\mu(-g(x)) = \mu g(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Từ (3), (4), (5) suy ra: $g(kx) = kg(x), \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{R}$. (6)
Từ (6) lấy $x = 1$ ta được $g(k) = g(1)k, \forall k \in \mathbb{R}$, suy ra $g(x) = \varepsilon x, \forall x \in \mathbb{R}$.
Dẫn tới kết quả $f(x) = \varepsilon x+f(0)$. Vậy

$$f(x) = \varepsilon x+\delta, \ \forall x \in \mathbb{R} \ (\varepsilon, \delta \text{ là hằng số tùy ý}).$$

Thử lại thấy thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Lưu ý.

- Từ bài toán này suy ra hàm số vừa lồi vừa lõm trên toàn trục số khi và chỉ khi nó có dạng $f(x) = \varepsilon x + \delta$, $\forall x \in \mathbb{R}$, với ε, δ là hằng số tùy ý (hàm hằng hoặc hàm đa thức bậc nhất).

- Việc xét hàm g như trên có đầy đủ các tính chất của hàm f, ngoài ra còn có thêm tính chất $g(0) = 0$, giúp ta giải được bài toán này. Việc xét hàm g như vậy cũng là một kĩ thuật thường dùng khi giải phương trình hàm mà việc tính $f(0)$ là gặp khó khăn hoặc không thể.

- Cho trước đoạn $[a; b]$. Khi đó $x \in [a; b]$ khi và chỉ khi $x = \alpha a + \beta b$, với a và b là hai số không âm có tổng bằng 1.

Bài toán 2.52. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f\left(yf(x) + x\right) + f\left(xf(y) - y\right) = f(x) - f(y) + 2xy, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Kí hiệu $P(u, v)$ chỉ việc thay $(x; y)$ bởi $(u; v)$ vào (1).

$$P(0,0) \Rightarrow f(0) = 0 \ ; \ P(0,x) \Rightarrow f(-x) = -f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Giả sử $f(a) = 0$. Khi đó

$$P(a,a) \Rightarrow f(a) + f(-a) = f(a) - f(a) + 2a^2 \Leftrightarrow 2a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Vậy ta đã chứng minh được $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Xét $x \neq 0$. Khi đó $f(x) \neq 0$. Lần lượt thực hiện $P\left(x, \dfrac{x+y}{f(x)}\right)$, $P\left(\dfrac{x+y}{f(x)}, -x\right)$ ta được

$$f(2x+y) + f\left(xf\left(\frac{x+y}{f(x)}\right) - \frac{x+y}{f(x)}\right) = f(x) - f\left(\frac{x+y}{f(x)}\right) + \frac{2x(x+y)}{f(x)}.$$

$$f\left(-xf\left(\frac{x+y}{f(x)}\right) + \frac{x+y}{f(x)}\right) - f(y) = f\left(\frac{x+y}{f(x)}\right) + f(x) - \frac{2x(x+y)}{f(x)}.$$

Cộng hai đẳng thức trên và sử dụng (2) ta được

$$f(2x+y) = 2f(x) + f(y), \ \forall y \in \mathbb{R}, \ x \neq 0. \tag{3}$$

Do $f(0) = 0$ nên từ (3) suy ra: $f(2x+y) = 2f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. (4)

Với mọi số thực $\overline{x}$, $\overline{y}$, xét $x = y = \dfrac{2\overline{x} + \overline{y}}{3}$, khi đó $2x + y = 3x = 2\overline{x} + \overline{y}$. Vì thế từ (4) cho $x = y = \dfrac{2\overline{x} + \overline{y}}{3}$ ta được

$$f\left(2\overline{x} + \overline{y}\right) = 3f\left(\frac{2\overline{x} + \overline{y}}{3}\right), \ \forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(2x+y) = 3f\left(\frac{2x+y}{3}\right), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Từ (4) và (5) suy ra: $f\left(\dfrac{2x+y}{3}\right) = \dfrac{2f(x) + f(y)}{3}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. (6)

Từ (6), sử dụng bài toán 2.51 ở trang 119 ta được

$$f(x) = ax + b, \ \forall x \in \mathbb{R} \ (a, \ b \text{ là những hằng số}).$$

Do $f(0) = 0$ nên $b = 0$. Thay $f(x) \equiv ax$ vào (1) ta được

$$a\left(axy + x\right) + a\left(axy - y\right) = ax - ay + 2xy, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2a^2xy = 2xy, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Vậy $a = \pm 1$. Do đó $f(x) \equiv x$, $f(x) \equiv -x$. Thử lại thấy cả hai hàm này đều thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 2.53. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f\left(xf(y) + y\right) + f(xy + x) = f(x+y) + 2xy, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Thay $x = 1$, $y = \dfrac{1}{2}$ vào (1) ta được $f(a) = 1$, trong đó $a = f\left(\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2}$. Thay $y = a$ vào (1) ta được $f(x+a) + f(ax+x) = f(x+a) + 2ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$, hay

$$f(ax + x) = 2ax, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ (2) suy ra $a \neq -1$. Thay $x = \dfrac{t}{a+1}$ vào (2) ta được $f(t) = \dfrac{2at}{a+1}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Như vậy $f(x) = cx$, $\forall x \in \mathbb{R}$, với $c = \dfrac{2a}{a+1}$. Thay vào (1) ta được

$$c\left(cxy + y\right) + c(xy + x) = c(x+y) + 2xy, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left(c^2 + c - 2\right)xy = 0, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow c^2 + c - 2 = 0 \Leftrightarrow c \in \{1, -2\}.$$

Ta nhận được hai hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x) \equiv x$ và $f(x) \equiv -2x$.

Bài toán 2.54 (Macedonia MO-2011). *Tìm các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho*

$$f\big(x + yf(x)\big) = f\big(f(x)\big) + xf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Dễ thấy hàm $f(x) \equiv 0$ thỏa (1). Tiếp theo giả sử $f(x) \not\equiv 0$. Từ (1) cho $x = 0$ ta được $f\big(yf(0)\big) = f\big(f(0)\big)$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Nếu $f(0) \neq 0$, thay y bởi $\dfrac{y}{f(0)}$, ta suy ra

$$f(y) = f\big(f(0)\big), \ \forall y \in \mathbb{R}$$

hay nói cách khác f là hàm hằng. Khi đó, từ (1), ta dễ dàng suy ra f đồng nhất bằng 0, mâu thuẫn. Vậy ta phải có $f(0) = 0$. Giả sử tồn tại $a \neq 0$ để

$f(a) = 0$, thay $x = a$ trong (1), ta được $f(a+0) = f(0) + af(y)$. Suy ra $af(y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$ (vì $f(a) = f(0) = 0$). Hay f đồng nhất bằng 0, mâu thuẫn. Như vậy $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Trong (1) thay y bởi $\dfrac{f(x)-x}{f(x)}$ (với $x \neq 0$) ta được

$$f\big(f(x)\big) = f\big(f(x)\big) + xf\Big(\frac{f(x)-x}{f(x)}\Big) \Rightarrow f\Big(\frac{f(x)-x}{f(x)}\Big) = 0 \Rightarrow f(x) = x,\ \forall x \neq 0.$$

Vậy có hai hàm số thỏa mãn (1) là $f(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv x$. Thử lại đúng.

Bài toán 2.55. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+y) - f(x-y) = f(x)f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Kí hiệu $P(u, v)$ chỉ việc thay $(x; y)$ bởi $(u; v)$ vào (1). $P(0,0) \Rightarrow f(0) = 0$.

$$P(x,-y) \Rightarrow f(x-y) - f(x+y) = f(x)f(-y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta có: $f(x)f(-y) = -f(x)f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. (3)
Từ (3) cho $x = y$ được: $f(y)f(-y) = -f^2(y),\ \forall y \in \mathbb{R}$. (4)

$$P(y,y) \Rightarrow f(2y) = f^2(y),\ \forall y \in \mathbb{R}.$$
$$P(-y,y) \Rightarrow -f(-2y) = f(-y)f(y),\ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Sử dụng (4) suy ra $f(2y) = f(-2y),\ \forall y \in \mathbb{R}$ hay $f(-x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào (4) ta được $f^2(x) = -f^2(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$ hay $f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

2.1.7 Sự khác nhau khi giải phương trình hàm và giải phương trình

Chẳng hạn từ các giả thiết của một bài toán phương trình hàm, ta thu được:

$$[f(x) - x]\,[f(x) + x] = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{*}$$

trong đó f là hàm số cần tìm. Từ (*) ta chỉ kết luận được, với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì giá trị của hàm f tại x là x hoặc $-x$, chứ không được suy ra các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$ sau đó thử lại và kết luận. Khi gặp trường hợp này ta xử lí như sau: kiểm tra xem các hàm số $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$ có thỏa mãn yêu cầu đề bài hay không, sau đó chứng minh ngoài hai hàm này ra không còn hàm nào khác, phương pháp thường dùng là phản chứng. Tuy nhiên cũng có trường hợp hàm f mà $f(x)$ lúc thì nhận giá trị x, lúc thì nhận giá trị $-x$ cũng thỏa mãn yêu cầu đề bài, những bài toán như vậy là hiếm gặp và rất khó, chẳng hạn bài toán 2.64 (ở trang 130).

Bài toán 2.56 (Olympic toán quốc tế-2008). *Tìm tất cả các hàm số*

$$f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$$

thỏa mãn $\dfrac{[f(p)]^2 + [f(q)]^2}{f(r^2) + f(s^2)} = \dfrac{p^2+q^2}{r^2+s^2},\ \forall p, q, r, s > 0,$ *và* $pq = rs.$ (1).

Giải. Trong (1) lấy $p = q = r = s = 1$ ta được $\dfrac{2[f(1)]^2}{2f(1)} = 1$. Suy ra $f(1) = 1$.
Với mọi $x > 0$, lấy $p = x, q = 1, r = s = \sqrt{x}$ ta được

$$\frac{[f(x)]^2+1}{2f(x)} = \frac{x^2+1}{2x} \Rightarrow x[f(x)]^2 + x = x^2 f(x) + f(x)$$
$$\Rightarrow [xf(x) - 1][f(x) - x] = 0,\ \forall x \in (0; +\infty). \tag{2}$$

Ta kiểm tra được $f(x) = x,\ \forall x \in (0; +\infty)$ và $f(x) = \dfrac{1}{x},\ \forall x \in (0; +\infty)$ là nghiệm (thỏa mãn) của (1). Ta sẽ chứng minh rằng ngoài ra không còn nghiệm nào khác. Giả sử $f(x)$ là một nghiệm khác với hai nghiệm trên, nghĩa là tồn tại $0 < a \neq 1$ sao cho $f(a) \neq a$ và tồn tại $0 < b \neq 1$ sao cho $f(b) \neq \dfrac{1}{b}$.
Từ (2) suy ra: $f(a) = \dfrac{1}{a}$, và $f(b) = b$. (3)
Cũng từ (2) ta có $f(ab) = ab$ hoặc $f(ab) = \dfrac{1}{ab}$.

- Nếu $f(ab) = ab$ thì trong (1) lấy $p = a, q = b, r = s = \sqrt{ab}$ ta được

$$\frac{1}{a^2} + b^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} = a^2 \Leftrightarrow a^4 = 1 \Leftrightarrow a = 1.$$

Do $f(1) = 1$ và $a = 1$ nên suy ra $f(a) = a$, mâu thuẫn với $f(a) \neq a$.

- Nếu $f(ab) = \dfrac{1}{ab}$ thì trong (1) lấy $p = a, q = b, r = s = \sqrt{ab}$ ta được

$$a^2b^2\Big(\frac{1}{a^2} + b^2\Big) = a^2 + b^2 \Leftrightarrow b^2 + a^2b^4 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2b^4 = a^2 \Leftrightarrow b = 1.$$

Do $f(1) = 1$ và $b = 1$ nên suy ra $f(b) = \dfrac{1}{b}$, điều này mâu thuẫn với $f(b) \neq \dfrac{1}{b}$.
Vậy chỉ có hai hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x) = x,\ \forall x \in (0; +\infty) \text{ và } f(x) = \frac{1}{x},\ \forall x \in (0; +\infty).$$

Chú ý 1. *Thấy ngay rằng $f(x) = x, \forall x > 0$ thỏa mãn (1), điều này định hướng cho ta tìm ra đẳng thức (2). Từ (2) chưa thể kết luận về biểu thức của hàm số. Bạn đọc lưu ý rằng (2) chỉ khẳng định rằng với $x > 0$ thì giá trị của hàm số tại điểm x là x hoặc $\dfrac{1}{x}$. Các bạn xem bài toán tiếp theo sau đây.*

Bài toán 2.57 (Switzerland Final Round 2011). *Tìm tất cả các hàm số* $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$, *thỏa mãn : với các số dương* a,b,c,d *sao cho* $abcd=1$, *ta có*

$$[f(a)+f(b)]\,[f(c)+f(d)]=(a+b)(c+d). \tag{1}$$

Giải. Kí hiệu $P(x,y,z,t)$ chỉ việc thay a bởi x, thay b bởi y, thay c bởi z và thay d bởi t vào (1).

$$P(1,1,1,1)\Rightarrow 4[f(1)]^2=4\Leftrightarrow f(1)=1 \text{ (do } f(1)>0).$$

$$P\left(x,\frac{1}{x},1,1\right)\Rightarrow f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\frac{1}{x},\forall x>0. \tag{2}$$

$$P\left(x,1,\frac{1}{x},1\right)\Rightarrow [f(x)+1]\left[f\left(\frac{1}{x}\right)+1\right]=(x+1)\left(\frac{1}{x}+1\right),\forall x>0.$$

Như vậy: $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)+1=1+x+\frac{1}{x}+1,\forall x>0.$

Kết hợp với (2), ta được $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=1,\forall x>0.$ (3)

Thay (3) vào (2), ta được:

$$f(x)+\frac{1}{f(x)}=x+\frac{1}{x},\forall x>0$$

$$\Leftrightarrow [f(x)]^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)f(x)+1=0,\forall x>0$$

$$\Leftrightarrow [f(x)-x]\left[f(x)-\frac{1}{x}\right]=0,\forall x>0. \tag{4}$$

Dễ thấy rằng các hàm số $f(x)=x,\forall x>0,\quad f(x)=\frac{1}{x},\forall x>0$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Ta sẽ chứng minh ngoài hai hàm số này ra, không còn hàm nào khác thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Giả sử hàm số f thỏa mãn yêu cầu đề bài và tồn tại $0<a\neq 1$ sao cho $f(a)\neq a$ và tồn tại $0<b\neq 1$ sao cho $f(b)\neq\frac{1}{b}$. Khi đó từ (4) suy ra $f(a)=\frac{1}{a}$, $f(b)=b$. Thực hiện $P\left(a,b,\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$, ta được

$$\left[\frac{1}{a}+b\right]\left[f\left(\frac{1}{a}\right)+f\left(\frac{1}{b}\right)\right]=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$\Rightarrow\left[\frac{1}{a}+b\right]\left[\frac{1}{f(a)}+\frac{1}{f(b)}\right]=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$\Rightarrow\left[\frac{1}{a}+b\right]\left[a+\frac{1}{b}\right]=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{ab}+ab+1=1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\Rightarrow\frac{1}{ab}+ab=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow 1+a^2b^2=a^2+b^2\Rightarrow(a^2-1)(b^2-1)=0.$$

Đến đây ta gặp mâu thuẫn. Vậy chỉ có hai hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x)=x,\forall x>0$ và $f(x)=\frac{1}{x},\forall x>0$.

Bài toán 2.58 (Olympic toán Canada - 2000). *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn:* $f((x-y)^2)=x^2-2yf(x)+(f(y))^2,\forall x,y\in\mathbb{R}.$ (1)

Giải. Thay $x=y=0$ vào (1) ta được $f(0)=[f(0)]^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(0)=0\\f(0)=1.\end{array}\right.$

Trường hợp 1: $f(0)=0$. Thay $x=y$ vào (1) ta được

$$f(0)=x^2-2xf(x)+[f(x)]^2,\forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow[x-f(x)]^2=0,\forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R} \text{ (thử lại thấy thỏa mãn).}$$

Trường hợp 2: $f(0)=1$. Trong (1) lấy $y=0$ ta được:

$$f(x^2)=x^2+1,\forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Trong (2) lấy $x=1$ ta được $f(1)=2$. Từ (1) lấy $y=1$ và sử dụng (2) được

$$(x-1)^2+1=x^2-2f(x)+4\Leftrightarrow f(x)=x+1, \text{ (thử lại thấy thỏa mãn).}$$

Vậy tất cả các có hai hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R} \text{ và } f(x)=x+1,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Lưu ý. Trường hợp 2 có thể được xử lí như sau: Từ (1) lấy $y=x$ ta được

$$1=x^2-2xf(x)+f^2(x)\Leftrightarrow[f(x)-x]^2=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=x+1\\f(x)=x-1.\end{array}\right. \tag{*}$$

Bằng cách thử trực tiếp ta thấy hàm số $f(x)=x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn (1), còn hàm số $f(x)=x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ không thỏa (1), tuy nhiên lời giải chưa thể kết thúc được, ta cần chứng minh $f(x)\neq x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Giả sử $\exists t\in\mathbb{R}: f(t)=t-1$. Từ (1) cho $x=t$, $y=0$ được $f(t^2)=t^2+1$. Từ (1) cho $x=0$, $y=t$ được

$$f(t^2)=-2tf(0)+f^2(t)=-2t+(t-1)^2=t^2-4t+1.$$

Vì thế $t^2+1=t^2-4t+1\Leftrightarrow t=0$. Vậy $1=f(0)=0-1$, mâu thuẫn. Vậy

$$f(x)=x+1,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 2.59. *Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$xf(x+y)+yf(y-x)=f^2(x)+f^2(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) cho $x=y=0$ ta được $f(0)=0$. Từ (1) cho $y=0$ được

$$xf(x)=f^2(x)\Leftrightarrow f(x)\left[f(x)-x\right]=0,$$

suy ra giá trị của hàm f tại x là 0 hoặc x. Từ (1) lấy $y=-x$ ta được

$$-xf(-2x)=f^2(x)+f^2(-x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (2)$$

Ta có $-xf(-2x)=0$ hoặc $2x^2$; $f^2(x)=0$ hoặc x^2; $f^2(-x)=0$ hoặc x^2.

- Trường hợp $-xf(-2x)=0$. Khi đó từ (2) suy ra $f^2(x)=f^2(-x)=0$.
- Trường hợp $-xf(-2x)=2x^2$. Khi đó từ (2) suy ra $f^2(x)=f^2(-x)=x^2$.

Tóm lại ta luôn có $f^2(x)=f^2(-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Từ đây kết hợp với (1) thu được

$$\begin{aligned}xf(x+y)+yf(y-x)&=f^2(x)+f^2(y)=f^2(-x)+f^2(y)\\&=-xf(-x+y)+yf(y+x).\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}&xf(x+y)+yf(y-x)=yf(x+y)-xf(y-x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\&\Rightarrow(x-y)f(x+y)=-(x+y)f(y-x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (3)\end{aligned}$$

Với mọi $u\neq 0$ và $v\neq 0$, luôn tồn tại x và y sao cho $\begin{cases}u=y+x\\v=y-x\end{cases}$ $\left(\text{chỉ cần chọn } x=\dfrac{u-v}{2},\ y=\dfrac{u+v}{2}\right)$. Vậy từ (3) suy ra $vf(u)=uf(v)$, $\forall u,v\neq 0$ hay

$$\frac{f(u)}{u}=\frac{f(v)}{v},\ \forall u,v\neq 0. \quad (4)$$

Từ (4) lấy $v=1$ được $\dfrac{f(u)}{u}=C$, $\forall u\neq 0$, với $C=f(1)$ là hằng số. Bởi vậy $f(u)=Cu$, $\forall u\neq 0$, suy ra $f(x)=Cx$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Do $f(x)=x$ hoặc 0 nên $C=0$ hoặc $C=1$. Với $C=0$ thì $f(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Với $C=1$ thì $f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy hai hàm số này thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài toán 2.60 (Balkan-2000). *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(xf(x)+f(y)\right)=f^2(x)+y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Từ (1) thay $x=0$ được: $f\left(f(y)\right)=f^2(0)+y$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$. (2)

Từ (2) cho $y=-f^2(0)$ và đặt $a=f(-f^2(0))$ ta được $f(a)=0$.

Từ (1) cho $x=a$ được $f\left(f(y)\right)=y$, $\forall y\in\mathbb{R}$. (3)

Từ (1) thay x bởi $f(x)$ và sử dụng (3) ta được

$$f\left(xf(x)+f(y)\right)=x^2+y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (4)$$

Từ (1) và (4) suy ra: $f^2(x)=x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. (5)

Từ (5) suy ra $f(1)=1$ hoặc $f(1)=-1$.

- Xét $f(1)=1$. Từ (1) cho $x=1$ được

$$\begin{aligned}&f\left(1+f(y)\right)=1+y,\ \forall y\in\mathbb{R}\\&\Rightarrow f^2\left(1+f(y)\right)=(1+y)^2,\ \forall y\in\mathbb{R}\\&\Rightarrow[1+f(y)]^2=1+2y+y^2,\ \forall y\in\mathbb{R}\\&\Rightarrow 1+2f(y)+y^2=1+2y+y^2,\ \forall y\in\mathbb{R}\\&\Rightarrow f(y)=y,\ \forall y\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Thử lại thấy hàm số $f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

- Xét $f(1)=-1$. Từ (1) cho $x=1$ được

$$\begin{aligned}&f\left(1-f(y)\right)=1+y,\ \forall y\in\mathbb{R}\\&\Rightarrow f^2\left(-1+f(y)\right)=(1+y)^2,\ \forall y\in\mathbb{R}\\&\Rightarrow[-1+f(y)]^2=1+2y+y^2,\ \forall y\in\mathbb{R}\\&\Rightarrow 1-2f(y)+y^2=1+2y+y^2,\ \forall y\in\mathbb{R}\\&\Rightarrow f(y)=-y,\ \forall y\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Thử lại thấy hàm số $f(x)=-x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Vậy có hai hàm số cần tìm là $f(x)\equiv x$, $f(x)=-x$.

Bài toán 2.61 (Iran -1999 ; Bắc Âu MO-2011). *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f\left(f(x)+y\right)=f\left(x^2-y\right)+4yf(x)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.* (1)

Giải. Trong (1) cho $y=\dfrac{1}{2}\left[x^2-f(x)\right]$, suy ra với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì

$$\left[x^2-f(x)\right]f(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f(x)=x^2.\end{array}\right. \quad (2)$$

Dễ thấy các hàm $f(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv x^2$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Ta sẽ chứng minh ngoài hai hàm này ra, không còn hàm nào khác, còn cách làm thì tương tự như bài toán 2.56 và bài toán 2.137. Giả sử $f(x)\not\equiv 0$ và $f(x)\not\equiv x^2$ và thỏa (1). Từ (2) lấy $x=0$ được $f(0)=0$. Từ (1) lấy $x=0$ suy ra $f(-y)=f(y)$, $\forall y\in\mathbb{R}$, hay f là hàm chẵn. Do $f(0)=0$, $f(x)\not\equiv x^2$ và do (2) nên tồn tại $a\neq 0$ sao cho $f(a)=0$. Do $f(0)=0$, $f(x)\not\equiv 0$ và do (2) nên tồn tại $b\neq 0$ sao cho $f(b)\neq 0\Rightarrow f(b)=b^2\neq 0$. Do f là hàm chẵn nên có thể giả sử $b>0$. Từ (1) lấy $x=a$, $y=-b$ ta được

$$f(-b)=f(a^2+b)\Rightarrow f(b)=f(a^2+b)\ (\text{do } f \text{ là hàm chẵn}).$$

Như vậy: $b^2=f(b)=f(-b)=f(a^2+b)\overset{\text{do } f(a^2+b)\neq 0}{\underset{\text{và do (2)}}{=\!=\!=\!=\!=}}(a^2+b)^2$.

Rõ ràng $b^2=(a^2+b)^2$ vô lí vì với $a\neq 0$, $b>0$ thì

$$0<b<a^2+b\Rightarrow b^2<(a^2+b)^2.$$

Vậy tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv x^2$.

Lưu ý. Để làm triệt tiêu $f(f(x)+y)$ và $f\left(x^2-y\right)$, ta xét

$$f(x)+y=x^2-y \Rightarrow y=\frac{1}{2}\left[x^2-f(x)\right],$$

từ đó trong (1) cho $y=\frac{1}{2}\left[x^2-f(x)\right]$ như đã trình bày ở trên.

Bài toán 2.62 (India National Olympiad 2011). *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+y)f(x-y)=[f(x)+f(y)]^2-4x^2f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (1).

$$P(0,0)\Rightarrow f^2(0)=4f^2(0)\Leftrightarrow f(0)=0.$$

Thực hiện $P(x,x)$, ta được

$$\begin{aligned}&4[f(x)]^2-4x^2f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\\ \Rightarrow&f(x)\left[f(x)-x^2\right]=0,\ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (2)\end{aligned}$$

Dễ thấy hai hàm số $f(x)=x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Ta sẽ chứng minh ngoài ra không còn hàm nào khác. Giả sử hàm f thỏa mãn (1) và $f(x)\not\equiv 0$, $f(x)\not\equiv x^2$. Khi đó tồn tại $a\neq 0$ sao cho $f(a)\neq 0$ và tồn tại $b\neq 0$ sao cho $f(b)\neq b^2$. Theo (2) suy ra $f(a)=a^2$, $f(b)=0$.

$$P(a,b)\Rightarrow f(a+b)f(a-b)=a^4\neq 0.$$

Như vậy $f(a+b)\neq 0\Rightarrow f(a+b)=(a+b)^2$; $f(a-b)\neq 0\Rightarrow f(a-b)=(a-b)^2$.

Dẫn đến: $(a+b)^2(a-b)^2=a^4\Leftrightarrow(a^2-b^2)^2=a^4\overset{\text{do } b\neq 0}{\Leftrightarrow}b^2=2a^2$.

Giả sử c là số thỏa mãn $c\notin\{0,a,-a,b,-b\}$.

- Nếu $f(c)=0$ thì theo trên suy ra $c^2=2a^2\Rightarrow c^2=b^2$, mâu thuẫn.
- Nếu $f(c)=c^2$ thì theo trên suy ra $b^2=2c^2\Rightarrow c^2=a^2$, mâu thuẫn.

Vậy ngoài hai hàm số $f(x)=x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài ra không còn hàm nào khác.

Bài toán 2.63. *Cho số nguyên dương n. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm*

$$f\left(y-f(x)\right)=f\left(x^{n+1}-y\right)-nyf(x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Thế $y=f(x)$ vào (1): $f(0)=f\left(x^{n+1}-f(x)\right)-nf^2(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. (2)

Trong (1) thay y bởi x^{n+1}: $f\left(x^{n+1}-f(x)\right)=f(0)-nx^{n+1}f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. (3)

Cộng (2) và (3) ta được $nf^2(x)+nx^{n+1}f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, hay

$$f(x)\left[f(x)+x^{n+1}\right]=0,\ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (4)$$

Ta sẽ chứng minh ngoài hai hàm $f(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv -x^{n+1}$ ra thì không còn hàm số nào khác thỏa mãn yêu cầu đề bài. Giả sử $f(x)\not\equiv 0$ và $f(x)\not\equiv -x^{n+1}$ và thỏa (1). Từ (4) cho $x=0$ được $f(0)=0$. Từ (1) cho $x=0$ suy ra f là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$. Do $f(0)=0$, $f(x)\not\equiv -x^{n+1}$ và do (4) nên tồn tại $a\neq 0$ sao cho $f(a)=0$. Do $f(0)=0$, $f(x)\not\equiv 0$ và do (4) nên tồn tại $b\neq 0$ sao cho $f(b)\neq 0$. Do f là hàm chẵn nên có thể giả sử $b>0$. Vì $f(b)\neq 0$ nên theo (4) phải có $f(b)=-b^{n+1}$. Mặt khác từ (1) lấy $x=a$ và $y=-b$ ta được $f(-b)=f(a^{n+1}+b)$. Tóm lại:

$$-b^{n+1}=f(b)=f(-b)=f(a^{n+1}+b)\overset{\text{do } f(a^{n+1}+b)=-b^{n+1}\neq 0}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}-(a^{n+1}+b)^{n+1}.$$

- Nếu n chẵn thì $n+1$ lẻ, do đó từ $b^{n+1}=(a^{n+1}+b)^{n+1}$ suy ra

$$b=a^{n+1}+b\Leftrightarrow a^{n+1}=0\Leftrightarrow a=0\ \text{(mâu thuẫn)}.$$

- Nếu n lẻ thì $n+1$ chẵn, do đó $b^{n+1}=(a^{n+1}+b)^{n+1}$ cũng vô lí, vì

$$\begin{cases}b>0,\ a\neq 0\\ n+1\text{ chẵn}\end{cases}\Rightarrow a^{n+1}+b>b\Rightarrow(a^{n+1}+b)^{n+1}>b^{n+1}.$$

Vậy để thỏa mãn (1) thì chỉ có thể $f(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv -x^{n+1}$. Thử lại thấy $f(x)\equiv 0$ thỏa (1). Còn với $f(x)\equiv -x^{n+1}$ thì (1) trở thành

$$-\left(y+x^{n+1}\right)^{n+1}=-\left(x^{n+1}-y\right)^{n+1}+nyx^{n+1},\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (5)$$

Rõ ràng (5) không đúng, vì với $x=y=1$ thì (5) trở thành $-2^{n+1}=n$, vô lí (do n nguyên dương). Vậy chỉ có một hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Lưu ý.

- Đề thi học sinh giỏi quốc gia năm 2002 đã giải quyết trường hợp $n=2001$.
- Nếu từ (1) thay y bởi $\frac{1}{2}\left[f(x)+x^{n+1}\right]$ thì ngay lập tức ta thu được (4).
- Thông thường thì từ $[f(x)-\psi(x)]\,[f(x)-\varphi(x)]=0$, ta sẽ chứng minh ngoài hai hàm $f(x)\equiv\psi(x)$, $f(x)=\varphi(x)$ ra, không còn hàm số nào khác thỏa mãn đề bài. Tuy nhiên cũng có trường hợp ngoài $f(x)\equiv\psi(x)$, $f(x)=\varphi(x)$ ra vẫn có hàm số khác, đó là

$$f(x)=\begin{cases}\psi(x) & \text{khi } x\in A\\ \varphi(x) & \text{khi } x\in B,\end{cases}$$

với A và B là hai tập hợp thỏa mãn

$$A\neq B,\ A\cup B=\mathbb{R},\ A\cap B=\{x\in D_f|\psi(x)=\varphi(x)\}$$

thì đó là bài toán rất khó, bắt buộc ta phải tìm hiểu cấu trúc của các tập hợp A và B. Bạn đọc hãy theo dõi tiếp bài toán 2.64 ngay sau đây.

Bài toán 2.64 (Đề nghị thi Olympic Toán Quốc tế -2001). *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn điều kiện*

$$f(xy)\,[f(x) - f(y)] = (x - y)\,f(x)f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Từ (1) cho $y = 1$ được

$$f(x)\,[f(x) - f(1)] = (x - 1)\,f(x)f(1),\ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f^2(x) = xf(x)f(1),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Nếu $f(1) = 0$ thì từ (2) suy ra $f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Dễ thấy hàm số này thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Tiếp theo giả sử $f(1) = C \neq 0$. Từ (2) lấy $x = 0$ được $f(0) = 0$. Đặt $G = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq 0\}$, khi đó $0 \notin G$. Theo (2) ta có

$$f(x) = f(1)x,\ \forall x \in G.$$

Như thế (1) chỉ được thỏa mãn bởi các hàm số có dạng

$$f(x) = \begin{cases} Cx, & \text{khi } x \in G \\ 0, & \text{khi } x \notin G. \end{cases} \tag{3}$$

Cần xác định cấu trúc của tập G sao cho hàm số xác định bởi (3) thỏa (1).
a) Nếu $x \in G$ và $y \in G$ và $x \neq y$ thì hàm số xác định bởi (3) thỏa mãn (1) khi và chỉ khi $xy \in G$. Thật vậy, giả sử $x \in G$ và $y \in G$ và $x \neq y$. Nếu hàm số xác định bởi (3) thỏa mãn (1), khi đó

$$f(xy)\,[Cx - Cy] = (x - y)\,CxCy \overset{\text{do } C\neq 0,\ x-y\neq 0}{\Longrightarrow} f(xy) = Cxy \Rightarrow xy \in G.$$

Nếu $xy \in G$ và hàm f xác định bởi (3), khi đó

$$f(xy)\,[f(x) - f(y)] = Cxy\,[Cx - Cy] = (x - y)\,f(x)f(y),$$

suy ra hàm f thỏa mãn (1) với mọi $x \in G$ và $y \in G$ và $x \neq y$.
b) Nếu cả x và y đều không thuộc G thì $f(x) = 0,\ f(y) = 0$, do đó

$$f(xy)\,[f(x) - f(y)] = (x - y)\,f(x)f(y),$$

suy ra hàm f thỏa mãn (1).
c) Nếu $x \in G$ và $y \notin G$ thì $f(x) = 0,\ f(y) = Cy$. Lúc này từ (1) suy ra

$$f(xy)\,[0 - f(y)] = 0 \Rightarrow f(xy) = 0 \Rightarrow xy \notin G.$$

d) Nếu $x \notin G$ và $y \in G$ thì tương tự như trên suy ra $xy \notin G$. Như vậy ta có các đặc trưng của hàm G như sau:
α) Nếu $x \in G$ thì $\dfrac{1}{x} \in G$. Thật vậy, nếu trái lại thì theo *c*) suy ra $1 = x.\dfrac{1}{x} \notin G$, mâu thuẫn với $1 \in G$.

β) Nếu $x \in G$ và $y \in G$ thì $xy \in G$. Thật vậy, nếu trái lại thì theo *c*), *d*) suy ra $y = (xy).\dfrac{1}{x} \notin G$, mâu thuẫn.
γ) Nếu $x \in G$ và $y \in G$ thì $\dfrac{x}{y} = x.\dfrac{1}{y} \in G$.
Tóm lại G là tập hợp chứa 1, không chứa 0, khép kín đối với phép nhân và phép chia. Ngược lại, ta sẽ chứng minh rằng nếu tập G thỏa mãn các tính chất nói trên thì G thỏa α) và thỏa *c*), *d*). Nếu $x \in G$ thì do G khép kín đối với phép chia và $1 \in G$ nên $\dfrac{1}{x} \in G$, do đó tính chất α) được thỏa mãn. Nếu $x \in G$ và $y \notin G$ thì $xy \notin G$, vì nếu $xy \in G$ thì $y = \dfrac{xy}{x} \in G$, mâu thuẫn. Do vậy tính khép kín đối với phép nhân và phép chia đủ để đặc trưng hoàn toàn tập G và ta có lời giải đầy đủ của bài toán như sau:

$$f(x) = \begin{cases} Cx, & \text{khi } x \in G \\ 0, & \text{khi } x \notin G, \end{cases}$$

trong đó C là một hằng số thực bất kì, G là một tập con của $\mathbb{R}$ khép kín đối với phép nhân và phép chia (nghĩa là nhóm con các số thực khác không đối với phép toán nhân). Lưu ý rằng nghiệm $f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ là ứng với $C = 0$.
Lưu ý. Dễ thấy ngay rằng hai hàm số $f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn (1). Tuy nhiên việc tìm tất cả các hàm số thỏa mãn (1) là rất khó khăn. Lời giải trên cung cấp cho ta một số kĩ năng, tư duy cần thiết để tiếp cận bộ môn Lý thuyết nhóm sẽ được đề cập ở bậc Đại học.

2.1.8 Phương trình hàm với nhiều ẩn hàm

Đối với phương trình hàm chứa cặp biến tự do x, y và chứa nhiều ẩn hàm, chẳng hạn hai ẩn hàm f và g, ta thường phân li biến số hoặc cho y (hoặc x) bằng một số nào đó để biểu diễn hàm f theo g, sau đó thay vào phương trình hàm đã cho để đưa về còn một ẩn hàm.

Bài toán 2.65. *Tìm các hàm số* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f(x^3 + 2y) + f(x + y) = g(x + 2y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Nhận thấy, nếu cặp hàm $(f; g)$ thỏa mãn (1) thì cặp hàm $(f + c; g + 2c)$ cũng thỏa mãn (1), do đó có thể giả sử $f(0) = 0$. Từ (1) cho $y = 0$ ta được $g(x) = f(x) + f(x^3),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy (1) trở thành

$$P(x, y) : f(x^3 + 2y) + f(x + y) = f(x + 2y) + f\left((x + 2y)^3\right),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ (1) cho $x = -y$ ta được $f(2y - y^3) = g(y),\ \forall y \in \mathbb{R}$. Do đó

$$g(x + 2y) = f\left(2(x + 2y) - (x + 2y)^3\right),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Thay vào (1) dẫn tới

$$Q(x,y): f(x^3+2y)+f(x+y)=f\left(2(x+2y)-(x+2y)^3\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (3)$$

Ta sẽ chứng minh $f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$ (4)

$$P\left(1,x-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow f(x+\frac{1}{2})=f\left((2x)^3\right)\ ;\ P(0,x)\Rightarrow f(x)=f\left((2x)^3\right).$$

Vậy (4) được chứng minh. Tiếp theo chứng minh $f(x)=0,\ \forall x\in[0;1]$. (5)
Xét $y\in(0;1]$. Thực hiện $Q(x,y-x)$ ta được

$$f(x^3-2x+2y)+f(y)=f\left(2(2y-x)-(2y-x)^3\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (6)$$

Xét phương trình

$$x^3-2x+2y=2(2y-x)-(2y-x)^3 \quad (7)$$
$$\Leftrightarrow x^3=2y-\left(8y^3-12y^2x+6yx^2-x^3\right)\Leftrightarrow 8y^3-12y^2x+6yx^2-2y=0$$
$$\Leftrightarrow 4y^2-6yx+3x^2-1=0\Leftrightarrow (x-y)^2=\frac{1-y^2}{3}. \quad (8)$$

Dễ thấy rằng với $y\in(0;1]$ thì (8), tức là (7) luôn có nghiệm. Vậy với x là nghiệm của (8) thì từ (6) suy ra $f(y)=0,\ \forall y\in(0;1]$, do đó (5) được chứng minh. Từ (4) và (5) suy ra $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, do đó $g(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x)=c,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $g(x)=2c,\ \forall x\in\mathbb{R}$, trong đó c là hằng số thực tùy ý.
Lưu ý. Nhận xét nếu cặp hàm $(f;g)$ thỏa mãn (1) thì cặp hàm $(f+c;g+2c)$ cũng thỏa mãn (1), từ nhận xét này ta có thể giả sử $f(0)=0$. Đây là một kĩ thuật rất hay, ta còn sử dụng kĩ thuật này ở bài toán 4.85 ở trang 505.

Bài toán 2.66 (Đề thi chính thức Olympic 30/04/2012). *Tìm tất cả các cặp hàm số $f,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(0)=g(0)=1,\ g(1)=2$ và*

$$f(x)-f(y)=(x-y)g(x+y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Từ (1) cho $y=-x$ và sử dụng $g(0)=1$ ta được

$$f(x)-f(-x)=2x,\ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (2)$$

Trong (1) thay x bởi $x+1$ và thay y bởi x được

$$f(x+1)-f(x)=g(2x+1),\ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (3)$$

Trong (1) thay x bởi $x+1$ và thay y bởi $-x$ được

$$f(x+1)-f(-x)=2(2x+1),\ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (4)$$

Từ (2) và (4) suy ra: $f(x+1)+2x-f(x)=2(2x+1),\ \forall x\in\mathbb{R}$. (5)
Từ (5) và (3) suy ra:

$$g(2x+1)=2(2x+1)-2x,\ \forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow g(2x+1)=2x+2,\ \forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow g(x)=x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (6)$$

Thay $y=0$ vào (1) và sử dụng (6) ta được

$$f(x)=xg(x)+1=x(x+1)+1=x^2+x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Thử lại thấy cặp hàm số $g(x)=x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f(x)=x^2+x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.
Lưu ý. Từ (1) cho $y=0$ được $f(x)=xg(x)+1$, rồi thay vào (1) dẫn đến

$$xg(x)-yg(y)=(x-y)g(x+y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Sau đó sử dụng bài toán 2.327 ở trang 371, tuy nhiên cách này dài dòng hơn.

Bài toán 2.67 (Poland Second Round-2012). *Tìm tất cả các hàm số $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $g\big(f(x)-y\big)=f\big(g(y)\big)+x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.* (1)

Giải. Từ (1) cho $y=0$ ta được: $g(f(x))=f\big(g(0)\big)+x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. (2)
Từ (1) cho $y=f(x)$ ta được: $g(0)=f\Big(g\big(f(x)\big)\Big)+x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. (3)
Từ (2) và (3) ta có

$$f\Big(f(g(0))+x\Big)=-x+g(0)\Rightarrow f(x)=-x+a\ (\text{với } a \text{ là một hằng số}).$$

Thay $f(x)=a-x$ trở lại (1) rút ra

$$g(-x-y+a)=-g(y)+a+x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (4)$$

Cho $x=-y$ vào (4) rút ra

$$g(a)=a+x-g(-x)\Rightarrow g(x)=-x+b\ (\text{với } b \text{ là một hằng số}).$$

Thay f,g tìm được ở trên vào (1) được

$$-[-x-y+a]+b=-(-y+b)+a+x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow x+y-a+b=y+x+a-b,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Vậy $a=b$. Do đó

$$f(x)=a-x,\ \forall x\in\mathbb{R}\ \text{và}\ g(x)=a-x,\ \forall x\in\mathbb{R}\ \ (a \text{ là hằng số}).$$

Bài toán 2.68 (Poland Finals 2011, Day 2). *Tìm các hàm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x)f(y) = g(x)g(y) + g(x) + g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Đặt $h(x) = g(x) + 1$, thay vào (1) được

$$f(x)f(y) = h(x)h(y) - 1,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Cho $x = y$ vào (2) được: $h^2(x) - f^2(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$. (3)

Đặt $r(x) = h(x) + f(x)$. Từ (3) suy ra $r(x) \neq 0$ và $h(x) - f(x) = \dfrac{1}{r(x)}$. Vì thế

$$h(x) = \frac{1}{2}[r(x) + \frac{1}{r(x)}] \text{ và } f(x) = \frac{1}{2}[r(x) - \frac{1}{r(x)}]$$

Thay trở lại vào (2) ta thu được

$$\left[r(x) - \frac{1}{r(x)}\right]\left[r(y) - \frac{1}{r(y)}\right] = \left[r(x) + \frac{1}{r(x)}\right]\left[r(y) + \frac{1}{r(y)}\right] - 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{2r(x)}{r(y)} + \frac{2r(y)}{r(x)} = 4 \Leftrightarrow \frac{[r(x) - r(y)]^2}{r(x)r(y)} = 0 \Rightarrow r(x) = r(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Như vậy $r(x)$ là hàm hằng. Do đó

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(c - \frac{1}{c}\right),\ \forall x \in \mathbb{R}\ ;\ g(x) = \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{c}\right) - 1,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Thử lại: Thay (4) vào (1) được

$$\frac{1}{4}\left(c - \frac{1}{c}\right)^2 = \left[\frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{c}\right) - 1\right]^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right) - 2$$

$$\Leftrightarrow c^2 - 2 + \frac{1}{c^2} = c^2 + 2 + \frac{1}{c^2} - 4\left(c + \frac{1}{c}\right) + 4 + 4\left(c + \frac{1}{c}\right) - 8 \text{ (đúng)}.$$

Vậy f và g là những hàm hằng xác định bởi (4), trong đó c là hằng số khác không.

Bài toán 2.69 (Đề nghị thi IMO-2011). *Tìm tất cả các hàm số $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$g\left(f(x+y)\right) = f(x) + (2x+y)g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử hai hàm f và g thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Trong (1) thay y bởi $-2x$ ta được: $g\left(f(-x)\right) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. (2)

Do (2) nên (1) trở thành: $f(-x-y) = f(x) + (2x+y)g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. (3)

Từ (1) thay x bởi y và thay y bởi x ta được

$$g\left(f(x+y)\right) = f(y) + (2y+x)g(x),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Lấy (1) trừ (4) theo vế ta được

$$f(x) - f(y) = (2y+x)g(x) - (2x+y)g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Trong (5) lần lượt lấy $(x;y) = (x;0),\ (x;y) = (1;x),\ (x;y) = (0;1)$ ta được

$$f(x) - f(0) = xg(x) - 2xg(0),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

$$f(1) - f(x) = (2x+1)g(1) - (x+2)g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Cộng (6) và (7) ta được

$$f(1) - f(0) = -2g(x) - 2xg(0) + (2x+1)g(1),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Từ (8) suy ra hàm g có dạng $g(x) = Ax + B,\ \forall x \in \mathbb{R}$, với A và B là hằng số. Đặt $C = f(0)$. Trong (3) thay $(x;y)$ bởi $(0;-y)$ ta được

$$\begin{aligned} &f(y) = C - yg(-y),\ \forall y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow &f(y) = C - y\left(-Ay + B\right),\ \forall y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow &f(x) = Ax^2 - Bx + C,\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{9}$$

Thay (9) vào (2) và so sánh hệ số của x^2 ở hai vế ta được $A^2 = A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ A = 1. \end{array}\right.$

- Nếu $A = 0$ thì $g(x) \equiv B,\ f(x) \equiv -Bx + C$, thay vào (2) được

$$B = -Bx + C,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

do đó $B = C = 0$, suy ra $f(x) \equiv 0,\ g(x) \equiv 0$. Thử lại thấy thỏa mãn.
- Nếu $A = 1$ thì $g(x) \equiv x + B,\ f(x) \equiv x^2 - Bx + C$, thay vào (2) được

$$x^2 + Bx + C + B = x^2 - Bx + C,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

hay $2Bx + B = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, nghĩa là $B = 0$. Vậy $f(x) \equiv x^2 + C,\ g(x) \equiv x$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Kết luận: $f(x) \equiv 0$ và $g(x) \equiv 0$; $f(x) \equiv x^2 + C$ và $g(x) \equiv x$.

2.1.9 Các bài toán tổng hợp

Bài toán 2.70. *Tìm tất cả các hàm số $f : (0;+\infty) \to (0;+\infty)$ thỏa mãn*

$$f(xy)f(x+y) = 1,\ \forall x, y \in (0;+\infty). \tag{1}$$

Giải. Từ (1) cho $(x;y) = (2;2)$ ta được $f(4) = 1$.

Từ (1) thay y bởi $\dfrac{4}{x}$ ta được: $f\left(x + \dfrac{4}{x}\right) = 1,\ \forall x \in (0;+\infty)$. (2)

Từ (1) thay y bởi $4 - x$ ta được: $f\left(x[4-x]\right) = 1,\ \forall x \in (0;4)$. (3)

• Nếu $x > 4$ thì phương trình (ẩn $y > 0$): $x = y + \dfrac{4}{y}$ luôn có nghiệm, nghĩa là tồn tại $y > 0$ sao cho $x = y + \dfrac{4}{y}$, dẫn tới $f(x) = f\left(y + \dfrac{4}{y}\right) \overset{\text{do (2)}}{=} 1$.

• Nếu $0 < x < 4$ thì phương trình (ẩn $y > 0$): $x = y(4 - y)$ luôn có nghiệm, nghĩa là tồn tại $y > 0$ sao cho $x = y(4 - y)$, dẫn tới $f(x) = f\left(y[4 - y]\right) \overset{\text{do (3)}}{=} 1$.

Vậy $f(x) = 1,\ \forall x \in (0; +\infty)$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.71. *Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện:* $f(x + y) + f(xy) = x + y + xy,\ \forall x, y \in (0; +\infty)$. (1)

Giải. Trong (1) thay $(x; y) = (2; 2)$ ta được $f(4) + f(4) = 8 \Leftrightarrow f(4) = 4$.
Trong (1) lần lượt thay $(x; y) = (1; 1)$, $(x; y) = (2; 1)$, $(x; y) = (3; 1)$ ta được

$$\begin{cases} f(2) + f(1) = 3 \\ f(3) + f(2) = 5 \\ f(4) + f(3) = 7. \end{cases}$$

Do $f(4) = 4$ nên $f(3) = 3$, $f(2) = 2$, $f(1) = 1$. Từ (1) lấy $(x; y) = \left(t; \dfrac{1}{t}\right)$:

$$f\left(t + \frac{1}{t}\right) = t + \frac{1}{t},\ \forall t > 0. \tag{2}$$

Vì hàm số $g(t) = t + \dfrac{1}{t}$, với $t > 0$ có tập giá trị là $[2; +\infty)$ nên từ (2) suy ra

$$f(x) = x,\ \forall x \geq 2. \tag{3}$$

Trong (1) lấy $y = 2$ ta được: $f(x + 2) + f(2x) = 3x + 2,\ \forall x > 0$. (4)
Do (3) nên $f(x + 2) = x + 2,\ \forall x > 0$. Vậy thay vào (4) được

$$f(2x) = 2x,\ \forall x > 0. \tag{5}$$

Trong (5) thay x bởi $\dfrac{x}{2}$ ta được $f(x) = x,\ \forall x > 0$. (6)
Thử lại thấy hàm số xác định bởi (6) thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Do đó có duy nhất một hàm số thỏa mãn các yêu cầu bài toán là $f(x) = x,\ \forall x > 0$.

Bài toán 2.72. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(x^3 - y\right) + 2y\left[3f^2(x) + y^2\right] = f\left(y + f(x)\right),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Thay $y = x^3$ vào (1) ta được

$$f(0) + 2x^3\left[3f^2(x) + x^6\right] = f\left(x^3 + f(x)\right),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Thay $y = -f(x)$ vào (1) ta được

$$\begin{aligned} &f\left(x^3 + f(x)\right) - 2f(x)\left[3f^2(x) + f^2(x)\right] = f(0),\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &f\left(x^3 + f(x)\right) = 8f^3(x) + f(0),\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3}$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$\begin{aligned} &f(0) + 2x^3\left[3f^2(x) + x^6\right] = 8f^3(x) + f(0),\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &x^3\left[3f^2(x) + x^6\right] = 4f^3(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &\left[f(x) - x^3\right]\left[4f^2(x) + f(x)x^3 + x^6\right] = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4}$$

Trong (4) lấy $x = 0$ ta được $f(0) = 0$. Với mọi $x \neq 0$ thì

$$4f^2(x) + f(x)x^3 + x^6 = \left[2f(x) + \frac{x^3}{4}\right]^2 + \frac{15x^6}{16} > 0.$$

Vậy từ (4) suy ra $f(x) = x^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x) = x^3, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.73. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f\left(n^2\right) = f(m + n)\, f(n - m) + m^2,\ \forall m, n \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Trong (1), thay $(m; n) = (0; 0)$, ta được $f(0) = [f(0)]^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(0) = 1. \end{array}\right.$
Trong (1), thay $(m; n) = (2; 2)$. ta được

$$f(4) = f(4)\, f(0) + 4 \Rightarrow f(0) \neq 1 \Rightarrow f(0) = 0.$$

Trong (1), thay $(m; n) = (t; t)$ và sử dụng $f(0) = 0$, ta được

$$\begin{aligned} &f\left(t^2\right) = t^2,\ \forall t \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow &f(x) = x,\ \forall x \geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Trong (1), thay $n = 0$, $m = t > 0$, ta được

$$\begin{aligned} &f(0) = f(t)f(-t) + t^2,\ \forall t > 0 \\ \Rightarrow &tf(-t) = -t^2,\ \forall t > 0 \\ \Rightarrow &f(-t) = -t,\ \forall t > 0 \\ \Rightarrow &f(x) = x,\ \forall x < 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Từ (2) và (3) suy ra $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$, thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.74 (Albania Team Selection Test 2013). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x^3) + f(y^3) = (x + y)[f(x^2) + f(y^2) - f(xy)],\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u, thay y bởi v vào (1).

$$P(\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{-x}) \Rightarrow f(-x) = -f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

$$P(0,0) \Rightarrow f(0) = 0;\ \ P(x,0) \Rightarrow f(x^3) = xf(x^2),\ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Sử dụng (3) ta biến đổi (1) trở thành

$$(x+y)f(xy) = xf(y^2) + yf(x^2),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Trong (3) thay x bởi $-x$ ta được $f(-x^3) = -xf(x^2), \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó

$$f(-x^3) = -f(x^3),\ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f(-x) = -f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ (4) lấy $y = 1$ ta được: $(x+1)f(x) = xf(1) + f(x^2),\ \forall x \in \mathbb{R}$. (5)
Từ (4) lấy $y = -1$ và sử dụng (2) ta được

$$(x-1)(-f(x)) = xf(1) - f(x^2),\ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Cộng (5) và (6) ta thu được $2f(x) = 2f(1)x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy $f(x) = cx,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (c là hằng số). Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.75. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$x^2 f(x) + y^2 f(y) - (x+y)f(xy) = (x-y)^2 f(x+y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u, thay y bởi v vào (1). Đặt $a = f(1)$.

$$P(1,0) \Rightarrow f(1) - f(0) = f(1) \Rightarrow f(0) = 0.$$
$$P(x,-x) \Rightarrow x^2 f(x) + x^2 f(-x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $f(x) + f(-x) = 0,\ \forall x \neq 0$. Kết hợp với $f(0) = 0$ ta được

$$f(-x) = -f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Thực hiện $P(x,1)$, $P(x+1,-1)$ và sử dụng (2) ta được

$$x^2 f(x) + a - (x+1)f(x) = (x-1)^2 f(x+1), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$
$$(x+1)^2 f(x+1) - a + xf(x+1) = (x+2)^2 f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có hệ: $\begin{cases} \left(x^2 - x - 1\right) f(x) - (x-1)^2 f(x+1) = -a \\ (x+2)^2 f(x) - \left(x^2 + 3x + 1\right) f(x+1) = -a. \end{cases}$ Ta có

$$D = \begin{vmatrix} x^2 - x - 1 & -(x-1)^2 \\ (x+2)^2 & -\left(x^2 + 3x + 1\right) \end{vmatrix} = 5,\ D_{f(x)} = \begin{vmatrix} a & (x-1)^2 \\ a & \left(x^2 + 3x + 1\right) \end{vmatrix} = 5ax.$$

Do đó $f(x) = \dfrac{D_{f(x)}}{D} = ax$. Thử lại thấy hàm số $f(x) = ax,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (a là hằng số tùy ý) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 2.76 (HSG Quốc gia-2013). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 0$, $f(1) = 2013$ và*

$$(x-y)\left[f\left(f^2(x)\right) - f\left(f^2(y)\right)\right] = \left[f(x) - f(y)\right]\left[f^2(x) - f^2(y)\right],\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Từ (1) cho $y = 0$ ta được $xf\left(f^2(x)\right) = f^3(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra

$$f\left(f^2(x)\right) = \frac{f^3(x)}{x},\ \forall x \neq 0. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), suy ra với mọi $x \neq 0$ và $y \neq 0$ ta có

$$(x-y)\left[\frac{f^3(x)}{x} - \frac{f^3(y)}{y}\right] = \left[f(x) - f(y)\right]\left[f^2(x) - f^2(y)\right]$$
$$\Leftrightarrow \frac{xf^3(y)}{y} + \frac{yf^3(x)}{x} = f(x)f^2(y) + f(y)f^2(x)$$
$$\Leftrightarrow \frac{xf^3(y)}{y} - f(x)f^2(y) + \frac{yf^3(x)}{x} - f(y)f^2(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 f^3(y) - xyf(x)f^2(y) + y^2 f^3(x) - xyf(y)f^2(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[xf(y) - yf(x)\right]\left[xf^2(y) - yf^2(x)\right] = 0. \quad (3)$$

Từ (3) cho $y = 1$, ta được: $\left[2013x - f(x)\right]\left[2013^2 x - f^2(x)\right] = 0,\ \forall x \neq 0$. (4)
Từ (4) suy ra $f(x) = 2013x,\ \forall x \leq 0$. Bởi vậy, từ (3) cho $y = -1$ ta được

$$\left[-2013x + f(x)\right]\left[2013^2 x + f^2(x)\right] = 0,\ \forall x \neq 0. \quad (5)$$

Từ (5) suy ra $f(x) = 2013x,\ \forall x > 0$. Như vậy $f(x) = 2013x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x) = 2013x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.77 (Ukraine National Mathematical Olympiad 2009 ; Argentina Team Selection Test 2010). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, thỏa mãn điều kiện:*

$$f\left(x + xy + f(y)\right) = \left[f(x) + \frac{1}{2}\right]\left[f(y) + \frac{1}{2}\right],\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Nếu f là hàm hằng, $f(x) = c,\ \forall x \in \mathbb{R}$ thì thay vào (1), ta được

$$c = \left(c + \frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow c = c^2 + c + \frac{1}{4} \Leftrightarrow c^2 + \frac{1}{4} = 0 \text{ (vô lí)}.$$

Vậy f không thể là hàm hằng. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (1).

$$P(x,-1) \Rightarrow f\left(f(-1)\right) = \left[f(x) + \frac{1}{2}\right]\left[f(-1) + \frac{1}{2}\right],\ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Nếu $f(-1) \neq -\frac{1}{2}$ thì từ (2) suy ra f là hàm hằng, vô lí. Vậy $f(-1) = -\frac{1}{2}$, từ (2) suy ra $f(f(-1)) = 0$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

$$P\left(0, -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f\left(f(-\frac{1}{2})\right) = \left[f(0) + \frac{1}{2}\right]\left[f(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\right]$$
$$\Rightarrow f(0) = \frac{1}{2}\left[f(0) + \frac{1}{2}\right] \Rightarrow f(0) = \frac{1}{2}.$$

Thực hiện $P(x, 0)$, ta được $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(x) + \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (3)

Nếu k là số khác -1 sao cho $f(k) = -\frac{1}{2}$.

$$P(x, k) \Rightarrow f\left((k+1)x - \frac{1}{2}\right) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Do hàm số $g(x) = (k+1)x - \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$ nên từ (4) suy ra f là hàm hằng, vô lí. Do đó -1 là số duy nhất sao cho $f(-1) = -\frac{1}{2}$. Từ (3) suy ra: $f(x) - \frac{1}{2} = f\left((x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = f\left(x - \frac{1}{2}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó: $P(-1, y) \Rightarrow f(f(y) - y - 1) = 0$. Bởi vậy, với mọi $y \in \mathbb{R}$, ta có

$$-\frac{1}{2} = f(f(y) - y - 1) - \frac{1}{2} = f\left(f(y) - y - 1 - \frac{1}{2}\right) = f\left(f(y) - y - \frac{3}{2}\right).$$

Suy ra $f(y) - y - \frac{3}{2} = -1$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Hay $f(x) = x + \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.78. *Tìm các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f\Big(f\big(y + f(x)\big)\Big) = f(x+y) + f(x) + y, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) thay y bởi $f(y)$ ta được

$$f\Big(f\big(f(y) + f(x)\big)\Big) = f\big(x + f(y)\big) + f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Trong (1) thay x bởi y và thay y bởi $f(x)$ ta được

$$f\Big(f\big(f(x) + f(y)\big)\Big) = f\big(y + f(x)\big) + f(y) + f(x), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$f\big(x + f(y)\big) = f\big(y + f(x)\big), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f\Big(f\big(x + f(y)\big)\Big) = f\Big(f\big(y + f(x)\big)\Big), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\overset{\text{do (1)}}{\Rightarrow} f(x+y) + f(y) + x = f(x+y) + f(x) + y, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f(y) + x = f(x) + y, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f(y) - y = f(x) - x, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f(x) - x = C, \ \forall x, y \in \mathbb{R} \ (C \text{ là hằng số})$$
$$\Leftrightarrow f(x) = x + C, \ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Thử lại thấy rằng hàm số xác định bởi (4) không thỏa mãn (1) với mọi hằng số C. Vậy không có hàm số nào thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 2.79 (Czech-Slovak-2011). *Tìm các hàm số f xác định trên $(0; +\infty)$, nhận giá trị trong $(0; +\infty)$ và thỏa mãn*

$$f(x)f(y) = f(y)f(xf(y)) + \frac{1}{xy}, \ \forall x, y \in (0; +\infty). \quad (1)$$

Giải. Trong (1) thay $(x; y)$ bởi $\left(\frac{1}{x}; \frac{1}{y}\right)$ ta được

$$f\left(\frac{1}{x}\right) f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(\frac{1}{y}\right) f\left(\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{y}\right)\right) + xy, \ \forall x, y \in (0; +\infty). \quad (2)$$

Đặt $f\left(\frac{1}{x}\right) = g(x)$. Từ (2) ta có

$$g(x)g(y) = g(y)g\left(\frac{x}{g(y)}\right) + xy, \ \forall x, y \in (0; +\infty). \quad (3)$$

Từ (3) thay x bởi $xg(y)$ ta được

$$g\big(xg(y)\big)\, g(y) = g(y)g(x) + xyg(y), \ \forall x, y \in (0; +\infty)$$
$$\Rightarrow g\big(xg(y)\big) = g(x) + xy, \ \forall x, y \in (0; +\infty) \ (\text{do } g(y) > 0). \quad (4)$$

Từ (4) cho $x = 1$ ta được: $g(g(y)) = g(1) + y$, $\forall y \in (0; +\infty)$. (5)

Từ (4) thay x bởi $g(x)$ ta được:

$$g\big(g(x)g(y)\big) = g\big(g(x)\big) + g(x)y, \ \forall x, y \in (0; +\infty). \quad (6)$$

Từ (6) và (5) suy ra: $g(g(x)g(y)) = g(1) + x + g(x)y,\ \forall x, y \in (0; +\infty)$. (7)
Từ (7) thay x bởi y và thay y bởi x ta được

$$g(g(x)g(y)) = g(1) + y + g(y)x,\ \forall x, y \in (0; +\infty). \quad (8)$$

Từ (7) và (8) suy ra

$$\begin{aligned} &x + g(x)y = y + g(y)x,\ \forall x, y \in (0; +\infty) \\ \Leftrightarrow &[g(x) - 1]\, y = [g(y) - 1]\, x,\ \forall x, y \in (0; +\infty) \\ \Leftrightarrow &\frac{g(x) - 1}{x} = \frac{g(y) - 1}{y},\ \forall x, y \in (0; +\infty) \\ \Rightarrow &\frac{g(x) - 1}{x} = C,\ \forall x \in (0; +\infty)\ (C \text{ là hằng số}) \\ \Rightarrow &g(x) = 1 + Cx,\ \forall x \in (0; +\infty). \end{aligned} \quad (9)$$

Thay hàm g từ (9) vào (3) ta được

$$(1 + Cx)(1 + Cy) = (1 + Cy)\left(1 + C\frac{x}{1 + Cy}\right) + xy,\ \forall x, y \in (0; +\infty). \quad (10)$$

Từ (10) cho $x = y = 1$ ta được

$$(1 + C)^2 = (1 + C)\left(1 + \frac{C}{1 + C}\right) + 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2C + C^2 = 1 + C + C + 1 \Leftrightarrow C^2 = 1 \Leftrightarrow C = \pm 1.$$

Do $g(x) = 1 + Cx > 0,\ \forall x \in (0; +\infty)$ nên ta chỉ lấy $C = 1$. Vậy $g(x) \equiv 1 + x$, suy ra $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x},\ \forall x \in (0; +\infty)$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.80. *Tìm các hàm số $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ và thỏa mãn:*

$$f(xy)f(yz)f(zx)f(x + y)f(y + z)f(z + x) = 2013,\ \forall x, y, z > 0. \quad (1)$$

Giải. Trong (1), cho $x = y = z = t > 0$ được $[f(t^2)f(2t)]^3 = 2013,\ \forall t > 0$ hay

$$f(t^2)f(2t) = \sqrt[3]{2013},\ \forall t > 0. \quad (2)$$

Từ (1) lấy $(x; y; z) = (t; t; 1)$ được $f(t^2)f^2(t)f(2t)f^2(t + 1) = 2013,\ \forall t > 0$. (3)
Thay (2) vào (3) được: $f^2(t)f^2(t + 1) = \sqrt[3]{2013^2},\ \forall t > 0$, suy ra

$$f(t)f(t + 1) = \sqrt[3]{2013},\ \forall t > 0\ (\text{do } f(t) > 0). \quad (4)$$

Trong (4) thay t bởi $t + 1$ ta được: $f(t + 1)f(t + 2) = \sqrt[3]{2013},\ \forall t > 0$. (5)
Từ (5) và (4) suy ra: $f(t) = f(t + 2),\ \forall t > 0$. (6)
Trong (1) lấy $z = 1$ ta được

$$f(xy)f(y)f(x)f(x + y)f(y + 1)f(x + 1) = 2013,\ \forall x, y > 0. \quad (7)$$

Từ (7) và (4) suy ra: $f(xy)f(x + y) = \sqrt[3]{2013},\ \forall x, y > 0$. (8)
Trong (8) lần lượt lấy $y = 2$, $y = 4$ ta được

$$f(2x)f(x + 2) = \sqrt[3]{2013},\ \forall x > 0 \quad (9)$$

$$f(4x)f(x + 4) = \sqrt[3]{2013},\ \forall x > 0. \quad (10)$$

Từ (9), (10), (6) suy ra: $f(2x) = f(4x),\ \forall x > 0$. Hay:

$$f(x) = f(2x),\ \forall x > 0. \quad (11)$$

Từ (11) và (9) suy ra: $f(x)f(x + 2) = \sqrt[3]{2013},\ \forall x > 0$. (12)
Từ (12) và (6) suy ra: $[f(x)]^2 = \sqrt[3]{2013},\ \forall x > 0$. Do đó:

$$f(x) = \sqrt[6]{2013},\ \forall x > 0\ (\text{do } f(x) > 0).$$

Thử lại thấy hàm số $f(x) = \sqrt[6]{2013},\ \forall x > 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.
Lưu ý.
- Từ (13), tiến hành tương tự như ở bài toán 2.70 cũng thu được kết quả.
- Tương tự, ta giải được bài toán tổng quát sau:

Bài toán 2.81. *Cho $a > 0$. Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ và thỏa mãn điều kiện:* $\prod_{i>j;\, i,j=1}^{n} f(x_i x_j)\, f(x_i + x_j) = a,\ \forall x > 0.$

Đáp số. Có duy nhất hàm số thỏa mãn đề bài là hàm hằng $f(x) \equiv a^{\frac{1}{n(n-1)}}$.

Bài toán 2.82 (Brazil National Olympiad 2010). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn : với a và b là hai số vô tỉ thì $f(ab) = f(a + b)$.*

Giải. Giả sử r là số vô tỉ dương, khi đó $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$, $-\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$. Do đó

$$f(-r) = f\big((-\sqrt{r}).\sqrt{r}\big) = f(\sqrt{r} - \sqrt{r}) = f(0).$$

Suy ra $f(x) = f(0),\ \forall x \notin \mathbb{Q},\ x < 0$. (1)
Với r là số vô tỉ dương, ta có $f(r) = f\big((-\sqrt{r}).(-\sqrt{r})\big) = f(-2\sqrt{r}) \overset{\text{do (1)}}{=} f(0)$.
Do đó $f(x) = f(0),\ \forall x \notin \mathbb{Q},\ x > 0$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $f(x) = f(0),\ \forall x \notin \mathbb{Q},\ x \neq 0$. (3)
Giả sử $\ell \in \mathbb{Q}$, $\ell \neq 0$. Khi đó $\ell - \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ và $\sqrt{2}\ell - 2 \notin \mathbb{Q}$. Do đó

$$f(\ell) = f\left(\sqrt{2} + (\ell - \sqrt{2})\right) = f\left(\sqrt{2}(\ell - \sqrt{2})\right) = f(\sqrt{2}\ell - 2) \overset{\text{do (3)}}{=} f(0).$$

Như vậy $f(x) = f(0),\ \forall x \in \mathbb{Q},\ x \neq 0$. (4)
Từ (3) và (4) suy ra $f(x) = f(0),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $f(x) = C,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (C là hằng số, tùy ý). Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.83. *Tìm tất cả các hàm* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Trong (1) cho $x=y=1$ ta được $2f(1)=2[f(1)]^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(1)=0\\f(1)=1.\end{array}\right.$

- Xét trường hợp $f(1)=0$. Cho $y=1$ vào (1) ta được $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
- Xét trường hợp $f(1)=1$. Cho $y=1$ ta được

$$x+f(x)=(x+1)f(x)\Rightarrow xf(x)=x.$$

Suy ra với mọi $x\neq 0$ ta có $f(x)=1$. Kết hợp cả hai trường hợp ta có

$$f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}\text{ và }f(x)=\left\{\begin{array}{ll}1, & \text{khi } x\neq 0\\ a, & \text{khi } x=0,\end{array}\right.\quad a\text{ là hằng số tùy ý.}$$

Ta kiểm ta các hàm số này có thỏa mãn hay không ? Dễ thấy hàm $f(x)\equiv 0$ thỏa mãn (1). Bây giờ ta xét

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll}1, & \text{khi } x\neq 0\\ a, & \text{khi } x=0,\end{array}\right.\quad a\text{ là hằng số tùy ý.}$$

Khi $x\neq 0$ và $y\neq 0$, ta thấy $f(x)$ thỏa (1). Khi $x=0$ và $y=0$, ta có

$$xf(y)+yf(x)=0\text{ và }(x+y)f(x)f(y)=0,$$

vậy $f(x)$ thỏa (1). Khi $x=0$ và $y\neq 0$, ta có

$$xf(y)+yf(x)=ay\text{ và }(x+y)f(x)f(y)=ay,$$

vậy $f(x)$ thỏa (1). Khi $x\neq 0$ và $y=0$, ta có

$$xf(y)+yf(x)=ax\text{ và }(x+y)f(x)f(y)=ax,$$

vậy $f(x)$ thỏa (1).

Bài toán 2.84. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn* $f(0)=0$ *và*

$$f\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}\right)=\frac{f(x)^2+f(y)^2}{2xy},\ \forall x\neq 0,\ y\neq 0. \tag{1}$$

Giải. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (1).

$$P(1,1)\Rightarrow f(1)=f(1)^2\Leftrightarrow f(1)\in\{0,1\}.$$

- Nếu $f(1)=0$ thì $P(x,x)\Rightarrow\dfrac{f(x)^2}{x^2},\ \forall x\neq 0$, suy ra $f(x)=0,\ \forall x\neq 0$, kết hợp với $f(0)=0$ suy ra $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy $f(x)\equiv 0$ thỏa mãn.

- Xét $f(1)\neq 0$. $P(x,x)\Rightarrow\dfrac{f(x)^2}{x^2}=1,\ \forall x\neq 0$, suy ra $f(x)^2=x^2,\ \forall x\neq 0$. Kết hợp với $f(0)=0$ suy ra $f(x)^2=x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Hay với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì $f(x)=x$ hoặc $f(x)=-x$. Do đó (1) trở thành

$$f\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}\right)=\frac{x^2+y^2}{2xy},\ \forall x\neq 0,\ y\neq 0. \tag{2}$$

Do $x^2+y^2\geq 2|xy|$ nên từ (2) suy ra $f(x)=x$ với mọi x thỏa mãn $|x|\geq 1$. Vậy

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll}x & \text{khi } x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)\\ g(x)x & \text{khi } x\in(-1;1),\end{array}\right.$$

với g là hàm số xác định trên $(-1;1)$, có tập giá trị là $\{-1;1\}$, tùy ý. Thử lại: với hàm f xác định như trên thì $f(0)=0$ và với mọi $x\neq 0,\ y\neq 0$ ta có

$$f\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}\right)=\frac{x^2+y^2}{2xy},\ \frac{f(x)^2+f(y)^2}{2xy}=\frac{x^2+y^2}{2xy}.$$

Vậy $f\left(\dfrac{x^2+y^2}{2xy}\right)=\dfrac{f(x)^2+f(y)^2}{2xy},\ \forall x\neq 0,\ y\neq 0$, suy ra hàm f xác định như trên thỏa mãn các yêu cầu đề bài.
Kết luận: các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll}x & \text{khi } x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)\\ g(x)x & \text{khi } x\in(-1;1),\end{array}\right.$$

với g là hàm số xác định trên $(-1;1)$, có tập giá trị là $\{-1;1\}$, tùy ý.

Bài toán 2.85 (Austria Federal Competition For Advanced Students, Part 2, 2013). *Cho số nguyên* k. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn* $f(0)=0$ *và*

$$f(x^ky^k)=xyf(x)f(y),\ \forall x,y\neq 0. \tag{1}$$

Giải. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (1).

$$P(1,1)\Rightarrow f(1)=[f(1)]^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(1)=1\\f(1)=0.\end{array}\right.$$

$$P(-1,-1)\Rightarrow f(1)=[f(-1)]^2. \tag{2}$$

$$P(1,-1)\Rightarrow f\left((-1)^k\right)=-f(1)f(-1)=-[f(-1)]^3. \tag{3}$$

$$P(x,x)\Rightarrow f(x^{2k})=[xf(x)]^2,\ \forall x\neq 0. \tag{4}$$

$$P(x,1)\Rightarrow f(x^k)=xf(x)f(1),\ \forall x\neq 0. \tag{5}$$

Trường hợp 1 : k là số lẻ, $k=2n+1,\ n\in\mathbb{Z}$.

- Khi $f(1)=0$, từ (5) suy ra $f(x^k)=0,\ \forall x\neq 0$, hay $f(x)=0,\ \forall x\neq 0$. Thử

lại thấy hàm số $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

• Khi $f(1)=1$, từ (3) ta có

$$f\left((-1)^k\right)=-f(-1)\overset{\text{do } k \text{ lẻ}}{\Rightarrow} f(-1)=-f(-1)\Rightarrow f(-1)=0.$$

Thay vào (2) ta được $f(1)=0$, mâu thuẫn với $f(1)=1$.

Trường hợp 2 : k là số chẵn, $k=2m,\ m\in\mathbb{Z}$.

• Khi $f(1)=0$, từ (5) suy ra $f(x^k)=0,\ \forall x\neq 0$, do đó $f(x)=0,\ \forall x\geq 0$. Với mọi $x<0$, ta có $0=f(x^{2k})\overset{\text{do (4)}}{=}[xf(x)]^2\Rightarrow f(x)=0,\ \forall x<0$. Vậy

$$f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

• Khi $f(1)=1$. Thay vào (5), ta được $f(x^k)=xf(x),\ \forall x\neq 0$. Do đó

$$\begin{cases} f(x^ky^k)=f\left((xy)^k\right)=xyf(xy),\forall x,y\neq 0\\ f(x^ky^k)\overset{\text{do (1)}}{=}xyf(x)f(y),\ \forall x,y\neq 0\end{cases}$$
$$\Rightarrow xyf(xy)=xyf(x)f(y),\ \forall x,y\neq 0$$
$$\Rightarrow f(xy)=f(x)f(y),\ \forall x,y\neq 0. \tag{6}$$

Nếu tồn tại $u\neq 0$ sao cho $f(u)=0$ thì $f(1)=f\left(u.\dfrac{1}{u}\right)=f(u)f\left(\dfrac{1}{u}\right)=0$, đến đây ta gặp mâu thuẫn, do đó với $x\neq 0$ thì $f(x)\neq 0$. Với mọi $x\neq 0$, ta có $xf(x)=f(x^k)=f\left(x.x^{k-1}\right)\overset{\text{do (6)}}{=}f(x).f\left(x^{k-1}\right)\Rightarrow f\left(x^{k-1}\right)=x$. Vậy:

$$f\left(x^{k-1}\right)=x,\ \forall x\neq 0. \tag{7}$$

Do $f(1)=1$ và k chẵn nên từ (3) suy ra $f(-1)=-1$.

◦ Với $x>0$, ta có $f(x)=f\left(\left(x^{\frac{1}{k-1}}\right)^{k-1}\right)\overset{\text{do (7)}}{=}x^{\frac{1}{k-1}}$.

◦ Với $x<0$, ta có

$$f(x)=f\left(-\left((-x)^{\frac{1}{k-1}}\right)^{k-1}\right)\overset{\text{do (6)}}{=}f(-1).f\left(\left((-x)^{\frac{1}{k-1}}\right)^{k-1}\right)\overset{\text{do (7)}}{=}-(-x)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Vậy $f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{k-1}} & \text{khi } x>0\\ 0 & \text{khi } x=0\\ -(-x)^{\frac{1}{k-1}} & \text{khi } x<0\end{cases}$ (k là số nguyên chẵn). (8).

Thử lại : Giả sử f là hàm số xác định bởi (8). Khi đó $f(0)=0$.

◦ Với $x>0$ và $y>0$ thì:

$$f\left(x^ky^k\right)=f\left((xy)^k\right)=\left((xy)^k\right)^{\frac{1}{k-1}}=(xy)^{\frac{k}{k-1}},$$

$$xyf(x)f(y)=xyx^{\frac{1}{k-1}}y^{\frac{1}{k-1}}=x^{\frac{k}{k-1}}y^{\frac{k}{k-1}}=(xy)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Vậy (1) được thỏa mãn.

◦ Với $x<0$ và $y<0$ thì:

$$f\left(x^ky^k\right)=f\left((xy)^k\right)=\left((xy)^k\right)^{\frac{1}{k-1}}=(xy)^{\frac{k}{k-1}},$$
$$xyf(x)f(y)=xy(-x)^{\frac{1}{k-1}}(-y)^{\frac{1}{k-1}}=(-x)^{\frac{k}{k-1}}(-y)^{\frac{k}{k-1}}=(xy)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Vậy (1) được thỏa mãn.

◦ Với $x>0$ và $y<0$ thì:

$$f\left(x^ky^k\right)\overset{\text{do } k \text{ chẵn}}{=}f\left((-xy)^k\right)\overset{\text{do } (-xy)^k>0}{=}\left((-xy)^k\right)^{\frac{1}{k-1}}=(-xy)^{\frac{k}{k-1}},$$
$$xyf(x)f(y)=-xyx^{\frac{1}{k-1}}(-y)^{\frac{1}{k-1}}=x^{\frac{k}{k-1}}(-y)^{\frac{k}{k-1}}=(-xy)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Vậy (1) được thỏa mãn.

◦ Với $x<0$ và $y>0$, tương tự như trên thấy rằng (1) được thỏa mãn.

Tóm lại hàm số xác định bởi (8) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Kết luận : nếu k là số nguyên lẻ thì có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$; nếu k là số nguyên chẵn thì có hai hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R} \text{ và } f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{k-1}} & \text{khi } x>0\\ 0 & \text{khi } x=0\\ -(-x)^{\frac{1}{k-1}} & \text{khi } x<0.\end{cases}$$

Bài toán 2.86 (Morocco National Olympiad 2011, Day 2). *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$xf(x+xy)=xf(x)+f(x^2)f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (1). Ta có $P(0,0)\Rightarrow f(0)=0$. Nếu $f(1)=0$ thì $P(1,x-1)\Rightarrow f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, thử lại thấy thỏa mãn. Tiếp theo giả sử $f(1)=a\neq 0$. Nếu $a\neq 1$ thì với $n\in\mathbb{N}^*$ ta có

$$P(1,n)\Rightarrow f(n+1)=a+af(n)\Rightarrow f(n+1)+\frac{a}{a-1}=a\left[f(n)+\frac{a}{a-1}\right]$$
$$\Rightarrow f(n)+\frac{a}{a-1}=a^{n-1}\left[f(1)+\frac{a}{a-1}\right]$$
$$\Rightarrow f(n)=a^{n-1}\left(a+\frac{a}{a-1}\right)-\frac{a}{a-1}=\frac{a^{n+1}-a}{a-1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*. \tag{2}$$

Với m và n thuộc $\mathbb{N}^*$, thực hiện $P(m,n)$ và sử dụng (2) ta được

$$\begin{aligned}
&mf(m+mn) = mf(m) + f(m^2)f(n)\\
\Rightarrow &\frac{m(a^{m+mn+1}-a)}{a-1} = \frac{m(a^{m+1}-a)}{a-1} + \frac{a^{m^2+1}-a}{a-1}\cdot\frac{a^{n+1}-a}{a-1}\\
\Rightarrow &\frac{m(a^{m+mn+1}-a^{m+1})}{a-1} = \frac{(a^{m^2+1}-a)(a^{n+1}-a)}{(a-1)^2}\\
\Rightarrow &m(a^{m+mn+1}-a^{m+1})(a-1) = (a^{m^2+1}-a)(a^{n+1}-a)\\
\Rightarrow &ma^{m+1}(a^{mn}-1)(a-1) = a^2(a^{m^2}-1)(a^n-1)\\
\Rightarrow &ma^{m-1}(a^{mn}-1)(a-1) = (a^{m^2}-1)(a^n-1), \forall n,m \in \mathbb{N}^*. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Từ (3) lấy $m = n = 2$ ta được

$$2a(a^4-1)(a-1) = (a^4-1)(a^2-1) \overset{\text{do } a\neq 1}{\Leftrightarrow} 2a = a+1 \Leftrightarrow a = 1 \text{ (mâu thuẫn).}$$

Vậy $a = 1$, nghĩa là $f(1) = 1$.

$$P(1,x) \Rightarrow f(x+1) = f(x)+1,\ \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (4)$$

Từ (4) suy ra $f(n+1) = f(n)+1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, do đó dãy số $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$,... lập thành một cấp số cộng có công sai $d = 1$, số hạng đầu $f(0) = 0$, do đó $f(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Từ (4) ta suy ra

$$f(x+n) = f(x)+n,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (5)$$

Do đó $0 = f(0) = f(-1+1) = f(-1)+1 \Rightarrow f(-1) = -1$. Vì thế nên

$$P(x,-1) \Rightarrow 0 = xf(x) + f(x^2)f(-1) \Rightarrow f(x^2) = xf(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (6)$$

Thay (6) vào (1) ta được

$$\begin{aligned}
&xf(x+xy) = xf(x)\,[1+f(y)] = xf(x)f(y+1), \forall x,y \in \mathbb{R}\\
\Leftrightarrow &xf\,(x(y+1)) = xf(x)f(y+1), \forall x,y \in \mathbb{R}\\
\Leftrightarrow &f\,(x(y+1)) = f(x)f(y+1), \forall x,y \in \mathbb{R}\\
\Leftrightarrow &f(xy) = f(x)f(y), \forall x,y \in \mathbb{R}. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Do (7) nên (6) trở thành: $f(x)\,[f(x)-x] = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (8)
Nếu tồn tại $x \neq 0$ sao cho $f(x) = 0$ thì theo (4) ta có $f(x+1) = 1$, do đó theo (8) được $f(x+1) = x+1$, suy ra $x+1 = 1 \Rightarrow x = 0$, mâu thuẫn. Vậy từ (8) ta có $f(x) = x$, $\forall x \neq 0$, kết hợp với $f(0) = 0$ được $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv x$.

Bài toán 2.87. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(f(x-y)) = f(x) - f(y) + f(x)f(y) - xy, \forall x,y \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Giải. Đặt $f(0) = a$. Thay $x = y$ vào (1) ta được

$$f(a) = [f(x)]^2 - x^2, \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Thay $x = 0$ vào (2) ta được $f(a) = a^2$. Tiếp tục thay $x = a$ vào (2) ta được $f(a) = [f(a)]^2 - a^2$. Từ đó $a^2 = a^4 - a^2 \Rightarrow a^2(a^2-2) = 0 \Rightarrow a^2 = 0$ hoặc $a^2 = 2$.
Thay $x = a, y = 0$ vào (1) ta được

$$f(f(a)) = f(a) - a + af(a) = a^3 + a^2 - a.$$

Thay $x = f(a)$ vào (2) ta được $f(a) = [f(f(a)]^2 - [f(a)]^2$. Suy ra

$$a^2 = (a^3+a^2-a)^2 - a^4 \Rightarrow (a^3+a^2-a)^2 = a^4 + a^2.$$

Dễ thấy $a^2 = 0$ thỏa mãn $(a^3+a^2-a)^2 = a^4+a^2$. Còn nếu $a^2 = 2$ thì thay vào $(a^3+a^2-a)^2 = a^4+a^2$ ta được:

$$\begin{aligned}
&(a^3-a+2)^2 = 6 \Rightarrow [a(a^2-1)+2]^2 = 6 \overset{\text{do } a^2-1=1}{=} (a+2)^2\\
\Rightarrow &a^2+4a+4 = 6 \Rightarrow 4a = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ (mâu thuẫn).}
\end{aligned}$$

Vậy $f(0) = 0$. Do đó từ (1) lấy $y = 0$ ta có $f(f(x)) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Bởi vậy (1) trở thành: $f(x-y) = f(x) - f(y) + f(x)f(y) - xy, \forall x,y \in \mathbb{R}$. (3)
Thay $x = 0$ vào (3) được $f(-y) = -f(y), \forall y \in \mathbb{R}$, vậy f là hàm lẻ. Từ (2) có

$$[f(x)]^2 = x^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = x \\ f(x) = -x. \end{array}\right.$$

Nhận xét rằng nếu có x mà $f(x) = 0$ thì $x^2 = [f(x)]^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. Vậy $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Giả sử có $x \neq 0$ mà $f(x) = -x$. Khi đó

$$f(-x) = f(f(x)) = f(x) \Rightarrow -f(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (vô lí).}$$

Vậy với mọi x ta có $f(x) = x$. Đó là hàm số duy nhất thỏa mãn bài toán.

Bài toán 2.88. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(f(x)-y) = f(x) - f(y) + f(x)f(y) - xy, \forall x,y \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Hướng dẫn. Đặt $f(0) = a$. Thay $y = 0$ vào (1) ta được

$$f(f(x)) = f(x) - a + af(x), \forall x \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

Thay $y = f(x)$ vào (1) ta được

$$a = f(x) - f(f(x)) + f(x).f(f(x)) - xf(x), \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Trong (2) thay $x=0$ ta được $f(a)=a-a+a^2=a^2$. Trong (1) thay $x=0$ và $y=f(0)=a$ ta được

$$a=a-f(a)+af(a)\Rightarrow 0=f(a)[a-1]$$
$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\f(a)=0\end{array}\right. \overset{\text{do } f(a)=a^2}{\Rightarrow}\left[\begin{array}{l}a=1\\a^2=0\end{array}\right. \Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=0.\end{array}\right.$$

Với $a=0$, thay vào (2) ta được $f(f(x))=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Kết hợp với (3) ta được $f(x)=x$ (thỏa mãn). Với $a=1$ thay vào (2) ta được

$$f(f(x))=2f(x)-1,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Kết hợp với (3) ta được $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ (không thỏa mãn). Vậy có đúng một hàm số thỏa mãn đề bài là $f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$.

Bài toán 2.89. *Tìm tất cả các hàm số $f;\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(f(x)+y\right)=f\left(x+y\right)+xf(y)-xy-x+1,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Từ (1) cho $y=0$ ta được $f\left(f(x)\right)=f\left(x\right)+xf(0)-x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. (2)
Trong (2) cho $x=0$ ta được: $f\left(f(0)\right)=f\left(0\right)+1$. (3)
Từ (1) thay y bởi $f(y)$ ta được

$$f\left(f(x)+f(y)\right)=f\left(x+f(y)\right)+xf\left(f(y)\right)-xf(y)-x+1,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Thay (1), (2) vào (4) được

$$\begin{aligned}&f\left(f(x)+f(y)\right)\\&=f\left(x+y\right)+yf(x)-xy-y+1+x\left[f\left(y\right)+yf(0)-y+1\right]-xf(y)-x+1\\&=f\left(x+y\right)+yf(x)+xyf(0)-2xy-y+2.\end{aligned}$$

Vậy $f\left(f(x)+f(y)\right)=f\left(x+y\right)+yf(x)+xyf(0)-2xy-y+2,\forall x,y\in\mathbb{R}$. (5)
Trong (5) hoán vị x và y ta được

$$f\left(f(x)+f(y)\right)=f\left(x+y\right)+xf(y)+xyf(0)-2xy-x+2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Từ (5) và (6) suy ra: $yf(x)-xf(y)-y+x=0,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. (7)
Trong (7) lấy $(x;y)=(0;1)$ được $f(0)-1=0\Leftrightarrow f(0)=1$. Từ (3) suy ra $f(f(0))=2$. Từ (7) thay $y=f(0)$ và sử dụng $f(0)=1, f(f(0))=2$ ta được

$$\begin{aligned}&f(x)-2x-1+x=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\\&\Rightarrow f(x)=x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Vậy $f(x)=x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.
Cách khác (tiếp nối từ (7)). Từ (7) lấy $y=1$ được

$$f(x)-xf(1)-1+x=0\Rightarrow f(x)=(f(1)-1)x+1\Rightarrow f(x)=ax+1,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Thay $f(x)=ax+1,\forall x\in\mathbb{R}$ vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&a\left(ax+1+y\right)+1=a(x+y)+1+x(ay+1)-xy-x+1,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\&\Leftrightarrow a^2x+a+ay+1=ax+ay+1+axy+x-xy-x+1.\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\&\Leftrightarrow a^2x+a=ax+axy-xy+1,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Lấy $x=0$ ta được $a=1$. Vậy $f(x)=x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.90. *Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(f(x+y))=f(x+y)+f(x)f(y)-xy,\forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Rõ ràng f không phải là hàm hằng. Trong (1) lấy $y=0$ ta được

$$f\left(f(x)\right)=[1+f(0)]f(x),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ (2) thay x bởi $x+y$ ta được

$$\begin{aligned}&[1+f(0)]f(x+y)=f\left(f(x+y)\right)=f(x+y)+f(x)f(y)-xy,\forall x,y\in\mathbb{R}\\&\Rightarrow f(0)f(x+y)=f(x)f(y)-xy,\forall x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{3}$$

Từ (3) cho $y=1$ được: $f(0)f(x+1)=f(x)f(1)-x,\forall x\in\mathbb{R}$. (4)
Từ (3) thay $y=-1$ và thay x bởi $x+1$ được

$$f(0)f(x)=f(x+1)f(-1)+x+1,\forall x\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

• Nếu $f(0)=0$ thì từ (4) suy ra $f(x)f(1)=x,\forall x\in\mathbb{R}$, dẫn tới $f(1)\neq 0$ và $f(x)\equiv ax$. Thay vào (3) được $a^2xy=xy,\forall x,y\in\mathbb{R}$. Lấy $x=y=1$ dẫn tới $a=\pm 1$. Thử lại thấy chỉ có $f(x)\equiv x$ thỏa mãn (1).

• Xét $f(0)\neq 0$. Từ (4) rút ra $f(x+1)=\dfrac{f(x)f(1)-x}{f(0)}$, thay vào (5) được

$$\begin{aligned}&f(0)f(x)=\frac{f(x)f(1)-x}{f(0)}f(-1)+x+1,\forall x\in\mathbb{R}\\&\Leftrightarrow\left[f^2(0)-f(1)f(-1)\right]f(x)=\left[f(0)-f(-1)\right]x+f(0),\forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{6}$$

Từ (5) lấy $x=0$ được $f^2(0)=f(1)f(-1)+1$, kết hợp với (6) suy ra kết quả $f(x)=ax+b,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (1) được

$$\begin{aligned}&a\left[a(x+y)+b\right]+b=a(x+y)+b+(ax+b)\left(ay+b\right)-xy,\forall x,y\in\mathbb{R}\\&\Leftrightarrow a\left[a(x+y)+b\right]=a(x+y)+(ax+b)\left(ay+b\right)-xy,\forall x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{7}$$

Từ (7) cho $x=y=0$ được $ab=b^2$. Mà $b=f(0)\neq 0$ nên suy ra $a=b$, lúc này (7) trở thành

$$a\left[a(x+y)+a\right]=a(x+y)+(ax+a)\left(ay+a\right)-xy,\forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{8}$$

Từ (8) cho $x=1$ và $y=0$ ta được $2a^2=a+2a^2\Leftrightarrow a=0$, suy ra $f(x)\equiv 0$, không thỏa mãn. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 2.91. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f\left(x^2+xy+f(y)\right)=f^2(x)+xf(y)+y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Kí hiệu $P(x;y)$ là phép thế bộ $(x;y)$ vào phương trình hàm (1). Ta có

$$P(x;0):\ f\left(x^2+f(0)\right)=f^2(x)+xf(0),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

$$P(-x;0):\ f\left(x^2+f(0)\right)=f^2(-x)-xf(0),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Từ (2) và (3) suy ra: $f^2(-x)-f^2(x)=2xf(0),\ \forall x\in\mathbb{R}.$ (4)
Ta lại có:

$$P(0;y):\ f(f(y))=f^2(0)+y,\ \forall y\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

$$P(-y;y):\ f(f(y))=f^2(-y)-yf(y)+y,\ \forall y\in\mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow f^2(-y)-yf(y)+y=f^2(0)+y,\ \forall y\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f^2(-y)-yf(y)=f^2(0),\ \forall y\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Từ (6) thay y bởi $-y$ và kết hợp với (6) ta được

$$f^2(-y)-yf(y)=f^2(y)+yf(-y),\ \forall y\in\mathbb{R}. \tag{7}$$

Từ (7) và (4) suy ra: $xf(-x)+xf(x)=2xf(0),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Do đó:

$$f(-x)+f(x)=2f(0),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{8}$$

Từ (7) ta có: $xf(x)+xf(-x)=f^2(-x)-f^2(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Do đó:

$$x\left[f(x)+f(-x)\right]=\left[f(-x)+f(x)\right]\left[f(-x)-f(x)\right],\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{9}$$

Thay (8) vào (9) được: $2f(0)x=2f(0)\left[f(-x)-f(x)\right],\ \forall x\in\mathbb{R}$. Hay:

$$2f(0)\left[f(-x)-f(x)-x\right]=0,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{10}$$

• Trường hợp 1: $f(0)=0$. Từ (8) và (6) ta có:

$$\begin{cases} f^2(-x)=xf(x) \\ f(-x)=-f(x) \end{cases}\Rightarrow xf(x)=f^2(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{11}$$

Do $f(0)=0$ nên theo (5) suy ra $f(f(x))=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Vì thế nếu tồn tại $a\neq 0$ sao cho $f(a)=0$ thì $a=f(f(a))=f(0)=0$, mâu thuẫn. Vậy $f(x)\neq 0,\ \forall x\neq 0$. Kết hợp với (11) ta được $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
• Trường hợp 2: $f(0)\neq 0$. Từ (10) suy ra $f(-x)=f(x)+x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (8) dẫn đến: $f(x)+x+f(x)=2f(0),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Hay:

$$f(x)=-\frac{x}{2}+a,\ \forall x\in\mathbb{R}\ (a=f(0)). \tag{12}$$

Thay (12) vào (1) được:

$$a-\frac{\left(x^2+xy+a-\frac{y}{2}\right)}{2}=\left(a-\frac{x}{2}\right)^2+x\left(a-\frac{y}{2}\right)+y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{13}$$

Từ (13) lấy $x=y=2$ được

$$a-\frac{a+7}{2}=(a-1)^2+2(a-1)+2\Leftrightarrow 2a^2-a+9=0\ \text{(vô lí)}.$$

Vậy $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ là hàm số duy nhất thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 2.92 (HSG Quốc gia-2007). *Cho b là một số thực dương. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+y)=3^{b^y+f(y)-1}f(x)+b^x\left[3^{b^y+f(y)-1}-b^y\right],\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Giải. Từ giả thiết có $f(x+y)+b^{x+y}=3^{b^y+f(y)-1}[f(x)+b^x],\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. (1)
Cho $y=0$ ta nhận được: $f(x)+b^x=3^{f(0)}[f(x)+b^x],\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. (2)
Từ (1) suy ra, nếu $f(0)\neq 0$ thì $f(x)=-b^x$. Bây giờ, ta xét trường hợp $f(0)=0$. Khi đó, trong (1) lần lượt cho $x=0,\ y=-x$ ta được

$$f(y)+b^y=3^{b^y+f(y)-1},\quad f(x)+b^x=3^{-b^{-x}-f(-x)+1}.$$

Do đó: $f(x)+b^x+f(-x)+b^{-x}=2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. (3)
Trong (1), ta lại cho $y=x$ thì được

$$f(2x)+b^{2x}=3^{b^x+f(x)-1}[f(x)+b^x]=[f(x)+b^x]^2,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Trong (4), thay x bởi $-x$ rồi cộng công thức thu được với (4) theo vế ta được

$$f(2x)+b^{2x}+f(-2x)+b^{-2x}=[f(x)+b^x]^2+[f(-x)+b^{-x}]^2,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Do đó: $[f(x)+b^x]^2+[f(-x)+b^{-x}]^2=2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. (5)
Kết hợp (3) và (5), ta có $f(x)+b^x=1\Leftrightarrow f(x)=1-b^x$. Dễ thấy hai hàm

$$f(x)=b^x,\ \forall x\in\mathbb{R}\ \text{và}\ f(x)=1-b^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

đều thỏa mãn đề bài và đó là tất cả các nghiệm của phương trình đã cho.

Bài toán 2.93 (IMO-2010). *Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f([x]\,y)=f(x)\,[f(y)],\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Ở đây $[a]$ được ký hiệu là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng a.

Giải. Cho $y = 0$, ta được: $f(0) = f(x).[f(0)], \forall x \in \mathbb{R}$. (2)

• Nếu $[f(0)] \neq 0$ thì $f(x) = \dfrac{f(0)}{[f(0)]} = \dfrac{c}{[c]}, \forall x \in \mathbb{R}$, với c bất kỳ và $[c] \neq 0$ (thử lại thấy thỏa mãn).

• Xét $[f(0)] = 0$, khi đó từ (2) dẫn đến $f(0) = 0$. Từ (1) cho $y = 1$ được

$$f([x]) = f(x)\,[f(1)],\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Từ (3) cho $x = 1$ được: $f(1) = f(1)\,[f(1)] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) = 0 \\ [f(1)] = 1. \end{array}\right.$

∘ Khi $f(1) = 0$. Từ (1) cho $x = 1$ ta được $f(y) = 0,\ \forall y \in \mathbb{R}$, hay $f(x) \equiv 0$, thử lại thấy thỏa mãn.

∘ Khi $[f(1)] = 1$. Từ (3) ta có: $f([x]) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. (4)

Với $x \in [0; 1)$, từ (4) suy ra $f(x) = f(0) = 0$. Từ (1) cho $y = \dfrac{1}{2}$ ta được

$$f\left(\frac{[x]}{2}\right) = f(x)\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Từ (5) cho $x = 2$ được $f(1) = 0$, mâu thuẫn với $[f(1)] = 1$.

Tóm lại tất cả các hàm thỏa mãn (1) là

$$f(x) = \frac{c}{[c]},\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } c \text{ bất kỳ và } [c] \neq 0) \text{ và } f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.94. *Tìm tất cả các hàm số* $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ *thỏa mãn*

$$f(x^y) = [f(x)]^{f(y)},\ \forall x, y > 0. \tag{1}$$

Giải. Rõ ràng $f(x) \equiv 1$ thỏa mãn (1). Tiếp theo giả sử $\exists a > 0 : f(a) \neq 1$. Sử dụng (1) ta được

$$[f(a)]^{f(xy)} = f(a^{xy}) = [f(a^x)]^{f(y)} = [f(a)]^{f(x)f(y)}, \forall x, y > 0$$
$$\Rightarrow f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y > 0. \tag{2}$$

Với $x > 0,\ y > 0$, tiếp tục sử dụng (1) ta được

$$[f(a)]^{f(x+y)} = f\left(a^{x+y}\right) \overset{\text{do (2)}}{=} f(a^x)\,f(a^y)$$
$$= [f(a)]^{f(x)}[f(a)]^{f(y)} = [f(a)]^{f(x)+f(y)}.$$

Suy ra: $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y > 0$. (3)

Từ (2) ta có $f(1) = f^2(1) \overset{\text{do } f(1)>0}{\Rightarrow} f(1) = 1$. Từ (3) và bằng phương pháp quy nạp suy ra $f(n) = n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó với $n \in \mathbb{N}^*,\ m \in \mathbb{N}^*$ ta có

$$m = f\left(n.\frac{m}{n}\right) \overset{\text{do (3)}}{=} f(n)f\left(\frac{m}{n}\right) = nf\left(\frac{m}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n},\ \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{Q},\ x > 0$. Ta sẽ chứng minh $f(x) = x,\ \forall x > 0$. Giả sử $\exists x > 0 : f(x) \neq x$. Nếu $f(x) < x$ thì $\exists r \in \mathbb{Q}$ sao cho $f(x) < r < x$. Khi đó

$$f(x) = f\,(r + (x - r)) \overset{\text{do (2)}}{=} f(r) + f(x - r) = r + f(x - r) > r,$$

mâu thuẫn với $f(x) < x$. Nếu $f(x) > x$ thì $\exists r \in \mathbb{Q}$: $x < r < f(x)$. Khi đó

$$r = f(r) = f\,(x + (r - x)) \overset{\text{do (2)}}{=} f(x) + f(r - x) > f(x),$$

mâu thuẫn với $r < f(x)$. Vậy $f(x) \equiv x$, thử lại thấy đúng. Các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là: $f(x) = 1,\ \forall x > 0\ ;\ f(x) = x,\ \forall x > 0$.

Bài toán 2.95. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f(x)f\,(yf(x) - 1) = x^2 f(y) - f(x),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Dễ thấy $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Tiếp theo giả sử $f(x) \neq 0$, tức là tồn tại $u \in \mathbb{R}$ sao cho $f(u) \neq 0$. Kí hiệu $P(u, v)$ chỉ việc thay bộ $(x; y)$ bởi bộ $(u; v)$ vào (1). $P(1, 1) \Rightarrow f(1)f\,(f(1) - 1) = 0$ và tồn tại v sao cho $f(v) = 0$. $P(v, u) \Rightarrow v^2 f(u) = 0 \Rightarrow v = 0$. Vậy $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Từ đây ta cũng có $f(1) = 1$. $P(1, x) \Rightarrow f(x - 1) = f(x) - 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Kết hợp với (1) được $f(x)\,[f\,(yf(x)) - 1] = x^2 f(y) - f(x),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$, hay

$$f(x)f\,(yf(x)) = x^2 f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Kí hiệu $Q(u, v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (2). Với $x \neq 0$ thì

$$Q(x, x) \Rightarrow f(x)f\,(xf(x)) = x^2 f(x) \Rightarrow f\,(xf(x)) = x^2,\ \forall x \neq 0. \tag{3}$$
$$Q(x, 1) \Rightarrow f(x)f\,(f(x)) = x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$
$$Q(x, y + 1) \Rightarrow f(x)f\,(yf(x) + f(x)) = x^2 f(y) + x^2,\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$
$$\Rightarrow f(x)f\,(yf(x) + f(x)) = f(x)f\,(yf(x)) + f(x)f\,(f(x)),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Với $z > 0$, từ (3) suy ra tồn tại x sao cho $f(x) = z$ và kết hợp với (5) được

$$f(yz + z) = f(yz) + f(z),\ \forall z > 0,\ \forall y \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f(x + y) = f(x) + f(y),\ \forall x > 0,\ \forall y \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Từ (6) cho $y = -x$ ta được $f(x) + f(-x) = 0,\ \forall x > 0$, từ đây và $f(0) = 0$ dễ dàng suy ra $f(-x) = -f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thực hiện $Q(x + 1, 1)$ ta được

$$[f(x) + 1]\,f\,(f(x) + 1) = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f\,(f(x)) + f(x) = 2x,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Từ (7) và (4) dẫn tới $[f(x) - x]^2 = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ hay $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.96 (Ôlympic Toán Châu Á Thái Bình Dương năm 2010). *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn: với mọi số thực $x,, y, z$, ta có*

$$f\left(f(x)+f(y)+f(z)\right)=f\left(f(x)-f(y)\right)+f\left(2xy+f(z)\right)+2f(xz-yz). \quad (1)$$

Giải. Kí hiệu $P(u,v,w)$ chỉ việc thay x bởi u, thay y bởi v, thay z bởi w vào phương trình hàm (1). Dễ thấy nếu f là hàm hằng thì từ (1) suy ra $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tiếp theo giả sử f không phải là hàm hằng.

Bước 1: Chứng minh $f(0)=0$.

Bước 1.1. Chứng minh: nếu $f(z_1)=f(z_2)$ thì $f(xz_1)=f(xz_2),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Đặt $a=f(z_1)=f(z_2)$.

$$P(x,0,z_1)\Rightarrow f\left(f(x)+f(0)+a\right)=f\left(f(x)-f(0)\right)+f(a)+2f(xz_1).$$
$$P(x,0,z_2)\Rightarrow f\left(f(x)+f(0)+a\right)=f\left(f(x)-f(0)\right)+f(a)+2f(xz_2).$$

Suy ra $2f(xz_1)=2f(xz_2),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Hay $f(xz_1)=f(xz_2),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Bước 1.2. Chứng minh f là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$, tức là $f(-x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Do f không phải là hàm hằng nên tồn tại $x\neq y$ sao cho $f(x)-f(y)=b\neq 0$.

$$P(x,y,0)\Rightarrow f(f(x)+f(y)+f(0))=f(b)+f(2xy+f(0))+2f(0).$$
$$P(y,x,0)\Rightarrow f(f(x)+f(y)+f(0))=f(-b)+f(2xy+f(0))+2f(0).$$

Suy ra $f(-b)=f(b)$. Từ đây, sử dụng kết quả đã chứng minh ở bước 1.1, suy ra $f(bx)=f(-bx),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Hay $f(-x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$ (do $b\neq 0$).

Bước 1.3. Chứng minh: $f(z_1)=f(z_2)\Rightarrow z_1=\pm z_2$. Giả sử $f(z_1)=f(z_2)$.

$$\begin{aligned}P(xz_2,yz_1,1)&\Rightarrow f(f(xz_2)+f(yz_1)+f(1))\\&=f(f(xz_2)-f(yz_1))+f(2xyz_1z_2+f(1))+2f(xz_2-yz_1).\\P(xz_1,yz_2,1)&\Rightarrow f(f(xz_1)+f(yz_2)+f(1))\\&=f(f(xz_1)-f(yz_2))+f(2xyz_1z_2+f(1))+2f(xz_1-yz_2).\end{aligned}$$

Từ đây, kết hợp với kết quả đã chứng minh ở bước 1.1, ta thu được

$$f(xz_2-yz_1)=f(xz_1-yz_2),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (2)$$

Xét hệ (hai ẩn đối với x và y): $\begin{cases}xz_2-yz_1=u\\xz_1-yz_2=v.\end{cases}$ Hệ này có định thức

$$D=\begin{vmatrix}z_2&-z_1\\z_1&-z_2\end{vmatrix}=z_1^2-z_2^2.$$

Nếu $z_1^2\neq z_2^2$ thì với mọi u,v, hệ luôn có nghiệm duy nhất và theo (2), ta có $f(u)=f(v),\ \forall u,v\in\mathbb{R}$. Điều này mâu thuẫn với sự kiện f là hàm hằng. Do đó $z_1^2=z_2^2$.

Bước 1.4. Chứng minh: $f(0)=0$. Theo kết quả đã chứng minh ở bước 1.2, ta có $f(1)=f(-1)$.

$$f(1,1,0)\Rightarrow f(2f(1)+f(0))=f(2+f(0))+3f(0)$$
$$f(1,-1,0)\Rightarrow f(2f(1)+f(0))=f(-2+f(0))+3f(0)$$
$$\Rightarrow f(2+f(0))=f(-2+f(0))$$
$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2+f(0)=-2+f(0)\\2+f(0)=2-f(0)\end{array}\right.\Rightarrow f(0)=0.$$

Bước 2: Chứng minh: $f(x)=x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$$P(x,x,0)\Rightarrow f(2f(x))=f(2x^2),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Sử dụng kết quả đã chứng minh ở bước 1.3, ta được: với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì $f(x)=x^2$ hoặc $f(x)=-x^2$. Giả sử $\alpha\neq 0$, ta chứng minh $f(\alpha)\neq-\alpha^2$. Nếu $f(\alpha)=-\alpha^2$ thì

$$P(\alpha,\alpha,\alpha)\Rightarrow f(-3\alpha^2)=f(\alpha^2)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha^2=-3\alpha^2\\\alpha^2=3\alpha^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\alpha=0.$$

Đến đây ta gặp mâu thuẫn. Vậy $f(\alpha)\neq-\alpha^2$. Do đó $f(x)=x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Kết luận : các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là :

$$f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 2.97. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f\left(x^2+f(y)-y\right)=f^2(x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Nếu f là hàm hằng thì $f(x)\equiv 0,\ f(x)\equiv 1$. Giả sử f không phải là hàm hằng, ta sẽ chứng minh $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Từ (1) cho $y=x^2$ được

$$f\left(f(x^2)\right)=f^2(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (2)$$

Giả sử tồn tại $y_1\in\mathbb{R}, y_2\in\mathbb{R}, y_1\neq y_2$ sao cho $a=f(y_1)-y_1>f(y_2)-y_2=b$.
Khi đó: $f(x^2+a)=f(x^2+b),\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(x^2+a)=f\left(f(x^2)\right),\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Suy ra: $f(x+a)=f(x+b)=f\left(f(x)\right),\ \forall x\geq 0.$ (3)
Đặt $m=\max\{a,b\}$, khi đó

$$\begin{aligned}&f(x)=f\left((x-b)+b\right)=f(x+a-b),\ \forall x\geq m\\\Rightarrow&f(x)=f(x+T),\ \forall x\geq m\ \left(\text{với } T=a-b>0\right)\\\Rightarrow&f(x)=f(x+nT),\ \forall x\geq m\ \left(\text{với } n\in\mathbb{N}^*\right).\end{aligned}$$

Cố định $y_0\geq m$. Khi đó với mọi $u\in\mathbb{R}$, tồn tại $x_0\in\mathbb{R}$ và $n\in\mathbb{N}^*$ sao cho

$$\begin{aligned}&u+y_0-f(y_0)=x_0^2-nT\\\Rightarrow&u=f(y_0)-y_0-nT+x_0^2=x_0^2+f(y_0+nT)-(y_0+nT)\\\Rightarrow&f(u)=f\left(x_0^2+f(y_0+nT)-(y_0+nT)\right)=f^2(x_0)\geq 0.\end{aligned}$$

Suy ra $f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Từ (2) ta có

$$f^2(x) = f^2(-x) \overset{\text{do } f(x)\geq 0}{\Rightarrow} f(x) = f(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do f không phải là hàm hằng nên tồn tại $r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}, r \neq s$ sao cho $f(r) > f(s) \geq 0$. Chọn $y_0 = \dfrac{r^2 - s^2}{2}$. Khi đó

$$\begin{aligned} &r^2 + f(y_0) - y_0 = s^2 + f(-y_0) - (-y_0) \\ \Rightarrow &f\left(r^2 + f(y_0) - y_0\right) = f\left(s^2 + f(-y_0) - (-y_0)\right) \\ \Rightarrow &f^2(r) = f^2(s) \Rightarrow f(r) = f(s) \ \text{(mâu thuẫn)}. \end{aligned}$$

Do đó $f(x) - x = a,\ \forall x \in \mathbb{R}$ hay $f(x) = x + a,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào (1) được $a = 0$. Vậy có ba hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.98. *Cho a và b là các số thực khác 0. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

$$f(2x) = af(x) + bx,\ \forall x \in \mathbb{R}^*. \tag{1}$$

$$f(x)f(y) = f(xy) + f\left(\frac{x}{y}\right),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^*. \tag{2}$$

Giải. Từ (1) suy ra $f(x) \not\equiv 0$. Từ (2) thay x bởi y và thay y bởi x rồi kết hợp với (2) được $f\left(\dfrac{x}{y}\right) = f\left(\dfrac{y}{x}\right),\ \forall x \neq 0,\ y \neq 0$. Suy ra $f(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right),\ \forall x \neq 0$. Từ (2) cho $y = 1$ được $f^2(1) = 2f(1) \Leftrightarrow f(1) \in \{0, 2\}$. Nếu $f(1) = 0$ thì từ (2) cho $y = 1$ được $f(x) = 0,\ \forall x \neq 0$, mâu thuẫn. Vậy $f(1) = 2$. Từ (2) thay $(x; y)$ bởi $\left(2x; \dfrac{1}{2}\right)$ ta được: $f(2x)f\left(\dfrac{1}{2}\right) = f(x) + f(4x),\ \forall x \in \mathbb{R}^*$. (3)

Ta có $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = f(2) \overset{\text{do (1)}}{=} 2a + b$ và

$$f(4x) = af(2x) + 2bx = a\left[af(x) + bx\right] + 2bx = a^2 f(x) + (ab + 2b)x. \tag{4}$$

Mặt khác theo (3) thì

$$\begin{aligned} f(4x) &= f(2x)f\left(\frac{1}{2}\right) - f(x) = \left[af(x) + bx\right](2a + b) - f(x) \\ &= \left(2a^2 + ab - 1\right) f(x) + (2ab + b^2)x. \end{aligned} \tag{5}$$

Từ (4) và (5) suy ra: $\left(a^2 + ab - 1\right) f(x) = (2b - ab - b^2)x,\ \forall x \in \mathbb{R}^*$. (6)

• Nếu $a^2 + ab - 1 = 0$ thì từ (6) suy ra $2b - ab - b^2$. Do đó

$$a^2 - 1 + 2b - b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 - (b - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = (b - 1)^2.$$

∘ Nếu $a = b - 1$ thì: $2b - (b - 1)b - b^2 = 0 \Leftrightarrow 3b - 2b^2 = 0 \overset{\text{do } b\neq 0}{\Leftrightarrow} b = \dfrac{3}{2} \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$.

Ta có:

$$f(2x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{3}{2}x,\ f(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{3x}{4}.$$

$$f\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{3}{2x} \Rightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{3}{2x}.$$

Suy ra $f(x) = \dfrac{1}{4}f(x) + \dfrac{3}{4x} + \dfrac{3x}{4} \Rightarrow f(x) = x + \dfrac{1}{x},\ \forall x \in \mathbb{R}^*$. Thử lại thấy đúng.

∘ Nếu $a = 1 - b$ thì $2b + (b - 1)b - b^2 = 0 \Leftrightarrow b = 0$, mâu thuẫn.

• Nếu $a^2 + ab - 1 \neq 0$ thì $f(x) = \dfrac{2b - ab - b^2}{a^2 + ab - 1}x = tx$. Thay vào (1) được

$$t^2xy = txy + \frac{tx}{y},\ \forall x, y \in \mathbb{R}^*. \tag{7}$$

Từ (7) cho $x = y = 1$ được $t^2 = 2t \Leftrightarrow t \in \{0, 2\}$. Nếu $t = 0$ thì mâu thuẫn với $f(x) \not\equiv 0$. Nếu $t = 2$ thì (7) trở thành $2xy = \dfrac{2x}{y},\ \forall x, y \in \mathbb{R}^*$, vô lí.

Kết luận: Để bài toán có nghiệm thì $(a; b) = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$, lúc đó hàm số cần tìm:

$$f(x) = x + \frac{1}{x},\ \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Bài toán 2.99. *Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ sao cho với mọi x, y thuộc $(0; +\infty)$ ta có: $f(f(x) + x^2 + 2y) = f(x) + x^2 + 2f(y)$.* (1)

Giải. Viết phương trình hàm (1) lại dưới dạng:

$$f(f(x) + x^2 + 2y) - [f(x) + x^2 + 2y] = 2[f(y) - y].$$

Đặt $h(x) = f(x) - x$ thì ta được: $h(f(x) + x^2 + 2y) = 2h(y)$. Từ đó suy ra:

$$h(f(x) + x^2 + 2y) = h(f(z) + z^2 + 2y), \forall x, z \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Do f nhận giá trị trong $(0; +\infty)$ nên $f(x) + x^2$ không thể là hàm hằng. Do đó phải tồn tại x_0 và z_0 sao cho $f(x_0) + x_0^2 > f(z_0) + z_0^2$. Đặt

$$T = f(x_0) + x_0^2 - [f(z_0) + z_0^2] > 0.$$

Khi đó với $x > f(z_0) + z_0^2$, sử dụng (2) ta có:

$$h(x+T) = h\big(f(x_0)+x_0^2+x-[f(z_0)+z_0^2]\big) = h\big(f(z_0)+z_0^2+x-[f(z_0)+z_0^2]\big) = h(x).$$

Tức là h sẽ là hàm tuần hoàn với chu kỳ T kể từ một điểm nào đó. Chú ý là điều này cũng sẽ đúng với mọi số có dạng $S = f(x) + x^2 - [f(z) + z^2]$ nếu như $S > 0$. Bây giờ ta xét $x > f(z_0) + z_0^2$ và

$$\begin{aligned} S &= f(x+T) + (x+T)^2 - [f(x) + x^2] \\ &= h(x+T) + x + T + (x+T)^2 - [h(x) + x + x^2] = T + T^2 + 2Tx. \end{aligned}$$

Như vậy, mọi giá trị $S > T + T^2 + 2T[f(z_0) + z_0^2]$ đều là chu kỳ của h. Như một hệ quả, nếu $x - y > T + T^2 + 2T[f(z_0) + z_0^2]$ thì $h(x) = h(y)$. Bây giờ xét x, y bất kỳ. Tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho $x + kT - y > T + T^2 + 2T[f(z_0) + z_0^2]$. Khi đó ta có theo các kết quả ở trên: $h(x) = h(x + kT) = h(y)$. Suy ra h là hàm hằng. Từ đó $f(x) = x + C$. Thay vào phương trình ban đầu, ta được:

$$x + C + x^2 + 2y + C = x + C + x^2 + 2(y + C).$$

Suy ra $C = 0$.
Kết luận: $f(x) = x$ là nghiệm duy nhất của phương trình hàm.
Lưu ý. Đây là một dạng phương trình hàm có kỹ thuật giải khá lạ.

2.2 Phương pháp tính theo hai cách

2.2.1 Một số lưu ý.

- Đây là phương pháp thường dùng khi giải phương trình hàm và được tiến hành như sau: Ta tính một biểu thức nào đó theo hai cách và đều có chứa $f(x)$, từ đây thu được một hệ phương trình để tìm $f(x)$. Ta sẽ còn gặp lại kĩ thuật này ở bài toán 4.68 ở trang 492, bài toán 2.327 ở trang 371, bài toán 2.330 ở trang 377.
- Việc thế các giá trị đặc biệt, thế biến cần có sự kế thừa, trong nhiều trường hợp ta cần tạo ra một chu trình. Chẳng hạn bài toán 2.106 ở trang 166.
- Để tính theo hai cách ta thường chứng minh hàm số cần tìm cộng tính:

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

2.2.2 Các bài toán minh họa phương pháp.

Bài toán 2.100. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x^2 - y) = xf(x) - f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Trong (1) lấy $x = y = 0$, ta được $f(0) = -f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$.
Trong (1), lấy $y = 0$ được: $f(x^2) = xf(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra: $f(x^2 - y) = f(x^2) - f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. (3)
Từ (3) cho $x = 0$ được $f(-y) = -f(y),\ \forall y \in \mathbb{R}$. Vậy trong (3) thay y bởi $-y$ được:

$$\begin{aligned} &f(x^2 + y) = f(x^2) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall x \geq 0,\ y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4}$$

Với $x \leq 0$ ta có $-x \geq 0$. Sử dụng (4) được

$$f(y) = f((x+y) + (-x)) = f(x+y) + f(-x) = f(x+y) - f(x).$$

Suy ra: $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall y \in \mathbb{R}, \forall x \leq 0$. Kết hợp với f là hàm lẻ và (4) ta được:

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Ta sẽ tính $f\left((x+1)^2\right)$ theo hai cách. Theo (2) và (5) được

$$f\left((x+1)^2\right) = (x+1)f(x+1) = (x+1)\left[f(x) + f(1)\right],\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} f\left((x+1)^2\right) &= f\left(x^2 + 2x + 1\right) = f(x^2) + f(2x) + f(1) \\ &= xf(x) + f(x+x) + f(1) = xf(x) + 2f(x) + f(1),\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{7}$$

Từ (6) và (7) cho ta

$$\begin{aligned} &(x+1)\left[f(x) + f(1)\right] = xf(x) + 2f(x) + f(1),\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &(x+1)f(1) = f(x) + f(1),\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &f(x) = f(1)x,\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Đặt $f(1) = a$. Thay $f(x) = ax,\ \forall x \in \mathbb{R}$ vào (1) thấy thỏa mãn. Tất cả các hàm số cần tìm đều có dạng

$$f(x) = ax,\ \forall x \in \mathbb{R}\ (a \text{ là hằng số bất kì}).$$

Bài toán 2.101. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(x^3 - y^3\right) = x^2 f(x) - y^2 f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Trong (1), cho $y = 0$, ta được $f\left(x^3\right) = x^2 f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Kết hợp với (1) ta được: $f\left(x^3 - y^3\right) = f\left(x^3\right) - f(y^3),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. (2)
Do tương ứng $x \mapsto x^3$ là song ánh nên từ (2) ta có

$$f(x-y) = f(x) - f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Do (3) nên

$$f(x) = f((x+y)-y) = f(x+y) - f(y) \Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Vậy: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. (4)
Từ (4) bằng quy nạp ta được: $f(kx) = kf(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$. Xét

$$f\left((x-1)^3 + (x+1)^3\right) = f\left(2x^3 + 6x\right) = f\left(2x^3\right) + f(6x)$$
$$= 2f\left(x^3\right) + 6f(x) = 2x^2 f(x) + 6f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Mặt khác

$$f\left((x-1)^3 + (x+1)^3\right) = f\left((x-1)^3\right) + f\left((x+1)^3\right)$$
$$= \left(x^2 - 2x + 1\right)[f(x) - f(1)] + \left(x^2 + 2x + 1\right)[f(x) + f(1)]$$
$$= \left(2x^2 + 2\right) f(x) + 4xf(1), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra

$$2x^2 f(x) + 6f(x) = \left(2x^2 + 2\right) f(x) + 4xf(1), \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow 4f(x) = 4xf(1), \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f(x) = cx, \ \forall x \in \mathbb{R} \ (c = f(1)).$$

Thử lại thấy hàm số $f(x) = cx$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (c là hằng số) thỏa mãn.

Nhận xét 1. *Qua hai bài toán 2.100, 2.101, ta thấy rằng : đối với phương trình hàm*

$$f\left(x^m \pm y^n\right) = x^k f\left(x^{m-k}\right) \pm y^\ell f\left(y^{n-\ell}\right), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$, $k, \ell \in \mathbb{N}$, $m > k, n > \ell$, để tiến hành tìm hàm số, ta thường ta làm như sau:

- *Xây dựng tính chất cộng tính cho hàm đã cho.*
- *Dựa vào đẳng thức $f\left(x^m\right) = x^k f\left(x^{m-k}\right)$ ta tính một trong những biểu thức sau theo hai cách khác nhau*

$$f\left((x+1)^m\right); f\left((x+1)^m + (x-1)^m\right); f\left((x-y)^m\right); f\left((x+1)^m - x^m\right), \ldots$$

Từ đó lập phương trình rồi rút ra hàm $f(x)$.

Bài toán 2.102 (Indonesia TST 2010). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x^3 + y^3) = xf(x^2) + yf(y^2), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Hướng dẫn. Tương tự bài toán 2.100, 2.101.

Bài toán 2.103 (USA MO 2000). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $f\left(x^2 - y^2\right) = xf(x) - yf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.* (1)

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Kí hiệu $P(u, v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (1).

$$P(0,0) \Rightarrow f(0) = 0.$$
$$P(0,y) \Rightarrow f\left(-y^2\right) = -yf(y), \forall y \in \mathbb{R}.$$
$$P(x,0) \Rightarrow f\left(x^2\right) = xf(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Vậy (1) trở thành: $f\left(x^2 - y^2\right) = f\left(x^2\right) + f\left(-y^2\right), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Suy ra:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \le 0. \quad (3)$$

Thay x bởi $-y$ vào (3) ta được:

$$0 = f(0) = f(-y) + f(y), \ \forall y \le 0$$
$$\Rightarrow f(-y) = -f(y), \ \forall y \le 0$$
$$\Rightarrow f(-y) = -f(y), \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Như vậy f là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$. Với $x \ge 0$ ta có $-x \le 0$. Sử dụng (3) được

$$f(y) = f((x+y) + (-x)) = f(x+y) + f(-x) = f(x+y) - f(x).$$

Suy ra: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\forall x \ge 0$. Kết hợp với f là hàm lẻ và (3) ta được: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, \ y \in \mathbb{R}$. (4)
Ta sẽ tính $f\left((x+1)^2\right)$ theo hai cách. Theo (2) và (4) được

$$f\left((x+1)^2\right) = (x+1)f(x+1) = (x+1)[f(x) + f(1)], \ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Mặt khác

$$f\left((x+1)^2\right) = f\left(x^2 + 2x + 1\right) = f(x^2) + f(2x) + f(1)$$
$$= xf(x) + f(x+x) + f(1) = xf(x) + 2f(x) + f(1), \ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Từ (5) và (6) cho ta:

$$(x+1)[f(x) + f(1)] = xf(x) + 2f(x) + f(1), \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow (x+1)f(1) = f(x) + f(1), \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f(x) = f(1)x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đặt $f(1) = a$. Thay $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$ vào (1) thấy thỏa mãn. Tất cả các hàm số cần tìm đều có dạng

$$f(x) = ax, \ \forall x \in \mathbb{R} \ (a \text{ là hằng số bất kì}).$$

2.2.3 Sử dụng đa thức.

Ta thấy rằng nghiệm của phương trình hàm

$$f\left(x^m \pm y^n\right) = x^k f\left(x^{m-k}\right) \pm y^\ell f\left(y^{n-\ell}\right),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

có dạng $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$. Tuy nhiên khi luỹ thừa càng cao thì việc tính toán càng trở nên phức tạp. Vì vậy ta cần "nâng cấp" kỹ thuật giải để đối phó với những bài toán với lũy thừa khá lớn. Bạn đọc hãy theo dõi bài toán 2.104 sau đây.

Bài toán 2.104. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(x^5 - y^5\right) = x^2 f(x^3) - y^2 f(y^3),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Kí hiệu $P(u, v)$ chỉ việc thay x bởi u, thay y bởi v vào (1).

$$P(0,0) \Rightarrow f(0) = 0\ ;\ P(x,0) \Rightarrow f(x^5) = x^2 f(x^3),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy (1) viết lại: $f(x^5 - y^5) = f(x^5) - f(y^5), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Hay:

$$f(x - y) = f(x) - f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Do đó: $f(x) = f\left((x + y) - y\right) \overset{\text{do (2)}}{=} f(x + y) - f(y)$. Suy ra:

$$f(x + y) = f(x) + f(y),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Từ (3), có thể tiến hành tương tự như bài toán 2.101 ở trang 161 (mặc dù khó hơn) hoặc làm cách khác (rất hay) như sau: Tương tự như bài toán 2.214 ở trang 278, ta chứng minh được

$$f(qx) = qf(x),\ \forall x \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{Q}. \tag{4}$$

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{Q}$, thực hiện $P(x + q, 0)$ ta được

$$\begin{aligned} &f\left(x^5 + 5qx^4 + 10q^2x^3 + 10q^3x^2 + 5q^4x + q^5\right) \\ &= \left(x^2 + 2qx + q^2\right) f\left(x^3 + 3qx^2 + 3q^2x + q^3\right). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} &f(x^5) + 5qf(x^4) + 10q^2 f(x^3) + 10q^3 f(x^2) + 5q^4 f(x) + q^5 f(1) \\ &- \left(x^2 + 2qx + q^2\right)\left[f(x^3) + 3qf(x^2) + 3q^2 f(x) + q^3 f(1)\right] = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Do vế trái của (5) là một đa thức theo biến q và bằng đa thức không với mọi $q \in \mathbb{Q}$ nên vế trái của (5) phải là đa thức không, dẫn tới hệ số của q^4 bằng 0, nghĩa là: $5f(x) - 2xf(1) - 3f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = ax,\ \forall x \in \mathbb{R}\ (a = f(1))$.

Thử lại thấy hàm số $f(x) = ax,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (với a là hằng số tùy ý) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Lưu ý. Ta đã sử dụng kết quả: Nếu đa thức $P(x)$ có vô số nghiệm thì $P(x) \equiv 0$, tức là $P(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, nói riêng, nếu số nghiệm của đa thức $P(x)$ lớn hơn $\deg(P)$ thì $P(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.105. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(x^{2015} - y^{2015}\right) = x^2 f(x^{2013}) - y^2 f(y^{2013}),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Kí hiệu $P(u, v)$ chỉ việc thay x bởi u, thay y bởi v vào (1).

$$P(0,0) \Rightarrow f(0) = 0\ ;\ P(x,0) \Rightarrow f(x^{2015}) = x^2 f(x^{2013}),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy (1) viết lại: $f(x^{2015} - y^{2015}) = f(x^{2015}) - f(y^{2015}), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Hay:

$$f(x - y) = f(x) - f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Do đó: $f(x) = f\left((x + y) - y\right) \overset{\text{do (2)}}{=} f(x + y) - f(y)$. Suy ra:

$$f(x + y) = f(x) + f(y),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Từ (3), tương tự như bài toán 2.214 ở trang 278, ta chứng minh được

$$f(qx) = qf(x),\ \forall x \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{Q}. \tag{4}$$

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{Q}$, thực hiện $P(x + q, 0)$ ta được:

$$\begin{aligned} &f\left((x+q)^{2015}\right) = (x+q)^2 f\left((x+q)^{2013}\right) \\ \Rightarrow &f\left(\sum_{k=0}^{2015} C_{2015}^k x^{2015-k} q^k\right) = (x^2 + 2qx + q^2) f\left(\sum_{i=0}^{2013} C_{2013}^i x^{2013-i} q^i\right) \\ \Rightarrow &\sum_{k=0}^{2015} C_{2015}^k f\left(x^{2015-k}\right) q^k - (x^2 + 2qx + q^2) \sum_{i=0}^{2013} C_{2013}^i f\left(x^{2013-i}\right) q^i = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Vế trái của (5) là một đa thức theo biến q, từ (5) ta thấy rằng đa thức theo biến q này có vô số nghiệm hữu tỉ, suy ra nó là đa thức không, do đó hệ số của q^{2014} bằng 0, hay:

$$\begin{aligned} &C_{2015}^{2014} f(x) - 2xC_{2013}^{2013} f(1) - C_{2013}^{2012} f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &2015 f(x) - 2xf(1) - 2013 f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R} \text{ với } a = f(1). \end{aligned}$$

Thử lại thấy hàm số $f(x) = ax,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (với a là hằng số tùy ý) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

2.2.4 Tạo chu trình.

Bài toán 2.106. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện:*
1) $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
2) $f(x+1)=f(x)+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
3) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{f(x)}{x^2}$, $\forall x\neq 0$.

Giải. Đặt $y=f(x)$. Khi đó

$$f(x+1)=y+1,\ f\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{y+1}{(x+1)^2},\ f\left(-\frac{1}{x+1}\right)=-\frac{y+1}{(x+1)^2},$$
$$f\left(\frac{x}{x+1}\right)=f\left(-\frac{1}{x+1}+1\right)=-\frac{y+1}{(x+1)^2}+1=\frac{x^2+2x-y}{(x+1)^2}, \tag{4}$$
$$f\left(\frac{x+1}{x}\right)=f\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+f\left(\frac{1}{x}\right)=1+\frac{y}{x^2}=\frac{x^2+y}{x^2},$$
$$f\left(\frac{x}{x+1}\right)=f\left(\frac{1}{\frac{x+1}{x}}\right)=\frac{f\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}=\frac{\frac{x^2+y}{x^2}}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}=\frac{x^2+y}{(x+1)^2}. \tag{5}$$

Từ (4) và (5) suy ra

$$\frac{x^2+2x-y}{(x+1)^2}=\frac{x^2+y}{(x+1)^2}\Rightarrow x^2+2x-y=x^2+y\Rightarrow y=x.$$

Vậy $f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$. Từ (1) lấy $x=0$ ta được $f(0)=0$. Từ (2) lấy $x=-1$ ta được $f(-1)=-1$. Sau khi thử lại ta kết luận: Có duy nhất một hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là $f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Lưu ý. Các phương trình hàm cho trong giả thiết sinh bởi các phép biến hình phản xạ, tịnh tiến, đối xứng, nghịch đảo. Ta dễ dàng tìm ra một chu trình liên hệ giữa $x+1$, $-x$, $\dfrac{1}{x}$ như sau:

$$x\xrightarrow{\text{tịnh tiến}}x+1\xrightarrow{\text{nghịch đảo}}\frac{1}{x+1}\xrightarrow{\text{đối xứng}}-\frac{1}{x+1}\xrightarrow{\text{tịnh tiến}}-\frac{1}{x+1}+1=\frac{x}{x+1}$$
$$\xrightarrow{\text{nghịch đảo}}\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}\xrightarrow{\text{đối xứng}}-1-\frac{1}{x}\xrightarrow{\text{tịnh tiến}}-\frac{1}{x}\xrightarrow{\text{nghịch đảo}}-x\xrightarrow{\text{đối xứng}}x.$$

Điều này giải thích tại sao ta có lời giải như trên. Bạn đọc có thể tìm hiểu thêm phép giải phương trình hàm bằng cách tạo ra chu trình trong bài toán 2.186 ở trang 235.

Bài toán 2.107. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện:*
1) $f(x)=xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\forall x\neq 0$.
2) $f(x)+f(y)=1+f(x+y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Giải. Từ (2) cho $x=y=0$ được $f(0)=1$. Từ (1) cho $x=-1$ suy ra $f(-1)=0$. Từ (2) cho $x=1$ và $y=-1$ được $f(1)+f(-1)=1+f(0)$, suy ra $f(1)=2$. Từ (2) thay y bởi $-x$ được $f(x)+f(-x)=2\Leftrightarrow f(-x)=2-f(x)$. Ta thu được các tính chất của hàm f như sau:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{f(x)}{x},\ \forall x\neq 0.$$
$$f(-x)=2-f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$
$$f(x+1)=f(x)+1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Đặt $y=f(x)$. Khi đó $f(x+1)=y+1$ và

$$f\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{y+1}{x+1},\ f\left(-\frac{1}{x+1}\right)=2-\frac{y+1}{x+1}=\frac{2x-y+1}{x+1}$$
$$f\left(\frac{x}{x+1}\right)=f\left(-\frac{1}{x+1}+1\right)=\frac{2x-y+1}{x+1}+1=\frac{3x-y+2}{x+1} \tag{3}$$
$$f\left(\frac{x+1}{x}\right)=f\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+f\left(\frac{1}{x}\right)=1+\frac{y}{x}=\frac{x+y}{x}$$
$$f\left(\frac{x}{x+1}\right)=f\left(\frac{1}{\frac{x+1}{x}}\right)=\frac{f\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\frac{x+1}{x}}=\frac{\frac{x+y}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\frac{x+y}{x+1}. \tag{4}$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$\frac{3x-y+2}{x+1}=\frac{x+y}{x+1}\Leftrightarrow 3x-y+2=x+y\Leftrightarrow 2x+2=2y\Leftrightarrow y=x+1.$$

Vậy $f(x)=x+1$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$. Kết hợp với kết quả $f(0)=1$, $f(-1)=0$ ta được $f(x)=x+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Cách khác. Ta có $f(0)=1$. Với $x\neq 0$ ta có

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=2f\left(\frac{x}{2}\right)-1=2.\frac{x}{2}f\left(\frac{2}{x}\right)-1=xf\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)-1$$
$$=x\left[2f\left(\frac{1}{x}\right)-1\right]-1=2x.\frac{1}{x}f(x)-x-1=2f(x)-x-1.$$

Suy ra $f(x)=x+1$, $\forall x\neq 0$. Lại do $f(0)=1$ nên $f(x)=x+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

2.2.5 Toán tổng hợp.

Bài toán 2.108 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2011). *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm*

$$f(x+y^4)=f(x)+yf(y^3),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Từ (1) cho $x=0$, $y=1$ ta được $f(1)=f(0)+f(1)\Leftrightarrow f(0)=0$.
Từ (1) cho $x=0$ được: $f(y^4)=yf(y^3),\ \forall y\in\mathbb{R}$. (2)
Trong (2) thay y bởi $-y$ ta được: $f(y^4)=-yf(-y^3),\ \forall y\in\mathbb{R}$. (3)
Từ (2) và (3) suy ra: $f(y^3)=-f(-y^3),\ \forall y\neq 0$. Từ đây kết hợp với $f(0)=0$ ta được: $f(-x)=-f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$ (do tương ứng $y\mapsto y^3$ là song ánh). (4)
Từ (1) đặt $t=y^4$ ta được: $f(x+t)=f(x)+f(t),\ \forall x\in\mathbb{R},\ t\geq 0$. (5)
Ta cần xét sự cộng tính của hàm f khi $t<0$. Do f là hàm lẻ (do (4)) nên $f(x+t)=-f(-x-t)$. Với $t<0$ thì $-t>0$ nên ta có

$$f(x+t)=-f(-x-t)\overset{\text{do (5)}}{=}-[f(-x)+f(-t)]=-[-f(x)-f(t)]=f(x)+f(t).$$

Từ đây kết hợp với (5) được: $f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. (6)
Từ (2) thay y bởi $x+1$ ta được:

$$\begin{aligned}&f\left((x+1)^4\right)=(x+1)f\left((x+1)^3\right),\ \forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&f(x^4+4x^3+6x^2+4x+1)=(x+1)f(x^3+3x^2+3x+1),\ \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{7}$$

Do f cộng tính (do (6)) nên từ (7) thu được

$$\begin{aligned}&xf(x^3)+4f(x^3)+6f(x^2)+4f(x)+f(1)\\ =&xf(x^3)+3xf(x^2)+3xf(x)+f(1)x+f(x^3)+3f(x^2)+3f(x)+f(1).\end{aligned} \tag{8}$$

Từ (2) thay y bởi $x-1$ ta được

$$\begin{aligned}&f\left((x-1)^4\right)=(x-1)f\left((x-1)^3\right),\ \forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&f(x^4-4x^3+6x^2-4x+1)=(x-1)f(x^3-3x^2+3x-1),\ \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{9}$$

Do f cộng tính nên từ (9) thu được

$$\begin{aligned}&xf(x^3)-4f(x^3)+6f(x^2)-4f(x)+f(1)\\ =&xf(x^3)-3xf(x^2)+3xf(x)-f(1)x-f(x^3)+3f(x^2)-3f(x)+f(1).\end{aligned} \tag{10}$$

Từ (8) và (10) suy ra: $f(x^2)=xf(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. (11)
Từ (11) thay x bởi $x+1$ ta được

$$f\left((x+1)^2\right)=(x+1)f(x+1),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow f(x^2+2x+1)=(x+1)[f(x)+f(1)],\ \forall x\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow xf(x)+2f(x)+f(1)=xf(x)+f(1)x+f(x)+f(1),\ \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{12}$$

Từ (12) rút gọn ta được $f(x)=f(1)x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy hàm số

$$f(x)=Cx,\ \forall x\in\mathbb{R}\ (C\text{ là hằng số tùy ý})$$

thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 2.109 (India International Mathematical Olympiad Training Camp 2010). *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+y)+xy=f(x)f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u, thay y bởi v vào (1).

$$P(x,1)\Rightarrow f(x+1)+x=f(x)f(1)\Rightarrow f(x+1)=f(x)f(1)-x\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Thực hiện $P(x+1,1)$ ta được

$$\begin{aligned}f(x+2)&=f(x+1)f(1)-x-1=[f(x)f(1)-x]f(1)-x-1\\ &=f^2(1)f(x)-x[f(1)+1]-1,\ \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{2}$$

Mặt khác: $P(x,2)\Rightarrow f(x+2)=f(x)f(2)-2x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. (3)
Từ (2) và (3) suy ra

$$\begin{aligned}&f(x)f(2)-2x=f^2(1)f(x)-x[f(1)+1]-1,\ \forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&f(x)\left[f(2)-f^2(1)\right]=[1-f(1)]x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{4}$$

Nếu $f(2)-f^2(1)=0$ thì từ (4) ta có $[1-f(1)]x=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, điều này không thể xảy ra. Vậy $f(2)-f^2(1)\neq 0$ và $f(x)\equiv ax+b$. Từ (1) cho $x=y=0$ được $f(0)=f^2(0)$. Nếu $f(0)=0$ thì $b=0$ và $f(x)\equiv ax$. Thay vào (3) được

$$\begin{aligned}&a(x+2)=2a.2x-2x,\ \forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&2a=(3a-2)x,\ \forall x\in\mathbb{R}\ (\text{vô lí}).\end{aligned}$$

Nếu $f(0)=1$ thì $b=1$ và $f(x)\equiv ax+1$. Thay vào (1) được

$$\begin{aligned}&a(x+y)+1+xy=(ax+1)(ay+1),\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&ax+ay+xy+1=a^2xy+ax+ay+1,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&xy=a^2xy,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Vậy $a=\pm 1$. Do đó $f(x)\equiv x+1$, $f(x)=-x+1$. Thử lại thấy cả hai hàm số này đều thỏa mãn.

Cách khác. Dễ thấy hàm số $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ không thỏa mãn (1). Giả sử tồn tại $x_0\in\mathbb{R}$ sao cho $f(x_0)\neq 0$.

$$P(x,0)\Rightarrow [1-f(0)]f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Từ (5), lấy $x=x_0$, suy ra $f(0)=1$.

$$P(-1,1)\Rightarrow f(1)f(-1)=0.$$

- Trường hợp $f(-1)=0$.

$$\begin{aligned}P(x,-1)&\Rightarrow f(x-1)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}\\ &\Rightarrow f(x)=x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

- Trường hợp $f(-1)\neq 0$. Khi đó $f(1)=0$.

$$\begin{aligned}P(x,1)&\Rightarrow f(x+1)=-x,\ \forall x\in\mathbb{R}\\ &\Rightarrow f(x)=-x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Thử lại thấy hai hàm số $f(x)\equiv x+1,\ f(x)=-x+1$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 2.110 (Hà Lan MO-2011). *Tìm các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$xf(x+xy)=xf(x)+f(x^2)f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Từ (1) cho $x=y=0$ ta được $(f(0))^2=0\Rightarrow f(0)=0$. Từ (1) Cho $x=1$ và $y=-1$ ta được $f(1)[f(-1)+1]=0$.

- Nếu $f(1)=0$ thì thay $x=1$ vào (1) ta được $f(y+1)=0,\forall y\in\mathbb{R}$. Suy ra $f(x)\equiv 0$. Thử lại thấy thỏa mãn.
- Xét $f(-1)=-1$. Thay $x=y=-1$ vào (1) ta được

$$-f(-1)+f(1)f(-1)=0\Rightarrow f(1)=1.$$

Thay $x=1$ vào (1) ta có: $f(y+1)=f(y)+1,\ \forall y\in\mathbb{R}$. (2)

Thay $y=-1$ vào (1) ta được $f(x^2)=xf(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó

$$(1)\Leftrightarrow f\big(x(y+1)\big)=f(x)+f(x)f(y)\overset{\text{do (2)}}{=}f(x)f(y+1),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Do đó $f(xy)=f(x)f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$. Vì vậy

$$f(x+xy)=f(x)+f(xy),\ \forall x,y\in\mathbb{R} \tag{4}$$

Với mọi số thực u,v. Nếu $u=0$ thì hiển nhiên $f(u+v)=f(u)+f(v)$. Còn nếu $u\neq 0$ thì xét $x=u,\ y=\dfrac{v}{u}$. Khi đó

$$f(u+v)=f(x+uy)=f(x+xy)\overset{\text{do (4)}}{=}f(x)+f(xy)=f(u)+f(v).$$

Vậy $f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Ta sẽ tính $f((x+1)^2)$ bằng hai cách.

$$f\big((x+1)^2\big)=f(x^2)+f(2x)+1. \tag{5}$$

$$\begin{aligned}f\big((x+1)^2\big)&=(x+1)f(x+1)=(x+1)[f(x)+1]\\ &=xf(x)+x+f(x)+1=f(x^2)+x+f(x)+1.\end{aligned} \tag{6}$$

Từ (5) và (6) suy ra $f(2x)=2f(x)=x+f(x)\Rightarrow f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy có hai hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là $f(x)\equiv 0$ và $f(x)\equiv x$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Lưu ý. Sau khi chứng minh được

$$f(xy)=f(x)f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R} \text{ và } f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$

Ta có thể dùng bài toán 2.169 ở trang 218 để suy ra kết quả. Tuy nhiên tính theo hai cách như trên rõ ràng là hay hơn.

Bài toán 2.111 (Đề nghị thi Olympic 30/4/2010). *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=1$ và*

$$f\left(\frac{1}{x+y}\right)=f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{y}\right),\ \textit{với mọi } x,y \textit{ thỏa mãn } xy(x+y)\neq 0 \tag{1}$$

$$(x+y)f(x+y)=xyf(x)f(y),\ \textit{với mọi } x,y \textit{ thỏa mãn } xy(x+y)\neq 0. \tag{2}$$

Giải. Dễ thấy với mọi $x\neq 0$ thì $f(x)\neq 0$, vì nếu $\exists x_0\neq 0$ sao cho $f(x_0)=0$ thì $x_0\neq 1$. Từ (2) thay x bởi $1-x_0$ và thay y bởi x_0 ta được

$$f(1)=(1-x_0)\,x_0 f\,(1-x_0)\,f(x_0)=0\ \text{(mâu thuẫn)}.$$

Vậy $f(x)\neq 0,\ \forall x\neq 0$. Trong (1) cho $y=x$ được $f\left(\dfrac{1}{2x}\right)=2f\left(\dfrac{1}{x}\right),\ \forall x\neq 0$.

Từ đây thay x bởi $\dfrac{1}{x}$ được $f\left(\dfrac{x}{2}\right)=2f(x),\ \forall x\neq 0$, hay

$$f(x)=2f(2x),\ \forall x\neq 0. \tag{3}$$

Trong (2) cho $y=x$ ta được: $2xf(2x)=x^2f^2(x),\ \forall x\neq 0$. (4)

Thay (3) vào (4) ta được $xf(x)=x^2f^2(x),\ \forall x\neq 0$. Mà $xf(x)\neq 0,\ \forall x\neq 0$ nên $xf(x)=1,\ \forall x\neq 0$, hay $f(x)=\dfrac{1}{x},\ \forall x\neq 0$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.112. *Tìm tất cả các hàm số $f:(0;1)\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(xyz)=xf(x)+yf(y)+zf(z),\ \forall x,y,z\in(0;1). \tag{1}$$

Giải. Trong (1) lấy $z = y = x \in (0;1)$ ta được

$$f(x^3) = 3xf(x), \forall x \in (0;1).$$

Trong (1), lần lượt thay x, y, z bởi x^2 ta được

$$f(x^6) = 3x^2 f(x^2), \forall x \in (0;1). \quad (2)$$

Do vậy

$$\begin{aligned} f(x^6) &= f(x.x^2.x^3) = xf(x) + x^2 f(x^2) + x^3 f(x^3) \\ &= xf(x) + x^2 f(x^2) + 3x^4 f(x), \forall x \in (0;1). \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra với mọi $x \in (0;1)$ thì

$$3x^2 f(x^2) = xf(x) + x^2 f(x^2) + 3x^4 f(x) \Leftrightarrow f(x^2) = \frac{3x^3+1}{2x} f(x). \quad (4)$$

Trong (4) thay x bởi x^3, ta được: $f(x^6) = \dfrac{3x^9+1}{2x^3} f(x^3), \forall x \in (0;1).$ (5)

Từ đó với mọi $x \in (0;1)$, ta có

$$3x^2 f(x^2) = \frac{3x^9+1}{2x^3} f(x^3) \Rightarrow 3x^2.\frac{3x^3+1}{2x}.f(x) = \frac{3x^9+1}{2x^3}.3xf(x)$$

$$\Rightarrow x(3x^3+1).f(x) = \frac{3x^9+1}{x^2} f(x) \Rightarrow x^3(3x^3+1).f(x) = (3x^9+1)f(x).$$

Với $x \in (0;1)$, xét phương trình

$$x^3(3x^3+1) = 3x^9+1 \Leftrightarrow 3x^6 + x^3 = 3x^9 + 1$$

$$\Leftrightarrow 3x^6\left(x^3-1\right) = x^3 - 1 \Leftrightarrow 3x^6 = 1 \Leftrightarrow x^6 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt[6]{\frac{1}{3}}$$

Vậy: $f(x) = 0, \forall x \in (0;1) \setminus \left\{\sqrt[6]{\dfrac{1}{3}}\right\}$. (6)

Trong (1) lấy $x = y = z = \sqrt[6]{\dfrac{1}{3}}$ được $3\sqrt[6]{\dfrac{1}{3}} f\left(\sqrt[6]{\dfrac{1}{3}}\right) = f\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right) = 0$ (do (6)). Kết hợp với (6) ta được $f(x) = 0$, $\forall x \in (0;1)$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.113. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sao cho*

$$f(x+y) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + y^2 f\left(\frac{1}{y}\right), \forall x, y \in \mathbb{R}^*. \quad (1)$$

Giải. Thay $y = x$ trong (1) ta được $f(2x) = 2x^2 f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$. Do đó

$$f(x+y) = \frac{f(2x)+f(2y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}^*.$$

Thay $y = -x$ trong (1) ta được

$$\begin{aligned} f(0) &= x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 f\left(-\frac{1}{x}\right), \forall x \in \mathbb{R}^* \\ \Rightarrow 2f(0) &= f(2x) + f(-2x), \forall x \in \mathbb{R}^*. \end{aligned} \quad (2)$$

Ta tính $f\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ bằng hai cách. Ta có

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{x}+1\right) = \frac{1}{x^2} f(x) + f(1), \forall x \in \mathbb{R}^*. \quad (3)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+1}{x}\right) &= 2\left(\frac{x+1}{2x}\right)^2 f\left(\frac{2x}{x+1}\right) \\ &= \frac{(x+1)^2}{2x^2} f\left(2 - \frac{2}{x+1}\right) = \frac{(x+1)^2}{2x^2}\left[4f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{(x+1)^2} f\left(-\frac{x+1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{(x+1)^2}{2x^2}\left[4f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{(x+1)^2}\left(2f(0) - f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)\right] \\ &= \frac{(x+1)^2}{2x^2}\left[4f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{(x+1)^2}\left(2f(0) - \frac{f(x)+f(1)}{2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x^2} f(x) + f(1) = \frac{(x+1)^2}{2x^2}\left[4f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{(x+1)^2}\left(2f(0) - \frac{f(x)+f(1)}{2}\right)\right] \\ \Rightarrow &\frac{1}{x^2} f(x) + f(1) = \frac{2(x+1)^2}{x^2} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{x^2}\left(2f(0) - \frac{f(x)+f(1)}{2}\right) \\ \Rightarrow &\frac{f(x)}{x^2} + f(1) = \frac{2(x+1)^2}{x^2} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{4f(0)}{x^2} - \frac{f(x)}{x^2} - \frac{f(1)}{x^2} \\ \Rightarrow &2f(x) + f(1)x^2 = 2(x+1)^2 f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f(0) - f(1) \\ \Rightarrow &2f(x) + f(1)x^2 = \left(2x^2+4x+2\right) f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f(0) - f(1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2f(x) = \left(2f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1)\right)x^2 + 4f\left(\frac{1}{2}\right)x + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f(0) - f(1). \quad (5)$$

Trong (5) lấy $x = 1$ ta được

$$2f(1) = \left(2f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1)\right) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f(0) - f(1).$$

Do đó $f(1) = 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(0)$, thay vào (5) ta được

$$2f(x) = -f(0)x^2 + 4f\left(\frac{1}{2}\right)x + 3f(0). \quad (6)$$

Trong (6), lấy $x = \frac{1}{2}$ ta được

$$2f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

Thay vào (6) suy ra $f(x) = cx$, với c là hằng số. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy tất cả các hàm số cần tìm là

$$f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (c là hằng số tùy ý).}$$

2.3 Giải phương trình bằng cách khai thác tính đơn ánh, toàn ánh, song ánh

2.3.1 Một số lưu ý

Đơn ánh, toàn ánh, song ánh là những khái niệm rất cơ bản của hàm số, ánh xạ. Các khái niệm này bạn đọc hãy xem lại ở bài 1.1: Một số kiến thức về hàm số và ánh xạ (ở trang 3). Sau đây là một số lưu ý thêm.

- Nếu một vế có chứa $f(x)$ và vế còn lại có chứa biến x bên ngoài thì thông thường f là đơn ánh.
- Nếu trong phương trình hàm có chứa

  $$f\Big(f(x) + \varphi(x,y)\Big) \text{ hoặc } f\Big(f(y) + \varphi(x,y)\Big),$$

  trong đó $\varphi(x,y)$ là một biểu thức đối xứng của x và y thì ta thường chứng minh được f là đơn ánh.

- Nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là đơn ánh thì từ $f(x) = f(y)$ suy ra $x = y$.
- Nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là toàn ánh thì với mọi $y \in \mathbb{R}$, luôn tồn tại $x \in \mathbb{R}$ để cho $f(x) = y$, tức là phương trình (ẩn x) $y = f(x)$ luôn có nghiệm.
- Nếu f là một hàm số mà đơn ánh thì ta rất hay dùng thủ thuật tác động f vào hai vế, hoặc tạo ra

  $$f(\varphi(x)) = f(\phi(x)) \Rightarrow \varphi(x) = \phi(x).$$

  Nếu f là toàn ánh thì ta hay dùng: Tồn tại một số b sao cho $f(b) = 0$ (hay $f(b) = 0...$), sau đó tìm b. Nếu quan hệ hàm là hàm bậc nhất của biến ở vế phải thì có thể nghĩ đến tính đơn ánh, toàn ánh.
- Nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là toàn ánh và $f(x) = \psi(x)$, $\forall x \in T$, ở đây T là tập giá trị của hàm f thì $f(x) = \psi(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Trong bài này ta quan tâm nhiều hơn các bài toán liên quan đến đơn ánh, còn các bài toán liên quan đến toàn ánh sẽ được đề cập nhiều ở bài 2.4: Giải phương trình hàm dựa vào giá trị của đối số và giá trị của hàm số (ở trang 200).

Nhận xét 2. *Nếu hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(f(x)) = ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$) thì f là song ánh (kết quả này đã được chứng minh ở bài toán 1.4, trang 6).*

2.3.2 Sử dụng đơn ánh

Bài toán 2.114. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(af(y) + bx) = cx + dy + e, \ \forall x, y \in \mathbb{R} \ (a, b, c, d \neq 0; b \neq -ac). \quad (1)$$

Giải. Ta sẽ chứng minh f là đơn ánh, tức là $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$. Giả sử $f(x) = f(y)$. Khi đó

$$cx + dy + e = f(af(y) + bx) = f(af(x) + bx) = cx + dx + e \Rightarrow x = y.$$

Trong (1) cho $x = y = 0$, ta được $e = f(af(0))$. Cho $x = -\frac{dy}{c}$, ta được

$$f\left(af(y) - \frac{bdy}{c}\right) = e = f(af(0))$$

mà f là đơn ánh nên $af(y) - \frac{bdy}{c} = af(0) \Rightarrow f(y) = \frac{bdy}{ac} + f(0)$, $\forall y \in \mathbb{R}$. (2)

Trong (1) cho $y = 0$, $x = -\frac{af(0)}{b}$, được $f(0) = -\frac{acf(0)}{b} + e \Leftrightarrow f(0) = \frac{be}{b + ac}$.

Thay vào (2) được $f(x)=\frac{bdx}{ac}+\frac{be}{b+ac}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy đúng, vậy đây là hàm số cần tìm.

Bài toán 2.115 (Slovenie-1999). *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x-f(y))=1-x-y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Hướng dẫn. Bài toán này là một trường hợp riêng của bài toán 2.114.

Bài toán 2.116 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2002). *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(30f(y)+4x)=19x+75y+2002,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Hướng dẫn. Bài toán này là một trường hợp riêng của bài toán 2.114.

Bài toán 2.117. *Tìm các hàm số $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn:*

$$f(x+f(y))=\frac{y}{xy+1},\ \forall x,y\in(0;+\infty). \tag{1}$$

Giải. Từ giả thiết suy ra $f(x)>0$, $\forall x>0$. Ta sẽ chứng minh f là đơn ánh, tức là chứng minh $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$. Giả sử $f(x)=f(y)$. Khi đó

$$\frac{y}{xy+1}=f(x+f(y))=f(x+f(x))=\frac{x}{x^2+1}$$
$$\Rightarrow\frac{y}{xy+1}=\frac{x}{x^2+1}\Rightarrow x^2y+y=x^2y+x\Rightarrow x=y.$$

Với $a>0$, xét $\frac{y}{xy+1}=a\Leftrightarrow y=axy+a\Leftrightarrow x=\frac{y-a}{ay}$. Do đó từ (1) suy ra

$$f\left(\frac{y-a}{ay}+f(y)\right)=a=f\left(\frac{x-a}{ax}+f(x)\right),\ \forall x>2a,y>2a. \tag{2}$$

Mà f là đơn ánh nên từ (2) dẫn đến

$$\frac{y-a}{ay}+f(y)=\frac{x-a}{ax}+f(x),\ \forall x,y\in(2a;+\infty)$$
$$\Leftrightarrow f(x)-\frac{1}{x}=f(y)-\frac{1}{y},\ \forall x,y\in(2a;+\infty)$$
$$\Rightarrow f(x)-\frac{1}{x}=C,\ \forall x\in(2a;+\infty)\ (C\text{ là hằng số}).$$

Do đó: $f(x)=\frac{1}{x}+C$, $\forall x\in(2a;+\infty)$. (3)

Với mỗi $x>0$, luôn tồn tại số $a>0$ sao cho $x>2a$, do đó theo (3) ta được

$f(x)=\frac{1}{x}+C$. Vậy $f(x)=\frac{1}{x}+C$, $\forall x\in(0;+\infty)$. Thay vào (1) ta được

$$\frac{1}{x+f(y)}+C=\frac{y}{xy+1},\ \forall x,y\in(0;+\infty)$$
$$\Rightarrow\frac{1}{x+\frac{1}{y}+C}+C=\frac{y}{xy+1},\ \forall x,y\in(0;+\infty). \tag{4}$$

Từ (4) cho $x=y=1$ ta được

$$\frac{1}{2+C}+C=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{C^2+2C+1}{2+C}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2C^2+3C=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}C=0\\C=-\frac{3}{2}.\end{array}\right.$$

Do $f(x)>0$, $\forall x>0$ nên ta loại hàm $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{3}{2}$, $\forall x>0$. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là $f(x)=\frac{1}{x}$, $\forall x\in(0;+\infty)$.

Lưu ý. Sẽ là sai lầm nếu ta "lập luận ngắn gọn" như sau: Xét

$$\frac{y}{xy+1}=1\Leftrightarrow y=xy+1\Leftrightarrow x=\frac{y-1}{y}.$$

Do đó từ (1) suy ra

$$f\left(\frac{y-1}{y}+f(y)\right)=1=f\left(\frac{x-1}{x}+f(x)\right),\ \forall x>0,y>0. \tag{2}$$

Mà f là đơn ánh nên từ (2) dẫn đến

$$\frac{y-1}{y}+f(y)=\frac{x-1}{x}+f(x),\ \forall x,y\in(0;+\infty)$$
$$\Leftrightarrow f(x)-\frac{1}{x}=f(y)-\frac{1}{y},\ \forall x,y\in(0;+\infty)$$
$$\Rightarrow f(x)-\frac{1}{x}=C,\ \forall x\in(0;+\infty)\ (C\text{ là hằng số}).$$

Bài toán 2.118. *Tìm tất cả các hàm số $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện: $f(3x+4f(y))=\frac{2y}{9xy+8}$, $\forall x,y\in(0;+\infty)$.* (1)

Giải. Ta sẽ chứng minh f là đơn ánh, tức là $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$. Giả sử $x>0$ và $y>0$ sao cho $f(x)=f(y)$. Khi đó

$$\frac{2y}{9xy+8}=f(3x+4f(y))=f(3x+4f(x))=\frac{2x}{9x^2+8}$$

$$\Rightarrow \frac{2y}{9xy+8} = \frac{2x}{9x^2+8} \Rightarrow 18x^2y + 16y = 18x^2y + 16x \Rightarrow x = y.$$

Với $a > 0$, xét $\dfrac{2y}{9xy+8} = a \Leftrightarrow 2y = 9axy + 8a \Leftrightarrow x = \dfrac{2y-8a}{9ay}$. Do đó từ (1) ta suy ra

$$f\left(\frac{2y-8a}{3ay} + 4f(y)\right) = a = f\left(\frac{2x-8a}{3ax} + 4f(x)\right),\ \forall x, y \in (5a; +\infty). \quad (2)$$

Mà f là đơn ánh nên từ (2) dẫn đến

$$\frac{2y-8a}{3ay} + 4f(y) = \frac{2x-8a}{3ax} + 4f(x),\ \forall x, y \in (5a; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow 4f(x) - \frac{8}{3x} = 4f(y) - \frac{8}{3y},\ \forall x, y \in (5a; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow f(x) - \frac{2}{3x} = f(y) - \frac{2}{3y},\ \forall x, y \in (5a; +\infty)$$

$$\Rightarrow f(x) - \frac{2}{3x} = C,\ \forall x \in (5a; +\infty)\ (C \text{ là hằng số})$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{3x} + C,\ \forall x \in (5a; +\infty)\ (C \text{ là hằng số}). \quad (3)$$

Với mọi $x > 0$, luôn tồn tại $a > 0$ sao cho $x > 5a$, theo (3) ta có $f(x) = \dfrac{2}{3x} + C$.

Vậy $f(x) = \dfrac{2}{3x} + C,\ \forall x \in (0; +\infty)$. Thử lại vào (1) ta được

$$\frac{2y}{9xy + 12Cy + 8} + C = \frac{2y}{9xy+8},\ \forall x > 0,\ y > 0. \quad (3)$$

Trong (3) lấy $x = y = 1$ được $\dfrac{2}{17+12C} + C = \dfrac{2}{17} \Leftrightarrow C \in \left\{0, -\dfrac{265}{204}\right\}$. Dễ thấy $f(x) \equiv \dfrac{2}{3x}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài, còn hàm $f(x) = \dfrac{2}{3x} - \dfrac{265}{204},\ \forall x > 0$ không thỏa mãn, vì với $x = 100$ thì $f(100) = \dfrac{2}{300} - \dfrac{265}{204} < 0$, mâu thuẫn với giả thiết $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là $f(x) = \dfrac{2}{3x},\ \forall x > 0$.

Bài toán 2.119. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x + y + f(y)) = f(f(x)) + 2y,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Kí hiệu $P(u, v)$ chỉ việc thay x bởi u, thay y bởi v vào (1). Giả sử $f(a) = f(b) = c$. Khi đó

$$P(a, b) \Rightarrow f(a + b + c) = f(c) + 2b\ ;\ P(b, a) \Rightarrow f(a + b + c) = f(c) + 2a.$$

Vậy $a = b$, suy ra f là đơn ánh.

$$P(x, 0) \Rightarrow f(x + f(0)) = f(f(x)),\ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow x + f(0) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f(x) = x + a,\ \forall x \in \mathbb{R}\ (a = f(0) \text{ là hằng số}).$$

Thay vào (1) thấy thỏa mãn. Vậy hàm số cần tìm là

$$f(x) = x + a,\ \forall x \in \mathbb{R}\ (a \text{ là hằng số tùy ý}).$$

Bài toán 2.120 (Morocco National Olympiad 2011, day 3 ; Spain Mathematical Olympiad 2012). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$(x-2)f(y) + f(y + 2f(x)) = f(x + yf(x)),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải.

- Trường hợp : $f(0) = 0$. Từ (1) cho $x = 0$, ta được $f(y) = 0,\ \forall y \in \mathbb{R}$.
- Trường hợp : $f(0) \neq 0$. Đặt $f(0) = c$. Từ (1) cho $y = 0$, ta được

$$(x-2)c + f(2f(x)) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Giả sử $f(x_1) = f(x_2)$, từ (2) suy ra

$$(x_1 - 2)c = (x_2 - 2)c \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Vậy f là đơn ánh. Từ (2), cho $x = 2$ ta được

$$f(2f(2)) = f(2) \Rightarrow 2f(2) = 2 \Rightarrow f(2) = 1.$$

Vì hàm số $f(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$, không thỏa (1) nên giả sử tồn tại $x_0 \neq 2$ sao cho $f(x_0) \neq 1$. Trong (1), cho $y = \dfrac{2f(x_0) - x_0}{f(x_0) - 1}$, ta được

$$(x_0 - 2)f\left(\frac{2f(x_0) - x_0}{f(x_0) - 1}\right) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{2f(x_0) - x_0}{f(x_0) - 1}\right) = 0. \quad (3)$$

Trong (1), cho $x = \dfrac{2f(x_0) - x_0}{f(x_0) - 1}$ và sử dụng (3), ta được

$$\left[\frac{2f(x_0) - x_0}{f(x_0) - 1} - 2\right] f(y) + f(y) = 0,\ \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(y) \cdot \frac{f(x_0) - x_0 + 1}{f(x_0) - 1} = 0,\ \forall y \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

- Nếu $f(x_0) - x_0 + 1 \neq 0$ thì từ (4) suy ra $f(y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$.
- Nếu $f(x_0) = x_0 - 1$ thì $\dfrac{2f(x_0) - x_0}{f(x_0) - 1} = 1$, kết hợp với (3) suy ra $f(1) = 0$.

Từ (1), cho $y = 1$, ta được

$$f(1 + 2f(x)) = f(x + f(x)),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow 1+2f(x)=x+f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$ (do f là đơn ánh)
$\Rightarrow f(x)=x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Thử lại, ta được các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\ ;\quad f(x)=x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Cách khác (tiếp nối từ $f(2)=1$). Với mọi $x\neq 2$ ta có $f(x)\neq 1$ (vì f là đơn ánh là $f(2)=1$).

$$P\left(x,\frac{2f(x)-x}{f(x)-1}\right)\Rightarrow (x-2)f\left(\frac{2f(x)-x}{f(x)-1}\right)=0,\forall x\neq 2$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{2f(x)-x}{f(x)-1}\right)=0,\forall x\neq 2$$

$$P\left(\frac{2f(x)-x}{f(x)-1},2\right)\Rightarrow\left[\frac{2f(x)-x}{f(x)-1}-2\right]+1=0\Rightarrow\frac{2f(x)-x}{f(x)-1}=1$$

$$\Rightarrow 2f(x)-x=f(x)-1\Rightarrow f(x)=x-1,\forall x\neq 2.$$

Như vậy $f(x)=x-1,\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.
Kết luận : các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=x-1,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 2.121 (Đề thi chính thức Olympic 30/04/2006). *Hãy tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f\left(x+f(y)+xf(y)\right)=x+xy+y,\forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Ta sẽ chứng minh f là đơn ánh. Giả sử $f(y_1)=f(y_2)$. Trong (1) lấy $x=1$ ta được

$$f\left(1+2f(y)\right)=1+2y,\forall y\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Vì $f(y_1)=f(y_2)$ nên $f\left(1+2f(y_1)\right)=f\left(1+2f(y_2)\right)$, bởi vậy từ (2) suy ra $1+2y_1=1+2y_2$, hay $y_1=y_2$. Do đó f là đơn ánh. Trong (1) lấy $x=0$ ta được $f(f(y))=y,\forall y\in\mathbb{R}$. Trong (1) lấy $y=0$ ta được

$f\left(x+f(0)+xf(0)\right)=x=f\left(f(x)\right)\Rightarrow x+f(0)+xf(0)=f(x)$ (do f đơn ánh).

Đặt $f(0)=a$. Theo trên ta có: $f(x)=(a+1)x+a,\forall x\in\mathbb{R}$. (3)
Thay (3) vào (1) ta được

$$(a+1)\left[x+f(y)+xf(y)\right]+a=x+xy+y,\forall x,y\in\mathbb{R}.$$
$$\Rightarrow(a+1)\left[x+(a+1)y+a+x(a+1)y+ax\right]+a=x+xy+y,\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Chọn $x=y=0$ ta được $(a+1)a+a=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=-2.\end{array}\right.$ Khi $a=0$ ta được $f(x)=x$. Khi $a=-2$ ta được $f(x)=-x-2$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy có hai hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}\text{ và }f(x)=-x-2,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 2.122 (Argentina Team Selection Test 2008; Czech And Slovak Mathematical Olympiad, Round III, 2004). *Tìm tất cả các hàm số $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn*

$$x^2\left[f(x)+f(y)\right]=(x+y)\,f\left(yf(x)\right),\ \forall x,y>0. \tag{1}$$

Giải. Ta sẽ chứng minh f là đơn ánh. Giả sử tồn tại hai số dương x_1, x_2 sao cho $x_1\neq x_2$ và $f(x_1)=f(x_2)=a>0$. Trong (1) lần lượt lấy $x=x_1$, $x=x_2$ ta được

$$\left\{\begin{array}{l}x_1^2\left[a+f(y)\right]=(x_1+y)\,f\left(ya\right)\\x_2^2\left[a+f(y)\right]=(x_2+y)\,f\left(ya\right).\end{array}\right.$$

Suy ra x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình $tx^2-ux-v=0$ (t,u,v dương). Dẫn đến $x_1x_2=-\dfrac{v}{t}<0$, đến đây ta gặp mâu thuẫn. Vậy f là đơn ánh trên $(0;+\infty)$. Trong (1) cho $x=y$ được

$$2x^2f(x)=2xf\left(xf(x)\right)\Rightarrow xf(x)=f\left(xf(x)\right),\ \forall x>0. \tag{2}$$

Trong (2) cho $x=1$ được $f(1)=f(f(1))\Rightarrow f(1)=1$. Từ (1) cho $x=1$ được

$$1+f(y)=(y+1)\,f(y)\Rightarrow 1=yf(y)\Rightarrow f(y)=\frac{1}{y},\ \forall y>0.$$

Thử lại, ta kết luận: Có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x)=\frac{1}{x},\ \forall x>0.$$

Lưu ý. Có thể chứng minh f là đơn ánh như sau: Ta có

$$(1)\Leftrightarrow\frac{x^2}{x+y}=\frac{f\left(yf(x)\right)}{f(x)+f(y)},\ \forall x>0,\ y>0. \tag{3}$$

Giả sử $x>0$ và $y>0$ sao cho $f(x)=f(y)$. Khi đó từ (3) suy ra

$$\frac{x^2}{x+y}=\frac{x^2}{x+x}\Leftrightarrow 2x^3=x^3+x^2y\Leftrightarrow x^3=x^2y\Leftrightarrow x=y.$$

Bài toán 2.123. *Tồn tại hay không hàm số $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn:* $(x+y)f\left(yf(x)\right)=x^2f\left(f(x)+f(y)\right),\ \forall x,y\in(0;+\infty)$. (1)

Giải. Giả sử tồn tại hàm số $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn (1). Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (1). Giả sử $f(a)=f(b)$.

$$P(a,y)\Rightarrow(a+y)f\left(yf(a)\right)=a^2f\left(f(a)+f(y)\right),\ \forall y>0$$
$$P(b,y)\Rightarrow(b+y)f\left(yf(a)\right)=b^2f\left(f(a)+f(y)\right),\ \forall y>0$$

$$\Rightarrow \frac{a+y}{a^2} = \frac{b+y}{b^2},\ \forall y>0$$
$$\Rightarrow ab^2+yb^2 = a^2b+a^2y,\ \forall y>0$$
$$\Rightarrow ab(b-a) = y(a^2-b^2),\ \forall y>0$$
$$\Rightarrow (b-a)\left[ab+y(a+b)\right] = 0,\ \forall y>0.$$

Vậy $a=b$, suy ra f là đơn ánh.

$$P\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},1\right) \Rightarrow f\left(f(\frac{1+\sqrt{5}}{2})\right) = f\left(f(\frac{1+\sqrt{5}}{2})+f(1)\right)$$
$$\Rightarrow f(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = f(\frac{1+\sqrt{5}}{2})+f(1) \Rightarrow f(1)=0,$$

Điều này mâu thuẫn với $f(1)\in(0;+\infty)$, vậy câu trả lời là không tồn tại.

Lưu ý. Từ (1) lấy $y=1$ ta được $(x+1)f(f(x)) = x^2 f(f(x)+f(1)),\ \forall x>0$. Do f là đơn ánh nên ta sẽ chọn x là nghiệm dương của phương trình $x+1=x^2$.

Bài toán 2.124. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f\left((1+x)f(y)\right) = yf\left(1+f(x)\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Từ (1) ta thấy rằng nếu f là đơn ánh thì bài toán sẽ rất dễ dàng. Thật vậy, giả sử f là đơn ánh. Từ (1) lấy $y=1$ được

$$f\left((1+x)f(1)\right) = f\left(1+f(x)\right),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Do f là đơn ánh nên từ (2) ta có $(1+x)f(1) = 1+f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$, suy ra f có dạng như sau: $f(x)=ax+b,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (1) được

$$a\left[(1+x)(ay+b)\right]+b = y\left[a\left(1+ax+b\right)+b\right],\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Từ (3) lần lượt cho $(x;y)=(0;0)$, $(x;y)=(1;0)$ được

$$\begin{cases} ab+b=0 \\ 2ab+b=0 \end{cases} \Rightarrow b=0.$$

Vậy (3) trở thành $a\left[(1+x)ay\right] = y\left[a\left(1+ax\right)\right],\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Từ đây ta cho $x=y=1$ được $2a^2 = a(1+a) \Leftrightarrow a^2=a \Leftrightarrow a\in\{0,1\}$. Thử lại thấy hai hàm số $f(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv x$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Vấn đề còn lại, nếu f không phải là đơn ánh thì tồn tại $y_1\neq y_2$ sao cho $f(y_1)=f(y_2)$. Khi đó

$$y_1 f\left(1+f(x)\right) = f\left((1+x)f(y_1)\right) = f\left((1+x)f(y_2)\right) = y_2 f\left(1+f(x)\right),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Kết hợp với $y_1\neq y_2$ suy ra $f\left(1+f(x)\right)=0, \forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (1) được

$$f\left((1+x)f(y)\right) = 0,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Nếu tồn tại $y_0\in\mathbb{R}$ sao cho $f(y_0)\neq 0$ thì từ (4) ta có $f(x)\equiv 0$, mâu thuẫn. Vậy từ (4) phải có $f(x)\equiv 0$. Ta có kết luận: Các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv x$.

2.3.3 Sử dụng toàn ánh và song ánh

Bài toán 2.125. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+y^2+z) = f\left(f(x)\right)+yf(x)+f(z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Dễ thấy $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn (1). Tiếp theo giả sử $f(x)\neq 0$, tức là tồn tại $u\in\mathbb{R}$ sao cho $f(u)\neq 0$. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ phép thay x bởi u và y bởi v vào (1). Với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì

$$P\left(u,\frac{x-f\left(f(u)\right)-f(0)}{f(u)},0\right) \Rightarrow f\left(u+\left(\frac{x-f\left(f(u)\right)-f(0)}{f(u)}\right)^2\right) = x.$$

Suy ra f là toàn ánh.

$$P(x,0,0) \Rightarrow f(x) = f\left(f(x)\right)+f(0),\ \forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f(x) = x-f(0),\ \forall x\in f(\mathbb{R})$$
$$\Rightarrow f(x) = x-f(0),\ \forall x\in\mathbb{R}\ \left(\text{do } f \text{ là toàn ánh nên } f(\mathbb{R})=\mathbb{R}\right).$$

Từ đây cho $x=0$ ta được $f(0)=0$. Vậy $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy hàm số này không thỏa (1). Do đó có duy nhất một hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Lưu ý. $P(u,y,0) \Rightarrow f(u+y^2) = f\left(f(u)\right)+yf(u)+f(0),\ \forall y\in\mathbb{R}$. Với mọi $x\in\mathbb{R}$, xét

$$x = f\left(f(u)\right)+yf(u)+f(0) \Rightarrow y = \frac{x-f\left(f(u)\right)-f(0)}{f(u)}.$$

Vì vậy ta thực hiện $P\left(u,\frac{x-f\left(f(u)\right)-f(0)}{f(u)},0\right)$ để suy ra f là toàn ánh.

Bài toán 2.126 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2011). *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm*

$$f\left([1+f(x)]f(y)\right) = y+xf(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Từ (1) cho $x=0$ ta được $f\left([1+f(0)]f(y)\right) = y,\ \forall y\in\mathbb{R}$. Giả sử $f(y_1)=f(y_2)$. Khi đó: $y_1 = f\left([1+f(0)]f(y_1)\right) = f\left([1+f(0)]f(y_2)\right) = y_2$. Suy ra f là đơn ánh. Với mọi $y\in\mathbb{R}$, khi đó tồn tại $x=[1+f(0)]f(y)\in\mathbb{R}$ sao cho $f(x)=y$, suy ra f là toàn ánh, dẫn tới f là song ánh. Vì thế tồn tại $c\in\mathbb{R}$ sao cho $f(c)=0$. Từ (1) cho $y=c$ được $f(0)=c$. Từ (1) cho $x=y=0$ ta được $f\left([1+c]c\right)=0$. Vậy $f\left([1+c]c\right)=f(c)$, mà f là đơn ánh nên

$$(1+c)c = c \Leftrightarrow c=0 \Rightarrow f(0)=0.$$

Từ (1) cho $x=0$ được: $f(f(y))=y,\ \forall y\in\mathbb{R}$. (2)
Từ (1) thay x bởi $f(x)$, thay y bởi $f(y)$ và sử dụng (2) được

$$f(y[1+x])=f(y)+yf(x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Từ (3) thay $x=-1$, sử dụng $f(0)=0$ và đặt $a=-f(-1)$ ta có

$$f(y)=ay,\ \forall y\in\mathbb{R}.$$

Thay vào (1) được: $a(1+ax)ay=y+axy,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. (4)
Từ (4) cho $x=y=1$ được $a^2(1+a)=1+a\Leftrightarrow a\in\{1,-1\}$. Vậy $f(x)\equiv x$, $f(x)\equiv -x$. Thử lại thấy cả hai hàm $f(x)\equiv x$, $f(x)\equiv -x$ đều thỏa mãn.
Lưu ý. Có thể thay $f(y)=ay,\ \forall y\in\mathbb{R}$ vào (2) để tìm a.

Bài toán 2.127 (European Girls' MO-2012). *Hãy tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn:* $f\Big(yf(x+y)+f(x)\Big)=4x+2yf(x+y),\forall x,y\in\mathbb{R}$. (1)

Giải. Từ (1) cho $y=0$ ta được: $f(f(x))=4x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. (2)
Từ (2), sử dụng nhận xét **2** ở trang 175 suy ra f là một song ánh. Do đó tồn tại a, b sao cho $f(a)=2$, $f(b)=4a$. Từ (1) thay $y=-x+a$, ta được

$$f\Big(2(-x+a)+f(x)\Big)=4x+4(-x+a)=4a=f(b),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Do f đơn ánh nên từ (3) ta có $-2x+2a+f(x)=b,\forall x\in\mathbb{R}$ hay

$$f(x)=2x+c,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Thay vào (2) ta được $2(2x+c)+c=4x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Từ đây lấy $x=0$ được $c=0$. Vậy $f(x)=2x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.128 (Indonesia TST 2010). *Xác định tất cả các số thực sao cho có một hàm số thỏa mãn:* $x+f(y)=af(y+f(x)),\forall x,y\in\mathbb{R}$. (1)

Giải. Dễ thấy $a=0$ không thỏa mãn. Do đó giả sử $a\neq 0$. Thay $y=0$ vào (1) ta được: $f(f(x))=\dfrac{x+f(0)}{a},\forall x\in\mathbb{R}$. (2)
Từ (2) suy ra f là một toàn ánh nên tồn tại $\alpha\in\mathbb{R}$ sao cho $f(\alpha)=0$. Khi đó từ (1) lấy $x=\alpha$ ta được $\alpha+f(y)=af(y),\forall y\in\mathbb{R}$, hay

$$\alpha=(a-1)f(y),\forall y\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Từ đẳng thức (2) thì sẽ xảy ra hoặc $a=1$ hoặc f là hàm hằng.
• Nếu f là hàm hằng thì không thỏa mãn phương trình hàm (1).
• Nếu $a=1$ thì lấy hàm $f(x)\equiv x$ thỏa mãn (1).
Vậy $a=1$.

Bài toán 2.129 (Kyrgyzstan National Olympiad 2012). *Tìm tất cả các hàm số:* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn:* $f\left(f(x)^2+f(y)\right)=xf(x)+y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. (1)

Giải. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (1).

$$P(0,y)\Rightarrow f\left(f(0)^2+f(y)\right)=y,\forall y\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ (2) suy ra f là toàn ánh, do đó có $c\in\mathbb{R}$ sao cho $f(c)=0$.

$$P(c,y)\Rightarrow f(f(y))=y,\ \forall y\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Từ (3) suy ra f là đơn ánh, như vậy f là song ánh. Sử dụng (3) và thực hiện $P(f(x),y)$, ta được

$$f\left(x^2+f(y)\right)=xf(x)+y\overset{\text{do (1)}}{=}f\left(f(x)^2+f(y)\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Do f là song ánh nên từ (4) suy ra

$$x^2+f(y)=f(x)^2+f(y)\Rightarrow[f(x)]^2=x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Dễ thấy hàm số $f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=-x,\forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn (1). Ta sẽ chứng minh ngoài hai hàm này ra không còn hàm số nào khác thỏa mãn yêu cầu đề bài. Giả sử tồn tại hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn (1) và $f(x)\neq x$, $f(x)\neq -x$. Khi đó tồn tại $a\in\mathbb{R}^*$ sao cho $f(a)\neq a$ và tồn tại $b\in\mathbb{R}^*$ sao cho $f(b)\neq -b$. Do (5) nên $f(a)=-a$ và $f(b)=b$.

$$P(b,a)\Rightarrow f\left(b^2-a\right)=b^2+a\overset{\text{do (5)}}{=}\pm(b^2-a)=b^2+a$$
$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b^2-a=b^2+a\\ a-b^2=b^2+a\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{ll}a=0 & \text{(mâu thuẫn)}\\ b=0 & \text{(mâu thuẫn).}\end{array}\right.$$

Vậy các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=-x,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 2.130 (Brazil National Olympiad 2006). *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn:* $f(xf(y)+f(x))=2f(x)+xy,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. (1)

Giải. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u, thay y bởi v vào (1).

$$P(1,x-2f(1))\Rightarrow f(f(x-2f(1))+f(1))=x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Suy ra f là toàn ánh. Nếu $f(a)=f(b)=c$ thì

$$\left\{\begin{array}{l}P(1,a)\Rightarrow f(c+f(1))=2f(1)+a\\ P(1,b)\Rightarrow f(c+f(1))=2f(1)+b\end{array}\right.\Rightarrow a=b.$$

Vậy f là đơn ánh, suy ra f là song ánh. Tồn tại u để $f(u)=0$. Đặt $f(0)=a$.

$$P(u,0)\Rightarrow f(au)=0=f(u)\Rightarrow au=u.$$

Nếu $u=0$ thì $a=f(0)=f(u)=0\Rightarrow f(0)=0$. Do đó

$$P(x,0)\Rightarrow f\left(f(x)\right)=2f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Dẫn đến $f(y)=2y,\ \forall y\in T$, với T là tập giá trị của hàm f, mà f là song ánh nên ta có $f(x)=2x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy không thỏa mãn. Vậy $u\neq 0$, suy ra $a=1$.

$$P(u,u)\Rightarrow f(0)=u^2\Rightarrow 1=u^2\Rightarrow u\in\{-1,1\}.$$

Nếu $u=1$ thì $P(0,-1)\Rightarrow 0=2$, vô lí. Vì thế $u=-1$, dẫn tới $f(-1)=0$ và $f(0)=1$. Ta có $P(0,-1)\Rightarrow f(1)=2$.

$$P(-1,x)\Rightarrow f\left(-f(x)\right)=-x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$
$$P\left(x,-f(1)\right)\Rightarrow f\left(f(x)-x\right)=2\left[f(x)-x\right],\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Với mọi $x\in\mathbb{R}$, do f là song ánh nên tồn tại z sao cho $f(z)=f(x)-x$. Từ (2) suy ra $f\left(f(z)\right)=2f(z)$. Từ đó

$$P(z,-1)\Rightarrow f\left(f(z)\right)=2f(z)-z\Rightarrow z=0\Rightarrow f(z)=1\Rightarrow f(x)=x+1.$$

Thử lại thấy hàm số $f(x)=x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 2.131 (Moroccan Mathematical Olympiad-2012). *Hãy tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho $f(1-f(1))\neq 0$ và*

$$f\Big(x-f(\frac{x}{y})\Big)=xf\Big(1-f(\frac{1}{y})\Big),\ \forall x,y\in\mathbb{R},y\neq 0. \tag{1}$$

Giải. Đặt $a=f\big(1-f(1)\big)\neq 0$. Từ (1) cho $y=1$, ta được

$$f(x-f(x))=ax,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ (2), thay x bởi $x-f(x)$, suy ra

$$f\big([1-a]x-f(x)\big)=a[x-f(x)],\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

• Nếu $a\neq 1$, từ (1) thay x bởi $(1-a)x$ và $y=1-a$, khi đó

$$f\big([1-a]x-f(x)\big)=(1-a)bx,\ \forall x\in\mathbb{R},\ b=f\Big(1-f(\frac{1}{1-a})\Big).$$

Kết hợp với (2) suy ra: $a[x-f(x)]=(1-a)bx,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Hay $f(x)=cx,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Lúc này điều kiện $f(1-f(1))\neq 0$ nghĩa là

$$c(1-c)\neq 0\Leftrightarrow c\notin\{0,1\}.$$

Thay $f(x)=cx,\ \forall x\in\mathbb{R}$ ta được

$$c\left(x-\frac{cx}{y}\right)=cx\left(1-\frac{c}{y}\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\ y\neq 0\ \text{(luôn đúng)}.$$

• Nếu $a=1$, từ (2) và (3) suy ra với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có

$$f\big(x-f(x)\big)=x,\quad f\big(-f(x)\big)=x-f(x),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Từ đây suy ra $f(0)=0$. Giả sử $f(x_1)=f(x_2)$. Khi đó

$$x_1-f(x_1)=f\left(-f(x_1)\right)=f\left(-f(x_2)\right)=x_2-f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2.$$

Suy ra f là đơn ánh. Với mọi $x\in\mathbb{R}$, khi đó tồn tại $y=x-f(x)\in\mathbb{R}$ sao cho

$$f(y)=f\left(x-f(x)\right)=x.$$

Suy ra f là toàn ánh. Vậy f là song ánh. Dẫn tới tồn tại $m\neq 0$ sao $f(\frac{1}{m})=1$, kết hợp với (1) được: $f\Big(x-f(\frac{x}{m})\Big)=0=f(0),\forall x\in\mathbb{R}$. Mà f là song ánh nên $x-f\Big(\frac{x}{m}\Big)=0,\forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra $f(x)=mx,\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy không thỏa mãn (4).
Tất cả các hàm cần tìm là: $f(x)=cx,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (với $c\neq 0$ và $c\neq 1$).
Lưu ý. Trong lời giải bài toán này, ta đã tính $f\big([1-a]x-f(x)\big)$ theo hai cách khác nhau, để từ đó thu được một phương trình có chứa $f(x)$, rồi suy ra $f(x)$.

Bài toán 2.132 (Iran Team Selection Test 2011). *Tìm tất cả các toàn ánh $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:* $f\left(x+f(x)+2f(y)\right)=f(2x)+f(2y),\ \forall x.y\in\mathbb{R}.$ (1)

Giải. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (1). Do f là toàn ánh nên tồn tại $\alpha\in\mathbb{R}$ sao cho $f(\alpha)=0$.

$$P(\alpha,\alpha)\Rightarrow f(2\alpha)=0\Rightarrow f(4\alpha)=0.$$
$$P(x,\alpha)\Rightarrow f\left(x+f(x)\right)=f(2x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Do f là toàn ánh nên tồn tại $\beta\in\mathbb{R}$ sao cho $f(\beta)=-\dfrac{\alpha}{2}$.

$$P(\alpha,\beta)\Rightarrow f(0)=f(2\beta)\ ;\ P(2\alpha,\beta)\Rightarrow f(2\beta)=0.$$

Như vậy $f(0)=0$. Thực hiện $P(0,x)$, ta được $f\left(2f(x)\right)=f(2x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. (3)
Từ (3) suy ra nếu a và b là hai số sao cho $f(a)=f(b)$ thì $f(2a)=f(2b)$. Như vậy, từ (2) suy ra: $f\left(2x+2f(x)\right)=f(4x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. (4)
Giả sử $u\in\mathbb{R}$, tùy ý. Khi đó tồn tại v sao cho $f(v)=\dfrac{u}{2}$.

$$P(x,v)\Rightarrow f\left(x+f(x)+u\right)=f(2x)+f(2v),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x+f(x)+u)=f(2x)+f(2f(v)),\ \forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f(x+f(x)+u)=f(2x)+f(u),\ \forall x,u\in\mathbb{R}. \quad (5)$$

Kí hiệu $Q(m,n)$ chỉ việc thay x bởi m và thay u bởi n vào (5). Thực hiện $Q(x+f(x),y)$, sau đó sử dụng (2) và (4), ta được

$$f(x+f(x)+f(x+f(x))+y)=f(2x+2f(x))+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f(x+f(x)+f(2x)+y)=f(4x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Thực hiện $Q(x,f(2x)+y)$, ta được

$$f(x+f(x)+f(2x)+y)=f(2x)+f(f(2x)+y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f(4x)+f(y)=f(2x)+f(f(2x)+y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Thực hiện $Q(2x,y-2x)$, ta được

$$f(f(2x)+y)=f(4x)+f(y-2x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f(4x)+f(y)=f(2x)+f(4x)+f(y-2x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f(y)=f(y-2x)+f(2x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (6)$$

Từ (6), thay $(x;y)$ bởi $\left(\frac{x}{2};2x\right)$, ta thu được: $f(2x)=2f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Giả sử $t\in\mathbb{R}$, tùy ý. Khi đó tồn tại $s\in\mathbb{R}$ sao cho $f(s)=\frac{t}{2}$. Do đó

$$f(t)=f(2f(s))=f(2s)=2f(s)=t.$$

Như vậy $f(t)=t,\ \forall t\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy hàm số $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

2.3.4 Các bài toán tổng hợp

Bài toán 2.133 (HSG tỉnh Gia Lai năm học 2011-2012). *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:* $f(xf(y)+x)=xy+2f(x)-1,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. (1)

Giải.
Cách 1. Trong (1) thay $x=0$ ta được $f(0)=1$.
Trong (1) thay $x=1$ ta được: $f(f(y)+1)=y+2f(1)-1,\forall y\in\mathbb{R}$. (2)
Từ (2) lấy $y=-2f(1)$ được $f(f(-2f(1))+1)=-1$. Đặt $f(-2f(1))+1=a$.
Khi đó $f(a)+1=0\Rightarrow xf(a)+x=0\Rightarrow f(xf(a)+x)=f(0)=1,\forall x\in\mathbb{R}$.
Vậy theo (1) ta có

$$1=f(xf(a)+x)=ax+2f(x)-1\Rightarrow f(x)=-\frac{a}{2}x+1,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Suy ra $f(x)$ có dạng $f(x)=cx+1$, với c là hằng số. Thay vào (1) ta được

$$c(xf(y)+x)+1=xy+2(cx+1)-1,\forall x,y\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow c[x(cy+1)+x]=xy+2cx,\forall x,y\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow c^2xy+2cx=xy+2cx,\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Vậy $c=\pm1$. Thử lại thấy $f(x)\equiv x+1$ và $f(x)\equiv -x+1$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Vậy có hai hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x)=x+1,\forall x\in\mathbb{R};f(x)=-x+1,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Cách 2. Từ (2) lấy $y=1-2f(1)$ ta được $f(f(1-2f(1))+1)=0$. Đặt

$$f(1-2f(1))+1=a$$

ta được $f(a)=0$. Trong (1) cho $y=a$ ta được $f(x)=xa+2f(x)-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, hay $f(x)=-ax+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thay $f(x)=-ax+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ vào (1) ta tìm được $a=\pm1$. Từ đây ta được kết quả như ở cách 1.
Cách 3. Giả sử $f(y_1)=f(y_2)$, khi đó $f(f(y_1)+1)=f(f(y_2)+1)$, từ (2) có

$$y_1+2f(1)-1=y_2+2f(1)-1\Rightarrow y_1=y_2.$$

Vậy f là đơn ánh. Trong (2) thay y bởi $y+1-2f(1)$ ta được

$$f(f(y+1-2f(1))+1)=y.$$

Suy ra f là toàn ánh, do đó f là song ánh. Từ đây tồn tại duy nhất $a\in\mathbb{R}$ sao cho $f(a)=-1$. Trong (1) lấy $y=a$ ta được

$$f(0)=xa+2f(x)-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f(x)=-\frac{a}{2}x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}\ (\text{do } f(0)=1).$$

Vậy hàm f có dạng $f(x)\equiv bx+1$. Thay vào (1) được kết quả giống cách 1.
Lưu ý. Trong cách 3 chỉ cần có f là toàn ánh là đủ để suy ra tồn tại $a\in\mathbb{R}$ sao cho $f(a)=-1$. Cũng trong cách (3) chỉ cần lí luận vế phải của (2) là hàm đa thức bậc nhất theo y nên có tập giá trị là $\mathbb{R}$, suy ra f là toàn ánh.

Bài toán 2.134. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+f(y))=f(x+xy)+yf(1-x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (1).
• Trường hợp $f(1)\neq0$. $P(0,x)\Rightarrow f(f(x))=f(0)+f(1)x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra f là đơn ánh. $P(0,0)\Rightarrow f(f(0))=f(0)$, mà f là đơn ánh nên $f(0)=0$. Với $x\neq0$:

$$P\left(\frac{f(x)}{x},x\right)\Rightarrow f\left(1-\frac{f(x)}{x}\right)=0=f(0)\Rightarrow 1-\frac{f(x)}{x}=0,$$

do đó $f(x)=x,\ \forall x\neq 0$, kết hợp với $f(0)=0$ suy ra $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

• Trường hợp $f(1)=0$. Ta có $P(0,0)=f(f(0))=f(0)$, từ đó

$$P(1.f(0))\Rightarrow f(1+f(0))=f(1+f(0))+f^2(0)\Rightarrow f(0)=0.$$

$P(0,x)\Rightarrow f(f(x))=0$; $P(1,f(x-1))\Rightarrow f(f(x-1)+1)=0$. Thực hiện $P(1,x-1)$ ta được $f(1+f(x-1))=f(x)$. Như vậy $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là: $f(x)\equiv x,\ f(x)\equiv 0$.

Lưu ý. Kỹ thuật "thế triệt tiêu" như trên đã được sử dụng nhiều (chẳng hạn ở các bài toán 2.51, 2.54, 2.61...): cần triệt tiêu $f(x+f(y))$ và $f(x+xy)$ ở hai vế, ta xét: $x+f(y)=x+xy\Rightarrow x=\dfrac{f(y)}{y}$. Vì vậy, thực hiện $P\left(\dfrac{f(x)}{x},x\right)$ chắc chắn sẽ thu được điều mong muốn.

Bài toán 2.135 (Đề nghị thi thi Olympic 30/04/2007). *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn:* $f(xf(y))+f(yf(x))=2xy,\forall x,y\in\mathbb{R}$. (1)

Giải. Trong (1) cho $x=y=0$ được $f(0)=0$. Trong (1) cho $x=y$ được

$$f(xf(x))=x^2,\forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Ta sẽ chứng minh f là đơn ánh. Giả sử $f(x_1)=f(x_2)$. Khi đó

$$\begin{cases} x_1f(x_1)=x_1f(x_2)\\ x_2f(x_1)=x_2f(x_2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f(x_1f(x_1))=f(x_1f(x_2))\\ f(x_2f(x_1))=f(x_2f(x_2))\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_1^2=f(x_1f(x_2))\\ x_2^2=f(x_2f(x_1))\end{cases}$$

Cộng lại và sử dụng (1) ta được $x_1^2+x_2^2=2x_1x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$. Vậy f là đơn ánh. Trong (2) cho $x=1$ ta được $f(f(1))=1\Rightarrow f(1).f(f(1))=f(1)$. Suy ra

$$f(f(1).f(f(1)))=f(f(1))\overset{\text{theo (2)}}{\Rightarrow}[f(1)]^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(1)=1\\ f(1)=-1.\end{array}\right.$$

Trường hợp 1. $f(1)=1$. Trong (1) lấy $y=1$ ta được

$$\begin{aligned} &f(x)+f(f(x))=2x,\forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&f(f(x))=x+x-f(x)=x+z,\forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{3}$$

với: $z=x-f(x)\Leftrightarrow f(x)=x-z$. (4)

Từ (4) ta có: $f(x-z)=f(f(x))\overset{\text{do (3)}}{=}x+z$. Suy ra:

$$\begin{aligned} &f(x+z)=f(f(x-z))\overset{\text{do (3)}}{=}(x-z)+z=x\\ \Rightarrow&f(x)=f(f(x+z))=x+z+z=x+2z.\end{aligned} \tag{5}$$

Từ (4) và (5) suy ra $x-z=x+2z\Rightarrow z=0\Rightarrow f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Trường hợp 2. $f(1)=-1$. Trong (2) thay x bởi $-x$ ta được

$$f(-xf(-x))=x^2,\forall x\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Do f là đơn ánh nên từ (2) và (6) suy ra $f(-x)=-f(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Bởi vậy trong (1) lấy $y=1$ ta được: $-f(x)+f(f(x))=2x,\forall x\in\mathbb{R}$. Hay:

$$f(f(x))=x+x+f(x)=x+t,\forall x\in\mathbb{R}, \tag{7}$$

với $t=x+f(x)\Leftrightarrow f(x)=t-x$. (8)

Từ (8) và do f là hàm lẻ trên $\mathbb{R}$ nên ta có:

$$\begin{aligned} &f(t-x)=f(f(x))\overset{\text{do (7)}}{=}x+t\Rightarrow f(-(x-t))=x+t\Rightarrow -f(x-t)=x+t\\ \Rightarrow&f(x-t)=-x-t\Rightarrow f(-x-t)=f(f(x-t))=(x-t)+t=x\\ \Rightarrow&f(x)=f(f(-x-t))=-x-t+t=-x.\end{aligned} \tag{9}$$

Từ (9), (8) suy ra $t-x=-x\Rightarrow t=0\Rightarrow f(x)\equiv -x$. Thử lại thấy đúng.

Vậy các hàm số thỏa mãn đề bài là $f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(x)=-x,\forall x\in\mathbb{R}$.

Chú ý 2. *Bạn đọc hãy so sánh bài toán này với bài toán* 5.8 *ở trang* 521.

Bài toán 2.136. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f\left(\frac{xf(y)}{2}\right)+f\left(\frac{yf(x)}{2}\right)=4xy,\forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Hướng dẫn. Tương tự bài toán 2.135.

Bài toán 2.137 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2011). *Tìm tất cả các hàm* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn:* $f(x^2+f(y))=xf(x)+y,\forall x,y\in\mathbb{R}$. (1)

Giải. Đặt $f(0)=a$. Trong (1) cho $y=0$ ta được

$$f(x^2+a)=xf(x),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Trong (2) cho $x=0$ ta được $f(a)=0$. Trong (1) cho $x=0$ ta được

$$f(f(y))=y,\forall y\in\mathbb{R}.$$

Suy ra nếu $f(x_1)=f(x_2)$ thì $x_1=f(f(x_1))=f(f(x_2))=x_2$. Vậy f là một đơn ánh trên $\mathbb{R}$. Trong (2) cho $x=a$ ta được

$$f(a^2+a)=af(a)=af(f(0))=a.0=0=f(a).$$

Do đó từ $f(a) = f(a^2 + a)$ và f là đơn ánh suy ra $a = a^2 + a \Leftrightarrow a = 0$. Vậy $f(0) = 0$. Trong (1) cho $y = 0$ ta được $f(x^2) = xf(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó

$$f(x^2) = xf(x) = f(x).f(f(x)) = f(f(x)^2), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vì f là đơn ánh nên

$$x^2 = [f(x)]^2 \Leftrightarrow [f(x) - x][f(x) + x] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = x \\ f(x) = -x. \end{array}\right. \quad (3)$$

Ta dễ dàng kiểm tra được $f(x) = x$ và $f(x) = -x$ thỏa mãn (1). Ta sẽ chứng minh rằng ngoài ra không còn nghiệm nào khác. Giả sử $f(x)$ là một nghiệm khác với hai nghiệm trên, nghĩa là tồn tại $a \neq 0$ sao cho $f(a) \neq a$ và tồn tại $b \neq 0$ sao cho $f(b) \neq -b$. Từ (3) suy ra $f(a) = -a$ và $f(b) = b$. Bởi vậy từ

$$f(a^2 + f(b)) = af(a) + b \Rightarrow f(a^2 + b) = b - a^2.$$

Ta có $f(a^2 + b) = a^2 + b$ hoặc $f(a^2 + b) = -a^2 - b$. Nếu $f(a^2 + b) = a^2 + b$ thì

$$a^2 + b = b - a^2 \Leftrightarrow a = 0 \text{ (trái với } a \neq 0).$$

Nếu $f(a^2 + b) = -a^2 - b$ thì $-a^2 - b = b - a^2 \Leftrightarrow b = 0$ (trái với $b \neq 0$). Vậy chỉ có khả năng $\left\{\begin{array}{l} a^2 + b = 0 \\ b - a^2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2 + a^2 = 0 \\ b = a^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0, \end{array}\right.$ điều này cũng mâu thuẫn với $a \neq 0$ và $b \neq 0$. Đến đây ta kết luận: Có hai hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cách khác (ngắn gọn hơn). Từ (3) suy ra $f(1) = 1$ hoặc $f(1) = -1$. Nếu $f(1) = 1$ thì thay $x = 1$ vào (1) ta được

$$f(1 + f(y)) = 1 + y \Rightarrow f^2(1 + f(y)) = (1 + y)^2$$
$$\Rightarrow (1 + f(y))^2 = (1 + y)^2 \Rightarrow 2f(y) + y^2 = 2y + y^2 \Rightarrow f(y) = y, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Vậy $f(x) \equiv x$. Thử lại thấy thỏa mãn (1). Còn nếu $f(1) = -1$ thì thay $x = 1$ vào (1) ta được

$$f(1 + f(y)) = -1 + y \Rightarrow f^2(1 + f(y)) = (y - 1)^2$$
$$\Rightarrow (1 + f(y))^2 = (y - 1)^2 \Rightarrow 2f(y) + y^2 = y^2 - 2y \Rightarrow f(y) = -y, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Vậy $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn (1). Đến đây ta kết luận: Có hai hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chú ý 3. *Từ (3) chưa thể kết luận về biểu thức của hàm số. Bạn đọc lưu ý rằng (3) chỉ khẳng định rằng với $x \in \mathbb{R}$ thì giá trị của hàm số tại điểm x là x hoặc $-x$, chẳng hạn hàm $f(x) = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn (3).*

Bài toán 2.138 (Olympic toán Châu Á Thái Bình Dương 2002). *Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ sao cho f hoặc không có hoặc chỉ có hữu hạn 0-điểm trên $\mathbb{R}$ (Số x_0 thuộc tập xác định của hàm f được gọi là 0-điểm của hàm f nếu $f(x_0) = 0$) và thỏa mãn*

$$f\left(x^4 + y\right) = x^3 f(x) + f\left(f(y)\right), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) lấy $x = 0$ ta được: $f(y) = f\left(f(y)\right), \forall y \in \mathbb{R}$. (2)
Suy ra:

$$f\left(x^4 + y\right) = x^3 f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (3)$$
$$\Rightarrow f\left(x^4 + y\right) = -x^3 f(-x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Từ (3) lấy $x = 1$ và $y = 0$ ta được $f(0) = 0$. Trong (3) lấy $y = 0$ ta được

$$f(x^4) = x^3 f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Từ (3) và (5) ta có $f(x^4 + y) = f(x^4) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$, dẫn tới

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall y \in \mathbb{R}, \forall x \geq 0.$$

Từ (3), (4) và $f(0) = 0$ suy ra $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Nếu $x < 0$ thì theo (4) ta có

$$f(x + y) = f\left(-|x| + y\right) = -f\left(|x| - y\right) = -\left[f\left(|x|\right) + f\left(-y\right)\right]$$
$$= -\left[f(-x) - f(y)\right] = f(x) + f(y).$$

Vậy: $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. (6)
Giả sử tồn tại $x_0 \neq 0$ sao cho $f(x_0) = 0$. Khi đó $f(x_0^4) = 0$.
• Trường hợp $x_0 \neq 1$ và $x_0 \neq -1$. Xét dãy (x_n) như sau: $x_{n+1} = x_n^4, \forall n \in \mathbb{N}$. Ta có

$$f\left(x_1\right) = f\left(x_0^4\right) = 0, \ f\left(x_2\right) = f\left(x_1^4\right) = x_1^3 f(x_1) = 0, \ldots, f(x_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Suy ra mọi số hạng của dãy đều là nghiệm của $f(x) = 0$, mà $x_0 \neq 1$ và $x_0 \neq -1$ nên dãy (x_n) có vô số số hạng khác nhau, điều này mâu thuẫn với giả thiết.
• Trường hợp $x_0 = 1$. Từ (6) suy ra $f(2) = 0$, $f(3) = 0$, $f(4) = 0$, ..., suy ra hàm f có vô số 0-điểm, mâu thuẫn.
• Trường hợp $x_0 = -1$. Từ (6) suy ra $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, $f(3) = 0$, ..., suy ra hàm f có vô số 0-điểm, mâu thuẫn.
Vậy $x = 0$ là 0-điểm duy nhất của hàm f. Ta chứng minh f là đơn ánh. Giả sử $f(x_1) = f(x_2)$. Khi đó với mọi $y \in \mathbb{R}$ ta có

$$f(x_1 + y) = f(x_1) + f(y), \ f(x_2 + y) = f(x_2) + f(y).$$

Suy ra $f(x_1+y)=f(x_2+y)$. Từ đó

$$\begin{aligned} f(x_1-x_2) &= f((x_1+y)-(x_2+y)) = f(x_1+y)+f(-(x_2+y)) \\ &= f(x_1+y)-f(x_2+y)=0. \end{aligned}$$

Vậy x_1-x_2 là nghiệm của hàm f, suy ra $x_1-x_2=0$ hay $x_1=x_2$, dẫn tới f là đơn ánh. Do đó từ (2) ta được $f(y)=y$, $\forall y\in\mathbb{R}$. Có duy nhất một hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}\ \text{(thử lại thấy thỏa mãn)}.$$

Lưu ý. Từ (5) và (6), sử dụng phương pháp sai phân ta cũng tìm được $f(x)$. Kí hiệu $c=f(1)$ và:

$$\Delta_g^0(x)=g(x),\ \Delta_g^1(x)=\Delta_g^0(x+1)-\Delta_g^0(x),\ \Delta_g^2(x)=\Delta_g^1(x+1)-\Delta_g^1(x),\dots$$

Bây giờ ta sẽ khai triển $\Delta_r^3(x)$ và $\Delta_s^3(x)$, với $r(x)=f\left(x^4\right)$, $s(x)=x^3f(x)$. Do (6) nên ta có:

$$\begin{aligned}
\Delta_r^1(x) &= f\left((x+1)^4\right)-f\left(x^4\right) \\
&= f\left(x^4+4x^3+6x^2+4x+1\right)-f\left(x^4\right) \\
&= 4f\left(x^3\right)+6f\left(x^2\right)+4f(x)+c \\
\Delta_r^2(x) &= 4\left[f\left((x+1)^3\right)-f\left(x^3\right)\right] \\
&\quad +6\left[f\left((x+1)^2\right)-f\left(x^2\right)\right]+4\left[f(x+1)-f(x)\right] \\
&= 4\left[3f\left(x^2\right)+3f(x)+c\right]+6\left[2f(x)+c\right]+4c \\
&= 12f\left(x^2\right)+24f(x)+14c \\
\Delta_r^3(x) &= 12\left[f\left((x+1)^2\right)-f\left(x^2\right)\right]+24\left[f(x+1)-f(x)\right] \\
&= 12\left[2f(x)+c\right]+24c=24f(x)+36c. \\
\Delta_s^1(x) &= (x+1)^3f(x+1)-x^3f(x) \\
&= (x+1)^3\left[f(x)+c\right]-x^3f(x) \\
&= (3x^2+3x+1)f(x)+c(x+1)^3 \\
\Delta_s^2(x) &= \left(3x^2+9x+7\right)\left[f(x)+c\right]+c(x+2)^3 \\
&\quad -(3x^2+3x+1)f(x)-c(x+1)^3 \\
&= (6x+6)f(x)+\left[\left(3x^2+9x+7\right)+3x^2+9x+7\right]c \\
&= (6x+6)f(x)+2\left(3x^2+9x+7\right)c \\
\Delta_s^3(x) &= (6x+12)\left[f(x)+c\right]+2\left(3x^2+15x+19\right)c \\
&\quad -(6x+6)f(x)-2\left(3x^2+9x+7\right)c \\
&= 6f(x)+18x+36c.
\end{aligned}$$

Do (5) nên: $24f(x)+36c=6f(x)+18x+36c$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hay:

$$f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}\ \text{(thử lại thấy thỏa mãn)}.$$

Bài toán 2.139. *Tìm tất cả các hàm số $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn*

$$f(xf(y)+1)=yf(x+y),\ \forall x,y\in(0;+\infty). \tag{1}$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ phép thay x bởi u và y bởi v vào (1).

$$P\left(\frac{1}{f\left(\frac{f(2)}{x}\right)},\frac{f(2)}{x}\right)\Rightarrow f(2)=\frac{f(2)}{x}f\left(\frac{1}{f\left(\frac{f(2)}{x}\right)}+\frac{f(2)}{x}\right),\ \forall x>0$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{f\left(\frac{f(2)}{x}\right)}+\frac{f(2)}{x}\right)=x,\ \forall x>0.$$

Vậy f là toàn ánh. Tiếp theo chứng minh f là đơn ánh. Giả sử $a>0, b>0$ sao cho $f(a)=f(b)$, ta cần chứng minh $a=b$. Giả sử $b>a$. Khi đó $T=b-a>0$.

$$\begin{aligned}
&P(x,a)\Rightarrow f(xf(a)+1)=af(x+a),\ \forall x>0 \\
&P(x,b)\Rightarrow f(xf(a)+1)=bf(x+b),\ \forall x>0 \\
&\Rightarrow f(x+a)=\frac{b}{a}f(x+b),\ \forall x>0 \\
&\Rightarrow f(x)=\frac{b}{a}f(x+T),\ \forall x>a \\
&\Rightarrow f(x)=\left(\frac{b}{a}\right)^n f(x+nT),\ \forall x>a,\ n\in\mathbb{N}. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Do f là toàn ánh nên $\exists y>0: f(y)>1$. Tồn tại $n_0\in\mathbb{N}$ đủ lớn sao cho $y+n_0T-1>0$. Với mọi $n>n_0$, thực hiện $P\left(\frac{y+nT-1}{f(y)-1},y\right)$ ta được

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{y+nT-1}{f(y)-1}f(y)+1\right)=yf\left(\frac{y+nT-1}{f(y)-1}+y\right) \\
\Leftrightarrow &f\left(\frac{yf(y)+nTf(y)-1}{f(y)-1}\right)=yf\left(\frac{yf(y)+nT-1}{f(y)-1}\right) \\
\Rightarrow &f\left(\frac{yf(y)+nT-1}{f(y)-1}+nT\right)=yf\left(\frac{yf(y)+nT-1}{f(y)-1}\right)
\end{aligned}$$

$$\overset{\text{do}}{\underset{(2)}{\Rightarrow}}\left(\frac{a}{b}\right)^n f\left(\frac{yf(y)+nT-1}{f(y)-1}\right)=yf\left(\frac{yf(y)+nT-1}{f(y)-1}\right).$$

Suy ra $y=\left(\frac{a}{b}\right)^n$, $\forall n>n_0$, đây là điều không thể xảy ra. Vậy $a=b$, do đó f là đơn ánh. Như thế f là song ánh.

$$P(1,1)\Rightarrow f\left(f(1)+1\right)=f(2)\Rightarrow f(1)+1=2\Rightarrow f(1)=1.$$

$$P(1,x)\Rightarrow f\left(f(x)+1\right)=xf(1+x)\Rightarrow f(x+1)=\frac{1}{x}f\left(f(x)+1\right).$$

$$P\left(\frac{x}{f\left(\frac{1}{x}\right)},\frac{1}{x}\right)\Rightarrow f(x+1)=\frac{1}{x}f\left(\frac{x}{f\left(\frac{1}{x}\right)}+\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(f(x)+1\right)=f\left(\frac{x}{f\left(\frac{1}{x}\right)}+\frac{1}{x}\right)\Rightarrow f(x)+1=\frac{x}{f\left(\frac{1}{x}\right)}+\frac{1}{x},\ \forall x>0. \quad (3)$$

Từ (3) thay x bởi $\frac{1}{x}$ ta được $f\left(\frac{1}{x}\right)+1=\frac{1}{xf(x)}+x,\ \forall x>0.$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $f(x)+1=\dfrac{x}{\dfrac{1}{xf(x)}+x-1}+\dfrac{1}{x},\ \forall x>0.$ (5)

Giải phương trình (5) với ẩn là $f(x)>0$ ta được $f(x)=\frac{1}{x},\ \forall x>0$. Thử lại thấy hàm số $f(x)=\frac{1}{x},\ \forall x>0$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Lưu ý. Trong bài toán này ta đã biểu diễn $f(x+1)$ theo hai cách.

Bài toán 2.140. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho*

$$f\left(x^2-f^2(y)\right)=xf(x)-y^2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay $(x;y)$ bởi $(u;v)$ vào (1). Trước hết ta chứng minh nếu $f(y)=0$ thì $y=0$. Đặt $u=-f^2(0)$.

$$P(0,0)\Rightarrow f(u)=0\ ;\ P(0,u)\Rightarrow f(0)=-u^2.$$

Vậy $u=-u^4\Leftrightarrow u\in\{0,-1\}$. Nếu $u=-1$ thì $f(0)=-1$ và

$$P(-1,0)\Rightarrow -1=-f(-1)\Rightarrow 1=f(-1)\Rightarrow 1=f(u)\Rightarrow 1=0\ \text{(vô lí)}.$$

Do đó $u=0$ và $f(0)=0$. $P(x,0)\Rightarrow f(x^2)=xf(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Nếu $f(y)=0$ thì từ (1) suy ra $f(x^2)=xf(x)-y^2\Rightarrow -y^2=0\Rightarrow y=0$.

$$P(0,x)\Rightarrow f\left(-f^2(x)\right)=-x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (2)$$

$$P(-x,0)\Rightarrow f(x^2)=-xf(-x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Suy ra $xf(x)=-xf(-x),\ \forall x\in\mathbb{R}$, dẫn tới $f(-x)=-f(x),\ \forall x\neq 0$. Kết hợp với $f(0)=0$ suy ra: $f(-x)=-f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. (3)

Ta sẽ chứng minh f là toàn ánh. Từ (2) suy ra với mọi $y\le 0$, luôn tồn tại x sao cho $f(x)=y$. Còn với $y>0$ thì tồn tại x sao cho

$$y=x^2\overset{\text{do (2)}}{=}-f\left(-f^2(x)\right)\overset{\text{do (3)}}{=}f\left(f^2(x)\right).$$

Vậy f là toàn ánh. Tiếp theo chứng minh $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Từ (1), sử dụng các kết quả ở trên suy ra

$$f\left(x^2-f^2(y)\right)=f(x^2)-f\left(-f^2(y)\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (4)$$

Từ (4) và do f là toàn ánh nên

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x\ge 0,\ y\le 0$$
$$\Rightarrow f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (5)$$

Sử dụng $f(x^2)=xf(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$ và (5) ta được

$$f\left((x+1)^2\right)=(x+1)\left[f(x)+f(1)\right]=xf(x)+xf(1)+f(x)+f(1).$$
$$f\left((x+1)^2\right)=f(x^2+2x+1)=xf(x)+2f(x)+f(1).$$
$$\Rightarrow xf(1)+f(x)=2f(x)\Rightarrow f(x)=ax,\ \forall x\in\mathbb{R}\ (a=f(1)).$$

Thay vào (1) được $a=1$. Vậy $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.141. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f\left(f(xy)+x\right)=f\left(f(x)f(y)+x\right)=f(x)+xf(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u, thay y bởi v vào (1). Dễ thấy hàm số $f(x)\equiv 0$ thỏa mãn (1). Giả sử $f(x)\not\equiv 0$, tức là tồn tại u sao cho $f(u)\neq 0$.

$$P(-1,-1)\Rightarrow f\left(-1+f(1)\right)=f\left(-1+f^2(-1)\right)=0. \quad (2)$$

Suy ra tồn tại v sao cho $f(v)=0$.

$$P(v,u)\Rightarrow vf(u)=0\Rightarrow v=0.$$

Vậy $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$. Vì thế từ (2) ta có $f(1)=1$.

$$P(1,x)\Rightarrow f\left(1+f(x)\right)=1+f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (3)$$

Giả sử $f(k)=k$ $(k\in\mathbb{N})$. Khi đó $f(k+1)=f\left(1+f(k)\right)\overset{\text{do (3)}}{=}1+f(k)=1+k$. Theo nguyên lí quy nạp suy ra $f(n)=n,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Từ (2) suy ra $f^2(-1)=1$. Nếu $f(-1)=1$ thì

$$P\left(\frac{1}{n},n\right)\Rightarrow f\left(1+\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)+1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

$$P\left(\frac{1}{n},-n\right)\Rightarrow f\left(1+\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f(-n),\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Do đó $\dfrac{1}{n}f(-n)=1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, suy ra $f(-n)=f(n),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

$$P(-1,2)\Rightarrow f\left(-1+f(-2)\right)=f(-1)-f(2)\Rightarrow 1=-1.$$

Điều vô lí này chứng tỏ $f(-1)=-1$. Giả sử $f(y_1)=f(y_2)$. Nếu $y_2=0$ thì

$$f(y_1)=0\Rightarrow y_1=0\Rightarrow y_1=y_2.$$

Nếu $y_2\neq 0$ thì đặt $a=\dfrac{y_1}{y_2}$.

$$P(y_2,1)\Rightarrow f\left(f(y_2)+y_2\right)=f(y_2)+y_2.$$
$$P(y_2,a)\Rightarrow f\left(f(y_1)+y_2\right)=f(y_2)+y_2f(a)\Rightarrow f(a)=1.$$

Từ đó $P(a,1)\Rightarrow f(a+1)=a+1$. Nhận xét rằng nếu $f(x)=x$ thì

$$P(x,1)\Rightarrow f(x+1)=f(x)+1=x+1$$
$$P(-1,a)\Rightarrow f\left(-1+f(-1)f(a)\right)=f(-1)-f(a)\Rightarrow f(-x-1)=-x-1.$$

Sử dụng nhận xét này với $f(a+1)=a+1$ ta được

$$f(-a-2)=-a-2\Rightarrow f(-a-1)=-a-1\Rightarrow f(a)=a\Rightarrow a=1.$$

Suy ra $y_1=y_2$, từ đó f là đơn ánh. Vậy từ (1) ta có

$$f(xy)=f(x)f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Từ (4) suy ra với mọi $x\neq 0$ thì $f(1)=f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right)\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{f(x)}$. Ta có

$$P\left(\frac{1}{x},x\right)\Rightarrow f\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}+\frac{f(x)}{x},\ \forall x\neq 0.$$

$$f(x+1)=f\left(x(1+\frac{1}{x})\right)=f(x)\left[\frac{1}{f(x)}+\frac{f(x)}{x}\right]=1+\frac{f^2(x)}{x}.$$

$$P\left(x,\frac{1}{x}\right)\Rightarrow f(x+1)=f(x)+\frac{x}{f(x)}.$$

Do đó

$$1+\frac{f^2(x)}{x}=f(x)+\frac{x}{f(x)}\Rightarrow f^3(x)+xf(x)=xf^2(x)+x^2$$
$$\Rightarrow\left[f^2(x)+x\right]\left[f(x)-x\right]=0\Rightarrow f(x)=x,\ \forall x>0.$$

Với $x<0$ ta có $f(x)=f(-(-x))\overset{\text{do (4)}}{=}f(-1)f(-x)=-1(-x)=x$. Kết hợp với $f(0)=0$ suy ra $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại ta kết luận: Các hàm số cần tìm là $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Bài toán 2.142. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f\left(xy+f(x)\right)=xf(y)+f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Trước hết ta chứng minh rằng nếu f thỏa mãn (1) thì f là hàm "tựa đơn ánh", tức là nếu có $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ sao cho $f(x)=f(y)\neq 0$ thì $x=y$. Thật vậy, giả sử $f(x)=f(y)=z\neq 0$. Khi đó theo (1), ta có:

$$f(xy+z)=xz+z.$$

Mặt khác, cũng từ (1), ta có:

$$f\left(xy+f(y)\right)=yf(x)+f(y)\Rightarrow f(xy+z)=yz+z.$$

Suy ra: $xz+z=yz+z\Rightarrow xz=yz\overset{\text{do } z\neq 0}{\Rightarrow}x=y$. Vậy f là hàm "tựa đơn ánh".
Từ (1) cho $x=y=0$, ta được: $f\left(f(0)\right)=f(0)$. (2)
Ta sẽ chứng minh $f(0)=0$. Nếu $f(0)\neq 0$ thì do f tựa đơn ánh nên từ (2) suy ra: $f(0)=0$, đến đây ta gặp mâu thuẫn, vậy $f(0)=0$. Trong (1) chọn $y=0$, ta được: $f\left(f(x)\right)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. (3)
Do f "tựa đơn ánh nên từ (3) suy ra: $f(x)\in\{0,x\},\ \forall x\in\mathbb{R}$. (4)
Dễ thấy các hàm số $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn (1). Ta sẽ chứng minh ngoài hai hàm này ra không còn hàm nào khác. Giả sử phản chứng rằng tồn tại hàm f thỏa mãn (1) và

$$\exists a\neq 0: f(a)\neq 0,\ \exists b\neq 0: f(b)\neq b.$$

Từ (4) ta có: $f(a)=a$, $f(b)=0$. Trong (1) lấy $x=a$ và $y=b$ ta được:

$$f(ab+a)=f(a).$$

Mà $f(a)\neq 0$ và f là tựa đơn ánh nên $ab+a=a\Rightarrow ab=0$, đến đây ta gặp mâu thuẫn. Vậy chỉ có các hàm số sau thỏa mãn yêu cầu đề bài:

$$f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

2.4 Giải phương trình hàm dựa vào giá trị của đối số và giá trị của hàm số

Một số bài toán về phương trình hàm có thể giải quyết bằng cách tìm các tính chất của tập xác định D của biến số x hoặc tập giá trị của hàm số. Thông thường trước hết ta tìm hàm f trên một tập con X nào đó của D, sau đó tìm hàm f trên cả tập xác định D. Ở đây tính chất toàn ánh của hàm số là quan trọng. Sau đây là một số lưu ý:

- Cho $D \subset \mathbb{R}$ và hàm số $f : D \to \mathbb{R}$. Khi đó tập xác định của hàm số f là D, tập giá trị của hàm số f là $T = f(D) = \{f(x) | x \in D\}$.
- Nếu y thuộc tập giá trị của hàm số f thì tồn tại ít nhất một x thuộc tập xác định của hàm f sao cho $y = f(x)$.
- Mọi đa thức bậc lẻ đều có tập giá trị là $\mathbb{R}$ (kết quả tổng quát này được chứng minh dễ dàng, bạn đọc hãy tiến hành tương tự như trong lời giải của bài toán 2.143, ở trang 200).
- Đối với những phương trình hàm có chứa $f(x \pm f(y)), f(x), f(y) \ldots$ thì ta thường lấy $x = 0$ và thường thay x bởi $\pm f(x)$, bởi $\pm f(y) \ldots$ và thường phải tìm cho được biểu diễn của $f(f(x))$ theo $f(x)$.
- Ta thường biến đổi để xuất hiện biểu thức $ax + b$ (a, b là những hằng số, $a \neq 0$) và cho x thay đổi trên $\mathbb{R}$ để suy ra biểu thức này có tập giá trị là $\mathbb{R}$. Tổng quát hơn, ta thường biến đổi để xuất hiện một đa thức bậc lẻ, sau đó vận dụng tính chất đa thức bậc lẻ có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

Bài toán 2.143. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x^{2011} + 2010y)) = f(x + y) + f(3x + 2009y) - 2008, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Thay $y = 3x - x^{2011}$ vào (1) ta được

$$f(4x - x^{2011}) = 2008 \ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Xét hàm số $g(x) = -x^{2011} + 4x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(-x^{2011} + 4x\right) = \lim_{x \to +\infty} x^{2011} \left(-1 + \frac{4}{x^{2010}}\right) = -\infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(-x^{2011} + 4x\right) = \lim_{x \to -\infty} x^{2011} \left(-1 + \frac{4}{x^{2010}}\right) = +\infty.$$

Vậy hàm số $g(x)$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$. Do đó từ (2) suy ra $f(x) = 2008, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy $f(x) = 2008, \forall x \in \mathbb{R}$. thỏa mãn. Tóm lại hàm số cần tìm là

$$f(x) = 2008, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lưu ý. Phép thay $y = 3x - x^{2011}$ tìm được từ phương trình

$$x^{2011} + 2010y = 3x + 2009y \Leftrightarrow y = 3x - x^{2011}.$$

Bài toán 2.144. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x^{2009} + 3x + 2009y) = f(y + x^2 + 4x) + f(2010y + x^2) - 2016, \ \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Hướng dẫn. Thay $y = x^{2009} - x^2 + 3x$ vào (1) ta được

$$f(x^{2009} + 7x) = 2016, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Do hàm $y = x^{2009} + 7x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$ nên từ (2) được $f(x) = 2016, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.145. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x + f(y)) = x + f(y) + xf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn đề bài, khi đó ta có (1). Trong (1) lấy $x = 0$ ta được $f(f(y)) = f(y), \forall y \in \mathbb{R}$. Hay $f(f(x)) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. (2)
Ta có (1) tương đương với

$$f(x + f(y)) = x[1 + f(y)] + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Trường hợp 1: $f(y) \equiv -1$ (hay $f(y) = -1, \forall y \in \mathbb{R}$). Dễ thấy $f(y) \equiv -1$ thỏa mãn (1). Vậy $f(y) = -1, \forall y \in \mathbb{R}$ là một hàm số thỏa mãn đề bài.
Trường hợp 2: Tồn tại $y_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(y_0) \neq -1$. Khi đó

$$f(x + f(y_0)) = x[1 + f(y_0)] + f(y_0), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Cho x thay đổi trên $\mathbb{R}$, vế phải của (3) là đa thức bậc nhất theo x trên $\mathbb{R}$ (do $1 + f(y_0) \neq 0$), do đó có tập giá trị là $\mathbb{R}$. Suy ra tập giá trị của vế trái của (3) cũng là $\mathbb{R}$. Vậy hàm f có tập giá trị là $\mathbb{R}$. Do đó với mọi $u \in \mathbb{R}$, tồn tại $v \in \mathbb{R}$ sao cho $f(v) = u$. Vậy với mọi $u \in \mathbb{R}$ ta có

$$f(u) = f(f(v)) \overset{\text{do (2)}}{=} f(v) = u.$$

Nghĩa là $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy hàm số $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ không thỏa mãn (1). Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là $f(x) = -1, \forall x \in \mathbb{R}$.
Lưu ý. Trong vế phải của (1), khi cố định y, ta thu được một đa thức theo biến x dạng $ax + b$, đây là một dấu hiệu để ta sử dụng phương pháp giải như đã trình bày ở trên.

Bài toán 2.146. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x - f(y)) = 2f(x) + x + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn đề bài. Đặt $f(0)=a$. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow f(x-f(y))-2f(x)=x+f(y), \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (2)$$

Trong (2) lấy $y=0$ ta được: $f(x-a)-2f(x)=x+a, \forall x\in\mathbb{R}$. (3)
Cho x thay đổi trên $\mathbb{R}$ ta được tập giá trị của vế phải của (3) là $\mathbb{R}$. Suy ra với mọi $t\in\mathbb{R}$, tồn tại $u,v\in\mathbb{R}$ sao cho $t=f(u)-2f(v)$ (để tìm hàm f ta chỉ cần tìm $f(t)=f(f(u)-2f(v))=?$). Thay x bởi $f(y)$ vào (1) ta được

$$\begin{aligned} &f(0)=2f(f(y))+2f(y), \forall y\in\mathbb{R} \\ \Rightarrow &f(f(x))=-f(x)+\frac{a}{2}, \forall x\in\mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4)$$

Thay x bởi $f(x)$ vào (1) ta được

$$\begin{aligned} f(f(x)-f(y)) &= 2f(f(x))+f(x)+f(y) \\ &= -2f(x)+a+f(x)+f(y) \\ &= -(f(x)-f(y))+a, \forall x,y\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Thay x bởi $f(x)-f(y)$ vào (1) ta được

$$\begin{aligned} f(f(x)-2f(y)) &= 2f(f(x)-f(y))+f(x) \\ &= -2[f(x)-f(y)]+2a+f(x) \\ &= -[f(x)-2f(y)]+2a, \forall x,y\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ta có: $f(t)=f(f(u)-2f(v))=-(f(u)-2f(v))+2a=-t+2a, \forall t\in\mathbb{R}$.
Hay $f(x)=-x+2a, \forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra: $f(f(x))=-f(x)+2a, \forall x\in\mathbb{R}$. Kết hợp với (4) ta được $2a=\frac{a}{2}\Leftrightarrow a=0$. Vậy $f(x)=-x, \forall x\in\mathbb{R}$. Sau khi thử lại ta kết luận: Có duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là $f(x)=-x, \forall x\in\mathbb{R}$.
Lưu ý. Do $t=f(u)-2f(v)$ nên

$$\begin{aligned} f(t) &= f(f(u)-2f(v))=f(f(u)-f(v)-f(v)) \\ &= 2f(f(u)-f(v))+f(u)-f(v)+f(v)=2f(f(u)-f(v))+f(u). \end{aligned}$$

Vậy ta nảy sinh nhu cầu phải tìm $f(f(x)-f(y))$ như đã trình bày ở lời giải.

Bài toán 2.147 (Olympic toán Quốc tế-1999). *Hãy tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn* $f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1, \forall x,y\in\mathbb{R}$. (1)

Giải. Đặt $f(0)=a$. Dễ thấy (1) tương đương với

$$f(x-f(y))-f(x)=f(f(y))+xf(y)-1, \ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (2)$$

Trường hợp 1: $f(y)\equiv 0$. Dễ thấy $f(x)\equiv 0$ không thỏa mãn (1).
Trường hợp 2: Tồn tại $y_0\in\mathbb{R}: f(y_0)\neq 0$. Khi đó từ (2) ta có

$$f(x-f(y_0))-f(x)=f(f(y_0))+xf(y_0)-1, \ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (3)$$

Vế phải của (3) có tập giá trị là $\mathbb{R}$, suy ra tập giá trị của vế trái của (3) cũng là $\mathbb{R}$. Do đó với mọi $x\in\mathbb{R}$ luôn tồn tại $u,v\in\mathbb{R}$ sao cho $x=f(u)-f(v)$. Thay x bởi $f(y)$ vào (1) ta được $a=2f(f(y))+(f(y))^2-1, \forall y\in\mathbb{R}$. Vậy

$$f(f(y))=-\frac{1}{2}(f(y))^2+\frac{a+1}{2}, \forall y\in\mathbb{R}. \quad (4)$$

Thay x bởi $f(x)$ vào (1) ta được kết quả là: Với mọi $x,y\in\mathbb{R}$ ta có

$$f(f(x)-f(y))=f(f(y))+f(x)f(y)+f(f(x))-1=-\frac{[f(x)-f(y)]^2}{2}+a.$$

Vậy $f(x)=f(f(u)-f(v))=-\frac{[f(u)-f(v)]^2}{2}+a=-\frac{x^2}{2}+a, \forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra

$$f(f(x))=-\frac{[f(x)]^2}{2}+a, \forall x\in\mathbb{R}. \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra $\frac{a+1}{2}=a\Leftrightarrow a=1$. Do đó $f(x)=-\frac{x^2}{2}+1, \forall x\in\mathbb{R}$. Sau khi thử lại ta kết luận: Có duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x)=-\frac{x^2}{2}+1, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Lưu ý. Vì có duy nhất hàm số $f(x)=-\frac{x^2}{2}+1, \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài nên f không thể là toàn ánh. Tuy nhiên từ (3) ta suy ra được hàm số $g(x)=f(x-f(y_0))-f(x)$ là toàn ánh nên với mọi số thực x, luôn có biểu diễn: $x=f(u)-f(v)$.

Bài toán 2.148. *Tìm tất cả các hàm* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f(x-f(y))=f(f(y))+2xf(y)+f(x)+2, \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Đặt $f(0)=a$. Dễ thấy (1) tương đương với

$$f(x-f(y))-f(x)=f(f(y))+2xf(y)+2, \ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (2)$$

Trường hợp 1: $f(y)\equiv 0$. Dễ thấy $f(x)\equiv 0$ không thỏa mãn (1).
Trường hợp 2: Tồn tại $y_0\in\mathbb{R}: f(y_0)\neq 0$. Khi đó từ (2) ta có

$$f(x-f(y_0))-f(x)=f(f(y_0))+2f(y_0)x+2, \ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (3)$$

Vế phải của (3) có tập giá trị là $\mathbb{R}$, suy ra tập giá trị của vế trái của (3) cũng là $\mathbb{R}$. Do đó với mọi $x\in\mathbb{R}$ luôn tồn tại $u,v\in\mathbb{R}$ sao cho $x=f(u)-f(v)$. Thay x bởi $f(y)$ vào (1) ta được $a=2f(f(y))+2(f(y))^2+2, \forall y\in\mathbb{R}$. Vậy

$$f(f(y))=-(f(y))^2+\frac{a-2}{2}, \forall y\in\mathbb{R}. \quad (4)$$

Thay x bởi $f(x)$ vào (1) ta được kết quả là: Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ ta có

$$f(f(x)-f(y)) = f(f(y)) + 2f(x)f(y) + f(f(x)) + 2 = -[f(x)-f(y)]^2 + a.$$

Ta có $f(x) = f(f(u)-f(v)) = -[f(u)-f(v)]^2 + a = -x^2 + a, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra

$$f(f(x)) = -[f(x)]^2 + a, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra $\dfrac{a-2}{2} = a \Leftrightarrow a = -2$. Do đó $f(x) = -x^2 - 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Sau khi thử lại ta kết luận: Có duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x) = -x^2 - 2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.149. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x + f(y)) = (f(y))^2 + 2xf(y) + f(-x), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Đặt $f(0) = a$. Ta có (1) tương đương với

$$f(x + f(y)) - f(-x) = (f(y))^2 + 2xf(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Trường hợp 1: $f(y) \equiv 0$. Dễ thấy $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn (1).
Trường hợp 2: Tồn tại $y_0 \in \mathbb{R} : f(y_0) \neq 0$. Khi đó trong (2) thay y bởi y_0 ta được

$$f(x + f(y_0)) - f(-x) = (f(y_0))^2 + 2xf(y_0), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vế phải có tập giá trị là $\mathbb{R}$, do đó vế trái có tập giá trị là $\mathbb{R}$. Suy ra với mỗi $x \in \mathbb{R}$ luôn tồn tại $u, v \in \mathbb{R}$ sao cho $x = f(u) - f(v)$. Thay $x = 0$ vào (1) ta được

$$f(f(y)) = (f(y))^2 + a, \ \forall y \in \mathbb{R} \text{ hay } f(f(x)) = (f(x))^2 + a, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay x bởi $-f(x)$ vào (1) ta được

$$\begin{aligned} f(f(y) - f(x)) &= (f(y))^2 - 2f(x)f(y) + f(f(x)) \\ &= (f(y))^2 - 2f(x)f(y) + (f(x))^2 + a \\ &= [f(y) - f(x)]^2 + a, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3)$$

Ta có $f(x) = f(f(u) - f(v)) \overset{\text{do (3)}}{=} [f(u) - f(v)]^2 + a = x^2 + a, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy hàm số $f(x) = x^2 + a, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn. Vậy các hàm số cần tìm là

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(x) = x^2 + a, \forall x \in \mathbb{R} \ (a \text{ là hằng số bất kì}).$$

Bài toán 2.150 (HSG Hải Phòng năm học 2010-2011). *Tìm các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f^2(x) + 2yf(x) + f(y) = f(y + f(x)), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.*

Bài toán 2.151. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:*

$$f(x + f(y)) = f^4(y) + 4x^3f(y) + 6x^2f^2(y) + 4xf^3(y) + f(-x), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Đặt $f(0) = a$. Ta có (1) tương đương với:

$$f(x + f(y)) - f(-x) = f^4(y) + 4x^3f(y) + 6x^2f^2(y) + 4xf^3(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Trường hợp 1: $f(y) \equiv 0$. Dễ thấy $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn (1).
Trường hợp 2: $\exists y_0 \in \mathbb{R} : f(y_0) \neq 0$. Trong (2) lấy $y = y_0$ ta được:

$$f(x + f(y_0)) - f(-x) = f^4(y_0) + 4x^3f(y_0) + 6x^2f^2(y_0) + 4xf^3(y_0), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Vế phải (3) là một đa thức bậc ba nên có tập giá trị là $\mathbb{R}$. Suy ra vế trái (3) cũng có tập giá trị là $\mathbb{R}$. Do đó với mọi $x \in \mathbb{R}$, tồn tại $u, v \in \mathbb{R}$ sao cho: $x = f(u) - f(v)$. Trong (1) lấy $x = 0$ được: $f(f(y)) = f^4(y) + a, \forall y \in \mathbb{R}$. Hay:

$$f(f(x)) = [f(x)]^4 + a, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Thay x bởi $-f(x)$ vào (1) và sử dụng (4) ta được:

$$\begin{aligned} &f(f(y) - f(x)) \\ =&f^4(y) - 4f^3(x)f(y) + 6f^2(x)f^2(y) - 4f(x)f^3(y) + f(f(x)) \\ =&f^4(y) - 4f^3(x)f(y) + 6f^2(x)f^2(y) - 4f(x)f^3(y) + f^4(x) + a \\ =&[f(y) - f(x)]^4 + a, \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy $f(x) = f(f(u) - f(v)) = [f(u) - f(v)]^4 + a = x^4 + a, \forall x \in \mathbb{R}$.
Thử lại: Với $f(x) = x^4 + a, \forall x \in \mathbb{R}$, ta có:

$$f(x + f(y)) = f\left(x + y^4 + a\right) = \left(x + y^4 + a\right)^4 + a. \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &f^4(y) + 4x^3f(y) + 6x^2f^2(y) + 4xf^3(y) + f(-x) \\ =&\left(y^4 + a\right)^4 + 4x^3\left(y^4 + a\right) + 6x^2\left(y^4 + a\right)^2 + 4x\left(y^4 + a\right)^3 + \left(x^4 + a\right) \\ =&\left(x + y^4 + a\right)^4 + a. \end{aligned} \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra hàm số $f(x) = x^4 + a, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Vậy các hàm số cần tìm là:

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(x) = x^4 + a, \forall x \in \mathbb{R} \ (a \text{ là hằng số bất kì}).$$

Bài toán 2.152 (Hàn Quốc-2003). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $f(x - f(y)) = f(x) + xf(y) + f(f(y)), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.*

Bài toán 2.153. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f(f(x) + y) = f(f(x) - y) + 4f(x)y, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Kí hiệu: $f^2(x) = [f(x)]^2$.
Trong (1) thay y bởi $f(x)$ ta được: $f(2f(x)) = f(0) + 4f^2(x), \forall x \in \mathbb{R}$. (2)
Trong (1) thay y bởi $2f(y) - f(x)$, ta được:

$$f(2f(y)) = f(2f(x) - 2f(y)) + 4f(x)[2f(y) - f(x)], \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra:

$$f(0) + 4f^2(y) = f(2[f(x) - f(y)]) + 8f(x)f(y) - 4f^2(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f(2[f(x) - f(y)]) = (2[f(x) - f(y)])^2 + f(0), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Ta sẽ chứng minh $\{2[f(x) - f(y)] | x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$. (5)
Dễ thấy hàm số $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Tiếp theo giả sử $f(x) \neq 0$, tức là $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Thay $x = x_0$ vào (1):

$$f(f(x_0) + y) - f(f(x_0) - y) = 4f(x_0)y, \forall y \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Vì $f(x_0) \neq 0$ nên $4f(x_0)y$ là một đa thức bậc nhất theo biến y, do đó có tập giá trị là $\mathbb{R}$ hay $\{4f(x_0)y | y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$. Vậy từ (6) suy ra

$$\{f(f(x_0) + y) - f(f(x_0) - y) | y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

Do đó (5) được chứng minh. Từ (5) và (4) suy ra:

$$f(x) = x^2 + a, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Thử lại thấy hàm số xác định bởi (7) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.
Kết luận: các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$f(x) \equiv 0, \ f(x) = x^2 + a \ (a \text{ là hằng số tùy ý}).$$

Bài toán 2.154 (Chọn đội tuyển Đức thi toán quốc tế-2003; dự tuyển IMO-2002). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Với $y \in \mathbb{R}$ tùy ý ta chọn $\beta = \dfrac{f(0) - y}{2}$. Hay $y = f(0) - 2\beta$. Lại chọn $\alpha = -f(\beta)$, $\gamma = f(\alpha) - \beta$. Khi đó

$$f(\gamma) = f(f(\alpha) - \beta) = f(f(\beta) + \alpha) - 2\beta = f(0) - 2\beta = y.$$

Vậy f là toàn ánh. Do đó có $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f(a) = 0$. Từ (1) cho $x = a$ được

$$f(y) = 2a + f(f(y) - a), \forall y \in \mathbb{R}.$$

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, vì f là toàn ánh nên có $y \in \mathbb{R}$ sao cho $f(y) = x + a$. Khi đó

$$x = f(y) - a = a + f(f(y) - a) = f(x) + a \ (\text{do } f(y) - a = x).$$

Suy ra $f(x) = x - a, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Bởi vậy, tất cả các hàm số cần tìm là

$$f(x) = x + C, \forall x \in \mathbb{R} \ (\text{với } C \text{ là hằng số tùy ý.})$$

Lưu ý. Lời giải trên được tìm ra như thế nào? Trước hết ta nhận thấy, nếu tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f(a) = 0$ thì từ (1) cho $x = a$ ta được

$$f(y) = 2a + f(f(y) - a), \ \forall y \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f(f(y) - a) = [f(y) - a] - a, \ \forall y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Với mọi $y \in \mathbb{R}$, đặt $x = f(y) - a$, từ (2) ta được $f(x) = x - a$. Vấn đề bây giờ là có tồn tại số a như đã yêu cầu, hơn nữa việc đặt $x = f(y) - a$, $\forall y \in \mathbb{R}$ liệu đã quét hết các giá trị trong tập xác định của hàm f hay chưa? Cả hai thắc mắc đó sẽ được giải quyết nếu f là toàn ánh. Với số thực y bất kì, ta tìm $x \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) = y$. Để sử dụng giả thiết (1), ta sẽ tìm x ở hai dạng:
• Dạng 1: $x = f(\alpha) + \beta$. Khi đó $f(x) = f(f(\alpha) + \beta) = 2\alpha + f(f(\beta) - \alpha)$. Cần chọn α, β để

$$\begin{cases} 2\alpha + f(f(\beta) - \alpha) = y \\ f(\beta) - \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{y - f(0)}{2} \\ \beta = ? \end{cases}$$

Dạng này không chọn được β.
• Dạng 2: $x = f(\alpha) - \beta$. Khi đó $f(x) = f(f(\alpha) - \beta) = f(f(\beta) + \alpha) - 2\beta$. Cần chọn α, β để

$$\begin{cases} f(f(\beta) + \alpha) - 2\beta = y \\ f(\beta) + \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{f(0) - y}{2} \\ \alpha = -f(\beta). \end{cases}$$

Bài toán đã tìm được lời giải.

Bài toán 2.155. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x - f(y)) = f(x + y^{2014}) + f(f(y) + y^{2014}) + 2016, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Đặt $f(0) = a$. Từ (1) cho $y = 0$ ta được

$$f(x - a) = f(x) + f(a) + 2016, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Nếu $a = 0$ thì từ (2) có $f(x) = f(x) + 2016, \forall x \in \mathbb{R}$, vô lí, vậy $a \neq 0$. Từ (1) thay x bởi $f(y)$ ta được

$$a = f(f(y) + y^{2014}) + f(f(y) + y^{2014}) + 2016, \forall y \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f(f(y) + y^{2014}) = b, \forall y \in \mathbb{R} \left(\text{với } b = \frac{a - 2016}{2}\right). \quad (3)$$

Từ (3) và (1) suy ra

$$f(x-f(y))=f(x+y^{2014})+c,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\ \ (\text{với } c=b+2016). \tag{4}$$

Từ (4) thay x bởi $x+f(y)$ ta được

$$f(x)=f\left(x+f(y)+y^{2014}\right)+c,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Đặt $g(x)=f(x)+x^{2014}\Rightarrow g(0)=f(0)=a\neq 0$ và (5) trở thành

$$f(x)=f\left(x+g(y)\right)+c,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Đặt $h(y)=g\left(y+g(0)\right)-g(y)=f\left(y+g(0)\right)+\left(y+g(0)\right)^{2014}-f(y)-y^{2014}$.
Từ (6) lấy $y=0$ ta được $f(x)=f\left(x+g(0)\right)+c,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra

$$h(y)=f(y)-c+\left(y+g(0)\right)^{2014}-f(y)-y^{2014}=\left(y+g(0)\right)^{2014}-y^{2014}-c.$$

Vậy $h(y)$ là một đa thức bậc 2013 theo y. Từ (6) ta cũng có

$$\begin{aligned}f\left(x+h(y)\right)&=f\left(x+h(y)+g(y)\right)+c=f\left(x+g\left(y+g(0)\right)\right)+c\\&=f(x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{7}$$

Mà $h(y)$ là đa thức bậc lẻ nên có tập giá trị là $\mathbb{R}$, vậy từ (7) suy ra

$$f(x+\alpha)=f(x),\ \forall x,\alpha\in\mathbb{R}.$$

Từ đây lấy $x=0$ được $f(\alpha)=a,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$, hay f là hàm hằng. Thay vào (1) được

$$a=a+a+2016\Leftrightarrow a=-2016.$$

Vậy có đúng một hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x)=-2016,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Bài toán 2.156. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f\left(x+f(y)\right)=f(x)+\frac{1}{8}xf(4y)+f\left(f(y)\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Dễ thấy $f(x)\equiv 0$ thỏa (1). Tiếp theo giả sử $f(x)\not\equiv 0$, tức là tồn tại số thực t sao cho $f(t)\neq 0$. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (1). $P(0,0)\Rightarrow f(0)=0$.

$$P\left(f(x),t\right)\Rightarrow f\left(f(x)+f(t)\right)=f\left(f(x)\right)+\frac{1}{8}f(x)f(4t)+f\left(f(t)\right),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

$$P\left(f(t),x\right)\Rightarrow f\left(f(t)+f(x)\right)=f\left(f(t)\right)+\frac{1}{8}f(t)f(4x)+f\left(f(x)\right),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow f(t)f(4x)=f(x)f(4t)\Rightarrow f(4x)=8af(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Do (2) nên (1) viết lại

$$f\left(x+f(y)\right)=f(x)+axf(y)+f\left(f(y)\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Kí hiệu $Q(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (3). Lần lượt thực hiện $Q\left(f(u)-f(v),v\right)$, $Q\left(f(v)-f(u),u\right)$ ta thu được

$$f\left(f(u)\right)=f\left(f(u)-f(v)\right)+a\left[f(u)-f(v)\right]f(v)+f\left(f(v)\right),\ \forall u,v\in\mathbb{R}.$$
$$f\left(f(v)\right)=f\left(f(v)-f(u)\right)+a\left[f(v)-f(u)\right]f(u)+f\left(f(u)\right),\ \forall u,v\in\mathbb{R}.$$

Suy ra

$$f\left(f(u)-f(v)\right)+f\left(f(v)-f(u)\right)=a[f(u)-f(v)]^2,\ \forall u,v\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Nếu f là hàm hằng thì thay vào (1) được $f(x)\equiv 0$, mâu thuẫn, do đó tồn tại u và v sao cho $f(u_0)\neq f(v_0)$. Đặt $w=f(u_0)-f(v_0)\neq 0$. Từ (4) ta có

$$f(w)+f(-w)=aw^2\overset{\text{do (2)}}{\Rightarrow}\frac{f(4w)+f(-4w)}{8a}=aw^2$$
$$\Rightarrow\frac{16aw^2}{8a}=aw^2\Rightarrow 2w^2=aw^2\overset{\text{do } w\neq 0}{\Rightarrow}a=2.$$

Vậy (3) trở thành

$$f\left(x+f(y)\right)=f(x)+2xf(y)+f\left(f(y)\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{5}$$
$$\Leftrightarrow f\left(x+f(y)\right)-f(x)=2xf(y)+f\left(f(y)\right),\forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Kí hiệu $R(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (5) hoặc (6).

$$R\left(f(x),x\right)\Rightarrow f\left(2f(x)\right)=2f\left(f(x)\right)+2f^2(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$
$$R\left(2f(x),x\right)\Rightarrow f\left(3f(x)\right)=3f\left(f(x)\right)+6f^2(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$
$$R\left(3f(x),x\right)\Rightarrow f\left(4f(x)\right)=4f\left(f(x)\right)+12f^2(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Kết hợp với (2) ta được

$$16f\left(f(x)\right)=4f\left(f(x)\right)+12f^2(x)\Rightarrow f\left(f(x)\right)=f^2(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Vì thế $R\left(-f(x),x\right)\Rightarrow 0=f\left(-f(x)\right)-2f^2(x)+f^2(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra

$$f\left(-f(x)\right)=f^2(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Thực hiện $R\left(-f(x),y\right)$ ta được

$$\begin{aligned}&f\left(f(y)-f(x)\right)=f\left(-f(x)\right)-2f(x)f(y)+f^2(y)\\&=f^2(x)-2f(x)f(y)+f^2(y)=[f(y)-f(x)]^2,\forall x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{7}$$

Mặt khác

$$R(x,t)\Rightarrow f\left(x+f(t)\right)-f(x)=2xf(t)+f\left(f(t)\right),\forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow\left\{f\left(x+f(t)\right)-f(x)|x\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}\Rightarrow\left\{f(y)-f(x)|x\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}.$$

Kết hợp với (7) ta được $f(x)=x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy đúng. Vậy có hai hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\ ;\ \ f(x)=x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 2.157. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(2x+f(y))=f(2x)+xf(2y)+f(f(y)),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Hướng dẫn. Từ (1) thay x bởi $\frac{x}{2}$ ta được

$$f(x+f(y))=f(x)+\frac{x}{2}f(2y)+f(f(y)),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ (2), tiến hành tương tự như bài toán 2.156 ta được kết quả: Có hai hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)=x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Bài toán 2.158. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+f(y))=f(y^2+3)+2xf(y)+f(x)-3,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Bài toán 2.159 (Việt Nam TST 2004). *Tìm tất cả các giá trị của a sao cho tồn tại duy nhất một hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f\left(x^2+y+f(y)\right)=[f(x)]^2+ay,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Nhận thấy nếu $a=0$ thì có hai hàm số thỏa (1) là $f(x)\equiv 0$ và $f(x)\equiv 1$, do đó xét $a\neq 0$. Do vế phải là hàm bậc nhất theo y nên có tập giá trị là $\mathbb{R}$, do đó

$$\left\{f\left(x^2+y+f(y)\right)|y\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}\Rightarrow\left\{x^2+y+f(y)|y\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R},$$

suy ra $\{f(y)|y\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$, hay f là toàn ánh, dẫn đến tồn tại $b\in\mathbb{R}$ sao cho $f(b)=0$. Ta sẽ chứng minh nếu $f(x)=0$ thì $x=0$. Từ (1) lấy $y=b$ được

$$f\left(x^2+b\right)=[f(x)]^2+ab,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ (2) thay x bởi $-x$ được $f\left(x^2+b\right)=[f(-x)]^2+ab,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Kết hợp với (2) được $[f(x)]^2=[f(-x)]^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$ hay: $|f(x)|=|f(-x)|,\ \forall x\in\mathbb{R}$. (3)
Từ (3) suy ra $f(-b)=0$. Từ (1) lấy $y=-b$ được

$$f\left(x^2-b\right)=[f(x)]^2-ab,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Từ (4) và (2) suy ra: $f\left(x^2+b\right)-f\left(x^2-b\right)=2ab,\ \forall x\in\mathbb{R}$. (5)
Từ (5) lấy $x=0$ được $f(b)-f(-b)=2ab\Rightarrow 2ab=0\Rightarrow b=0$. Vậy ta thu được tính chất $f(0)=0$ và nếu $f(x)=0$ thì $x=0$, cũng từ tính chất này ta có: nếu $x\neq 0$ thì $f(x)\neq 0$. Từ (1) cho $y=0$ được

$$f(x^2)=[f(x)]^2,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Từ (6) lấy $x=1$ được: $f(1)=f^2(1)\Rightarrow f(1)=1$ (do $1\neq 0\Rightarrow f(1)\neq 0$).
Trong (1) cho $y=1$ được: $f(x^2+2)=[f(x)]^2+a=f(x^2)+a,\forall x\in\mathbb{R}$. (7)
Thay $x=0$ vào (7) được $a=f(2)$. Do vậy

$$a^2=f^2(2)=f(2^2)=f(4)=f\left(\left(\sqrt{2}\right)^2+2\right)=f(2)+a=2a\overset{\text{do } a\neq 0}{\Rightarrow}a=2.$$

Lúc này (1) trở thành: $f\left(x^2+y+f(y)\right)=[f(x)]^2+2y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. (8)
Từ (8) lấy $y=-\frac{[f(x)]^2}{2}$ ta được

$$f\left(x^2-\frac{[f(x)]^2}{2}+f\left(-\frac{[f(x)]^2}{2}\right)\right)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x^2-\frac{[f(x)]^2}{2}+f\left(-\frac{[f(x)]^2}{2}\right)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{[f(x)]^2}{2}\right)=-x^2+\frac{[f(x)]^2}{2},\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{9}$$

Từ (8) thay y bởi $-\frac{[f(y)]^2}{2}$ ta được

$$f\left(x^2-\frac{[f(y)]^2}{2}+f\left(-\frac{[f(y)]^2}{2}\right)\right)=[f(x)]^2-[f(y)]^2,\forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{10}$$

Từ (10), sử dụng (9) ta được

$$f\left(x^2-\frac{[f(y)]^2}{2}-y^2+\frac{[f(y)]^2}{2}\right)=[f(x)]^2-[f(y)]^2,\forall x,y\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x^2-y^2)=[f(x)]^2-[f(y)]^2,\forall x,y\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x^2-y^2)=f(x^2)-f(y^2),\forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{11}$$

Từ (11) lấy $x=0$ được $f(-y^2)=-f(y^2),\forall y\in\mathbb{R}$, suy ra

$$f(t)=-f(-t),\ \forall t\geq 0. \tag{12}$$

Với $t<0$ thì $-t>0$, sử dụng (12) ta thu được $f(-t)=-f(t)$. Kết hợp với (12) suy ra $f(-t)=-f(t),\ \forall t\in\mathbb{R}$, hay f là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$. Từ đây kết hợp với (11) ta được: $f(x+y)=f(x)+f(y)$, với $x\geq 0,\ y\leq 0$. (14)
Từ (14) cũng có: $f(x+y)=f(x)+f(y)$, với $x\leq 0,\ y\geq 0$. (15)
Nếu $x>0$ và $y>0$ thì

$$f(x+y)=f(x-(-y))\overset{\text{theo (11)}}{=}f(x)-f(-y)=f(x)+f(y). \tag{16}$$

Nếu $x < 0$ và $y < 0$ thì theo (16) ta có $f(-x-y) = f(-x) + f(-y)$, suy ra $-f(x+y) = -f(x) - f(y) \Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y)$, với $x < 0, y < 0$. (17)
Từ (14), (15), (16), (17) suy ra: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. (18)
Sử dụng (6) và (18) suy ra:

$$\begin{aligned}
&[f(x+y)]^2 = f\left((x+y)^2\right),\ \forall x, y \in \mathbb{R}\\
\Rightarrow &[f(x)+f(y)]^2 = f(x^2+2xy+y^2),\ \forall x, y \in \mathbb{R}\\
\Rightarrow &f^2(x) + 2f(x)f(y) + f^2(y) = f(x^2) + f(2xy) + f(y^2),\ \forall x, y \in \mathbb{R}\\
\Rightarrow &f(xy) = f(x)f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \qquad (19)
\end{aligned}$$

Từ (19), (18), $f(1) = 1$, sử dụng bài toán 2.169 ở trang 218 ta được $f(x) \equiv x$. Thử lại thấy thỏa mãn (8). Vậy $a = 2$ là giá trị cần tìm.

2.5 Phương trình hàm trong lớp hàm đơn điệu

2.5.1 Một số định nghĩa và tính chất

Cho K là một khoảng (hay một đoạn, một nửa khoảng) nào đó của $\mathbb{R}$ và f là hàm số xác định trên K.

Định nghĩa 1. *Hàm số f được gọi là đồng biến (hay tăng) trên K nếu*

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2).$$

Định nghĩa 2. *Hàm số f được gọi là nghịch biến (hay giảm) trên K nếu*

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2).$$

Định nghĩa 3. *Hàm số tăng hoặc giảm trên một khoảng được gọi là hàm số đơn điệu trên khoảng đó.*

Định nghĩa 4. *Hàm số f được gọi là tăng thực sự trên K nếu*

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Định nghĩa 5. *Hàm số f được gọi là giảm thực sự trên K nếu*

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Lưu ý. Hàm số tăng (giảm) thực sự còn được gọi là hàm số tăng (giảm) nghiêm ngặt. Hàm số không giảm nghĩa là hàm số tăng nhưng có thể tăng không nghiêm ngặt, hàm số không tăng nghĩa là hàm số giảm nhưng có thể giảm không nghiêm ngặt.

Định nghĩa 6. *Hàm số tăng hoặc giảm thực sự trên một khoảng được gọi là hàm số đơn điệu thực sự trên khoảng đó.*

Chú ý 4. *Định nghĩa hàm số đồng biến, nghịch biến trong sách giáo khoa PTTH hiện hành chính là định nghĩa hàm số tăng thực sự, hàm số giảm thực sự trong quyển sách này.*

Định lý 1. *Mọi hàm đơn điệu thực trên một khoảng đều là đơn ánh trên khoảng đó.*

Định lý 2. *Nếu $f : D \to \mathbb{R}$ và $g : D \to \mathbb{R}$ là hai hàm tăng thì $f + g$ cũng là hàm tăng.*

Định lý 3. *Nếu $f : D \to \mathbb{R}$ và $g : D \to \mathbb{R}$ là hai hàm tăng và không âm thì $f(x)g(x)$ cũng là hàm tăng.*

Định lý 4. *Nếu f là hàm đơn điệu thực sự trên $(a; b)$ thì phương trình $f(x) = m$ có nhiều nhất là một nghiệm trên khoảng đó.*

Định lý 5. *Nếu $f : D_f \to \mathbb{R}$ và $g : D_g \to \mathbb{R}$ là hai hàm tăng và tập xác định của hàm g chứa tập giá trị của hàm f thì hàm số hợp $g \circ f$ là hàm tăng.*

Hệ quả 1. *Nếu f là hàm tăng thì hàm số hợp $f(f(x))$ cũng tăng.*

Hệ quả 2. *Nếu f là hàm giảm thì hàm số hợp $f(f(x))$ là hàm số tăng.*

Chứng minh. Giả sử $x < y$. Khi đó $f(x) \ge f(y) \Rightarrow f(f(x)) \le f(f(y))$. Vậy $f \circ f$ là hàm số tăng.

2.5.2 Một số lưu ý khi giải toán

Sau đây là một số lưu ý, bạn đọc cần ghi nhớ để giải toán được nhanh hơn.

- Nếu f đơn điệu thực sự thì f là đơn ánh.
- Trong một vài trường hợp nếu ta dự đoán được công thức của hàm số, chẳng hạn $f(x) = g(x)$ thì có thể xét $f(x) > g(x)$ và $f(x) < g(x)$, sau đó sử dụng tính đơn điệu của hàm f để dẫn tới điều vô lí (chẳng hạn bài toán 2.312).
- Nếu hàm f đơn điệu và ta đã có công thức của f trên tập số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ thì dùng kĩ thuật chọn hai dãy hữu tỉ đơn điệu ngược nhau, rồi từ đó chuyển qua giới hạn (chẳng hạn các bài toán bài toán 2.167, 2.189).
- Nếu f cộng tính và đơn điệu trên $\mathbb{R}$ (hoặc $\mathbb{R}^+$) thì $f(x) = ax$ (xem chứng minh ở bài toán 2.167, ở trang 217).

2.5.3 Sử dụng tính chất: $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

Trong mục này ta sẽ sử dụng tính chất: Nếu f là hàm số đơn điệu trên khoảng K và a, b thuộc K sao cho $f(a) = f(b)$ thì $a = b$. Điều này có ý nghĩa rất lớn, nó giúp ta "giảm bớt f".

Bài toán 2.160 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2011). *Tìm tất cả các hàm số f xác định và đồng biến trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(\frac{1}{4}f(y) + 2x\right) = 4x + y + 1,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Thay $x = -\frac{1}{4}y$ vào (1) ta được: $f\left(\frac{1}{4}f(y) - \frac{1}{2}y\right) = 1,\ \forall y \in \mathbb{R}.$ (2)

Trong (1) lấy $x = y = 0$ ta được $f\left(\frac{1}{4}f(0)\right) = 1$. Kết hợp với (2) ta được

$$f\left(\frac{1}{4}f(y) - \frac{1}{2}y\right) = f\left(\frac{1}{4}f(0)\right),\ \forall y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Do f đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên từ (3) suy ra

$$\frac{1}{4}f(y) - \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}f(0),\ \forall y \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Từ (4) suy ra $f(x) = 2x + a$, với a là hằng số. Thay vào (1) ta được

$$f\left(\frac{1}{4}(2y + a) + 2x\right) = 4x + y + 1,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{4}(2y + a) + 2x\right) + a = 4x + y + 1,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow y + 4x + \frac{3a}{2} = 4x + y + 1,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3a}{2} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}.$$

Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là $f(x) = 2x + \frac{2}{3},\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.161. *Tìm tất cả các hàm số f xác định và đồng biến trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $f\left(\frac{2}{3}f(y) - 3x\right) = 9x + 6y - 3,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.*

Hướng dẫn. Tương tự bài toán 2.160 ở trang 214.

Bài toán 2.162. *Tìm tất cả các hàm tăng thực sự $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(f(x) + 2y) = f(2x + 2y) + 2009, \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Ta có: $f(f(y) + 2x) = f(2y + 2x) + 2009, \forall x, y \in \mathbb{R}.$ (2)
Từ (1) và (2) ta có: $f(f(x) + 2y) = f(f(y) + 2x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$ (3)
Do f tăng thực sự nên từ (3) ta có $f(x) + 2y = f(y) + 2x, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Hay

$$f(x) - 2x = f(y) - 2y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bởi vậy $f(x) - 2x = a, \forall x \in \mathbb{R}$ (a là hằng số). Thay vào (1) ta được

$$2x + 2y + 2a = 2x + 2y + a + 2009 \Leftrightarrow 2a = a + 2009 \Leftrightarrow a = 2009.$$

Vậy $f(x) = 2x + 2009, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.163. *Tìm tất cả các hàm tăng thực sự $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Hướng dẫn. Tương tự bài toán 2.162.

Bài toán 2.164 (Hy lạp-1997). *Tính $f(1)$, biết rằng $f : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$ là hàm số tăng nghiêm ngặt và thỏa mãn đồng thời hai điều kiện*

$$f(x) > -\frac{1}{x},\ \forall x > 0. \tag{1}$$

$$f(x)f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) = 1,\ \forall x > 0. \tag{2}$$

Giải. Đặt $t = f(1)$. Thế $x = 1$ vào (2) ta được $tf(t + 1) = 1$. Suy ra $t \neq 0$ và $f(t + 1) = \frac{1}{t}$. Từ (1) thấy rằng $f(1) > -1 \Rightarrow t + 1 > 0$. Vậy từ (2) lấy $x = t + 1$ được

$$f(t+1)f\left(f(t+1) + \frac{1}{t+1}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{t}f\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}\right) = 1$$
$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}\right) = t \Rightarrow f\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}\right) = f(1). \tag{3}$$

Vì hàm số f tăng nghiêm ngặt nên từ (3) suy ra

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} = 1 \Leftrightarrow 2t + 1 = t^2 + t \Leftrightarrow t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Nếu $t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$ thì $1 < t = f(1) < f(1 + t) = \frac{1}{t} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ (vô lí). Do đó ta thu được $f(1) = t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Chú ý là hàm số $f(x) = \frac{1 - \sqrt{5}}{2x}$ thỏa mãn các điều kiện đề bài.

2.5.4 Phương pháp kẹp giá trị hàm số

Trong mục này ta sẽ xét một số bài toán được giải bằng cách vận dụng tính đơn điệu của hàm số kết hợp với kết quả: $A \le B \le A \Rightarrow A = B$.

Bài toán 2.165. *Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số tăng và thỏa mãn:*

$$f(x + 2009) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng f là hàm hằng.

Giải. Từ giả thiết và bằng quy nạp ta chứng minh được

$$f(x) = f(x + 2009n), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Với $x < y$, ta chọn

$$n = \left[\frac{y-x}{2009}\right] \Rightarrow n \le \frac{y-x}{2009} < n+1 \Rightarrow x + 2009n \le y < x + 2009(n+1).$$

Vì f là hàm tăng nên

$$\begin{aligned} &f(x + 2009n) \le f(y) \le f(x + 2009(n+1)) \\ \Rightarrow &f(x) \le f(y) \le f(x) \Rightarrow f(x) = f(y). \end{aligned}$$

Vậy f là hàm hằng.

Lưu ý. Trong bài toán 2.165, thay giả thiết f là hàm số tăng bởi giả thiết f là hàm số giảm ta cũng được kết quả f là hàm hằng.

Bài toán 2.166. *Cho $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ là hàm số tăng và thỏa mãn:*

$$f(2x) = f(x), \forall x \in (0; +\infty).$$

Chứng minh rằng f là hàm hằng.

Giải. Từ giả thiết và bằng quy nạp ta chứng minh được

$$f(x) = f(2^n x), \forall x \in (0; +\infty), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Với $0 < x < y$, ta chọn

$$n = \left[\log_2 \frac{y}{x}\right] \Rightarrow n \le \log_2 \frac{y}{x} < n+1 \Rightarrow 2^n \le \frac{y}{x} < 2^{n+1} \Rightarrow 2^n x \le y < 2^{n+1} x.$$

Vì f là hàm tăng nên

$$f(2^n x) \le f(y) \le f(2^{n+1} x) \Rightarrow f(x) \le f(y) \le f(x) \Rightarrow f(x) = f(y).$$

Vậy f là hàm hằng.

2.5.5 Phương pháp thác triển từ $\mathbb{Q}$ lên $\mathbb{R}$

Nếu hàm f đơn điệu và ta đã có công thức của f trên tập số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ thì dùng kĩ thuật chọn hai dãy hữu tỉ đơn điệu ngược nhau, rồi từ đó chuyển qua giới hạn để kẹp giá trị của $f(x)$ và suy ra công thức của hàm f trên $\mathbb{R}$. Việc xây dựng dãy số hữu tỉ thỏa mãn điều kiện cho trước sẽ được trình bày ở mục 2.7.2 (ở trang 268). Bạn đọc có thể tìm hiểu kĩ thuật xây dựng dãy số hữu tỉ bằng cách đọc mục 2.7.2 ngay bây giờ mà không gặp khó khăn gì về thứ tự kiến thức.

Bài toán 2.167. *Tìm các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, đơn điệu trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

- Trường hợp 1: f là hàm tăng. Tương tự như bài toán 2.214 ở trang 278 ta chứng minh được
$$f(x) = kx, \forall x \in \mathbb{Q}. \quad (2)$$
Với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý, tồn tại hai dãy số hữu tỉ $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho
$$u_n \le x \le v_n, \forall n = 1, 2, \ldots; \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = x.$$
Vì f là hàm tăng nên kết hợp với (2) ta có
$$f(u_n) \le f(x) \le f(v_n) \Rightarrow ku_n \le f(x) \le kv_n (\forall n = 1, 2, \ldots).$$
Cho $n \to +\infty$ trong bất đẳng thức trên ta được
$$kx \le f(x) \le kx \Rightarrow f(x) = kx.$$
Vậy $f(x) = kx, \forall x \in \mathbb{R}$ (k là hằng số bất kì). Thử lại thấy thỏa mãn.
- Trường hợp 2: f là hàm giảm. Tương tự như bài toán 2.214 ở trang 278 ta chứng minh được
$$f(x) = kx, \forall x \in \mathbb{Q}. \quad (2)$$
Với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý, tồn tại hai dãy số hữu tỉ $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho
$$u_n \le x \le v_n, \forall n = 1, 2, \ldots; \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = x.$$
Vì f là hàm giảm nên kết hợp với (2) ta có:
$$f(u_n) \ge f(x) \ge f(v_n) \Rightarrow ku_n \ge f(x) \ge kv_n (\forall n = 1, 2, \ldots).$$
Cho $n \to +\infty$ trong bất đẳng thức trên ta được
$$kx \ge f(x) \ge kx \Rightarrow f(x) = kx.$$
Vậy $f(x) = kx, \forall x \in \mathbb{R}$ (k là hằng số bất kì). Thử lại thấy thỏa mãn.

Kết luận: hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x) = kx, \forall x \in \mathbb{R}$ (k là hằng số bất kì).

Bài toán 2.168. *Tìm tất cả các hàm số $f : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ thỏa mãn:*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in [0; +\infty). \quad (1)$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Từ (1) cho $x = y = 0$, ta được: $f(0) = 0$. Đặt $c = f(1) \geq 0$. Từ (1) cho $x = y$ ta được:

$$f(2x) = f(x + x) = f(x) + f(x) = 2f(x), \forall x \in [0; +\infty).$$

Bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được:

$$f(nx) = nf(x), \forall x \in [0; +\infty), n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Với mọi $n = 1, 2, \ldots$, ta có:

$$c = f(1) = f(n.\frac{1}{n}) \overset{\text{do (2)}}{=} nf\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = c.\frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (3)$$

Giả sử $r \in \mathbb{Q}, r > 0$, khi đó $\exists m, n \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $r = \frac{m}{n}$. Ta có:

$$f(r) = f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m.\frac{1}{n}\right) \overset{\text{do (2)}}{=} mf\left(\frac{1}{n}\right) \overset{\text{do (3)}}{=} \frac{cm}{n} = cr. \quad (4)$$

Từ giả thiết suy ra: $f(x + y) \geq f(x), \forall x, y \in [0; +\infty)$, do đó f là hàm tăng trên $[0; +\infty)$. Với mọi số thực $x > 0$, khi đó tồn tại hai dãy số hữu tỉ dương (α_n), (β_n) sao cho: $\alpha_n \leq x \leq \beta_n$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ và $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = x = \lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n$.

Do (4) và do f tăng trên $[0; +\infty)$ nên:

$$\begin{aligned} &f(\alpha_n) \leq f(x) \leq f(\beta_n), \forall n = 1, 2, \ldots \\ \Rightarrow &c\alpha_n \leq f(x) \leq c\beta_n, \forall n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \quad (5)$$

Từ (5) cho $n \to +\infty$ và sử dụng nguyên lí kẹp ta được:

$$cx \leq f(x) \leq cx, \forall x > 0.$$

Vậy $f(x) = cx, \forall x > 0$. Kết hợp với $f(0) = 0$, ta được:

$$f(x) = cx, \forall x \in [0; +\infty) \text{ (với } c \text{ là hằng số không âm).} \quad (6)$$

Thử lại thấy hàm số xác định bởi (6) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 2.169. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

$$f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Giải. Từ (1), tiến hành tương tự như ở lời giải bài toán 2.214 ở trang 278 ta chứng minh được các kết quả sau:

$$\begin{cases} f(rx) = rf(x), \forall x \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{Q} & (3) \\ f(0) = 0, f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}. & (4) \end{cases}$$

Từ (2) cho $y = x$ ta được $f(x^2) = [f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$.
Từ (2) và (3) ta được: $rf(x) = f(rx) = f(r)f(x), \forall x \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{Q}$. (5)
Dễ thấy $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Xét $f(x) \not\equiv 0$. Khi đó tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Từ (5) cho $x = x_0$, ta được

$$f(r) = r, \forall r \in \mathbb{Q}. \quad (6)$$

Tiếp theo ta chứng minh f là hàm đồng biến. Giả sử $x < y$. Khi đó $y - x > 0$, suy ra $f(y - x) \geq 0$. Sử dụng (1) ta được

$$f(y) = f((y - x) + x) = f(y - x) + f(x) \geq f(x) \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Vậy hàm f đồng biến trên $\mathbb{R}$. Với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta chọn hai dãy số hữu tỉ $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho

$$u_n \leq x \leq v_n, \forall n = 1, 2, \ldots; \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = x.$$

Vì f là hàm tăng nên kết hợp với (6) ta có

$$f(u_n) \leq f(x) \leq f(v_n) \Rightarrow u_n \leq f(x) \leq v_n (\forall n = 1, 2, \ldots).$$

Cho $n \to +\infty$ trong bất đẳng thức trên ta được

$$x \leq f(x) \leq x \Rightarrow f(x) = x.$$

Sau khi thử lại ta kết luận: Có hai hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lưu ý. Kết quả bài toán 2.169 thường được dùng để giải nhiều bài toán khác, chẳng hạn bài toán 2.177 ở trang 226, bài toán 2.178 ở trang 227, bài toán 2.195 ở trang 248.

Bài toán 2.170. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:*

$$f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

$$f(x + 1) = f(x) + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Giải. Từ (1) cho $x = y = 0$, ta được: $f(0) = f(0)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(0) = 1. \end{array}\right.$ Nếu $f(0) = 1$ thì từ (1) cho $y = 0$ thu được: $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$, hàm số này không

thỏa mãn (2), vậy $f(0)=0$. Giả sử $f(k)=k$, với $k\in\mathbb{N}$, khi đó theo (2) suy ra: $f(k+1)=f(k)+1=k+1$. Theo nguyên lí quy nạp suy ra:

$$f(n)=n,\forall n\in\mathbb{N}^*. \tag{3}$$

Từ (2) lấy $x=-1$ ta được: $f(-1)=-1$. Từ (1) lấy $y=-1$ ta được:

$$f(-x)=-f(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Như vậy, với n nguyên âm thì: $f(n)=-f(-n)\overset{\text{do}(3)}{=}-(-n)=n$. Kết hợp với (3) ta được: $f(n)=n,\forall n\in\mathbb{Z}$. Với $n\in\mathbb{Z}^*$, ta có:

$$1=f(1)=f\left(n.\frac{1}{n}\right)\overset{\text{do}(1)}{=}f(n)f\left(\frac{1}{n}\right)\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{n}. \tag{4}$$

Với $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}^*$, sử dụng (1) và (4), ta được:

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=f(m)f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{m}{n}\Rightarrow f(x)=x,\forall x\in\mathbb{Q}. \tag{5}$$

Từ (1) lấy $y=x$ suy ra: $f(x)\geq 0,\forall x\geq 0$. Từ (1) lấy $y=-x$ suy ra:

$$f(x)\leq 0,\forall x\leq 0.$$

Từ (2) suy ra: $f(x)\geq 1,\forall x\geq 1$. Ta có:

$$1=f(1)=f\left(x.\frac{1}{x}\right)\overset{\text{do}(1)}{=}f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)},\forall x\neq 0. \tag{6}$$

Tiếp theo ta chứng minh f là hàm số tăng. Với $x\geq y>0$, ta có:

$$\frac{x}{y}\geq 1\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)\geq 1\Rightarrow f(x)f\left(\frac{1}{y}\right)\geq 1\Rightarrow\frac{f(x)}{f(y)}\geq 1\Rightarrow f(x)\geq f(y).$$

Vậy f là hàm số tăng trên $[0;+\infty)$. Với $x\leq y<0$, ta có:

$$\frac{x}{y}\geq 1\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)\geq 1\Rightarrow f(x)f\left(\frac{1}{y}\right)\geq 1\Rightarrow\frac{f(x)}{f(y)}\geq 1\Rightarrow f(x)\leq f(y).$$

Vậy f là hàm số tăng trên $(-\infty;0]$. Như vậy f là hàm số tăng trên $\mathbb{R}$. Với $x\in\mathbb{R}$ tùy ý, ta chọn hai dãy số hữu tỉ $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty},\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho

$$u_n\leq x\leq v_n,\forall n=1,2,\ldots;\quad\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}v_n=x.$$

Vì f là hàm tăng nên kết hợp với (5) ta có

$$f(u_n)\leq f(x)\leq f(v_n)\Rightarrow u_n\leq f(x)\leq v_n\ (\forall n=1,2,\ldots).$$

Cho $n\to+\infty$ trong bất đẳng thức trên ta được

$$x\leq f(x)\leq x\Rightarrow f(x)=x.$$

Vậy $f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

2.5.6 Đưa về hàm đơn điệu và cộng tính

Có nhiều bài toán mà ở giả thiết chưa có tính đơn điệu, cộng tính. Tuy nhiên từ phương trình hàm đã cho và các giả thiết khác, ta sẽ chứng minh được hàm số đơn điệu và cộng tính, đến đây ta sẽ vận dụng bài toán 2.167 (ở trang 217) để suy ra kết quả.

Bài toán 2.171. *Tìm tất cả các hàm số thỏa mãn $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

- $f(x+y)=f(x)+f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}.$ (1)
- $f(x^{2018})=[f(x)]^{2018},\forall x\in\mathbb{R}.$ (2)

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Từ (2) suy ra:

$$f(x)\geq 0,\forall x\geq 0.$$

Từ (1) lấy $x=y=0$ ta được $f(0)=0$. Với $x>y$, ta có $x-y>0$, suy ra $f(x-y)\geq 0$, do đó: $f(x)=f((x-y)+y)=f(x-y)+f(y)\geq f(y)$. Vậy f là hàm không giảm trên $\mathbb{R}$. Từ đây kết hợp với (1) và sử dụng bài toán 2.167, ở trang 217 suy ra $f(x)=kx,\forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (2) ta được:

$$kx^{2018}=k^{2018}x^{2018},\forall x\in\mathbb{R}.$$

Suy ra: $k=k^{2018}\Leftrightarrow k\left(1-k^{2017}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=0\\k^{2017}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=0\\k=1.\end{array}\right.$ Như vậy:

$$f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Lưu ý. Có thể thay số mũ 2018 bởi số mũ chẵn $2n$, với $n\in\mathbb{N}^*$.

Bài toán 2.172. *Tìm tất cả các hàm số thỏa mãn $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

- $f(x+y)=f(x)+f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}.$ (1)
- $f(x^2)=-[f(x)]^2,\forall x\in\mathbb{R}.$ (2)

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Từ (2) suy ra:

$$f(x)\leq 0,\forall x\geq 0.$$

Từ (1) lấy $x=y=0$ ta được $f(0)=0$. Với $x>y$, ta có $x-y>0$, suy ra $f(x-y)\leq 0$, do đó: $f(x)=f((x-y)+y)=f(x-y)+f(y)\leq f(y)$. Vậy f là hàm giảm trên $\mathbb{R}$. Từ đây kết hợp với (1) và sử dụng bài toán 2.167, ở trang 217 suy ra $f(x)=kx,\forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (2) ta được:

$$kx^2=-k^2x^2,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Suy ra: $k = -k^2 \Leftrightarrow k(1+k) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = -1. \end{array}\right.$ Như vậy:

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R};\ f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Lưu ý. Có thể thay số mũ 2 bởi số mũ chẵn $2n$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài toán 2.173. *Tìm tất cả các hàm số thỏa mãn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

- $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$ (1)
- $f(x^3) = [f(x)]^3, \forall x \in \mathbb{R}.$ (2)

Giải. Từ (1) cho $x = y = 0$ ta được $f(0)$=0. Từ (1) thay y bởi $-x$ và sử dụng $f(0) = 0$ ta được: $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ hay f là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$. Từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{aligned}[f(x)+f(y)]^3 &= [f(x+y)]^3 = f\left((x+y)^3\right) = f\left(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\right) \\ &= \left[f(x^3)\right] + f(3xy(x+y)) + \left[f(y^3)\right] \\ &= \left[f(x^3)\right] + 3f(xy(x+y)) + \left[f(y^3)\right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}[f(x)+f(y)]^3 &= [f(x)]^3 + 3f(x)f(y)[f(x)+f(y)] + [f(y)]^3 \\ &= \left[f(x^3)\right] + 3f(x)f(y)[f(x)+f(y)] + \left[f(y^3)\right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$f(x)f(y)[f(x)+f(y)] = f(xy(x+y)), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Từ (2) lấy $x = 1$, ta được: $f(1) = [f(1)]^3 \Leftrightarrow f(1) \in \{0, 1, -1\}$.

- Trường hợp 1: $f(1) = 0$. Từ (5) cho $y = 1$ ta được:

$$f\left(x^2+x\right) = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Do hàm số $g(x) = x^2 + x, \forall x \in \mathbb{R}$ có tập giá trị là $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$ nên từ (6) suy ra:

$$\begin{aligned} &f(x) = 0, \forall x \in \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right) \\ \Rightarrow &f(x) = 0, \forall x \in [0; +\infty) \\ \Rightarrow &f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \ \left(\text{do } f \text{ là hàm số lẻ trên } \mathbb{R}\right). \end{aligned}$$

Thử lại thấy hàm số $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

- Trường hợp 2: $f(1) = 1$ hoặc $f(1) = -1$. Đặt $f(1) = c$. Từ (5) cho $y = 1$ ta được:

$$\begin{aligned} &f\left(x^2+x\right) = cf(x)[f(x)+c], \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &f\left(x^2\right) + f(x) = c[f(x)]^2 + c^2 f(x), \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &f\left(x^2\right) + f(x) = c[f(x)]^2 + f(x), \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &f\left(x^2\right) = c[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

  - Trường hợp 2*a*: $f\left(x^2\right) = [f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$, tương tự bài toán 2.171 (ở trang 221), ta được: $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.
  - Trường hợp 2*b*: $f\left(x^2\right) = -[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$, sử dụng bài toán 2.172 (ở trang 221), ta được: $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Kết luận: các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R};\ f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R};\ f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lưu ý. Ta đã tính $[f(x)+f(y)]^3$ theo hai cách khác nhau để thu được (5).

Bài toán 2.174. *Tìm tất cả các hàm đơn điệu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+f(y)) = f(x) + 4y, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ và $f(y_1) = f(y_2)$, khi đó với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$f(x+f(y_1)) = f(x+f(y_2)) \Rightarrow f(x) + 4y_1 = f(x) + 4y_2 \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Vậy f là đơn ánh. Trong (1) lấy $y = 0$ ta được

$$f(x+f(0)) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Trong (1) lấy $x = 0$ ta được $f(f(y)) = f(0) + 4y, \forall y \in \mathbb{R}$. Hay

$$f(f(x)) = f(0) + 4x, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta có: $f(f(f(x))) = f(4x), \forall x \in \mathbb{R}$. (4)
Vì f là đơn ánh nên từ (4) ta có $f(f(x)) = 4x, \forall x \in \mathbb{R}$. Trong (1) thay x bởi $f(x)$ và sử dụng (3) ta được

$$f(f(x)+f(y)) = f(f(x))+4y = 4x+f(0)+4y = f(f(x+y)), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Vì f là đơn ánh nên từ (5) ta có $f(x+y) = f(x)+f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Từ đây và do f đơn điệu nên theo bài toán 2.167, ở trang 217 suy ra $f(x) = kx, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó

$$f(x+f(y)) = k(x+f(y)) = k(x+ky) = kx + k^2y,\ f(x) + 4y = kx + 4y.$$

Thay vào (1) suy ra với mọi $y \in \mathbb{R}$ ta có

$$kx + k^2y = kx + 4y \Rightarrow k^2y = 4y \Rightarrow (k^2 - 4)y = 0 \Rightarrow k = \pm 2.$$

Vậy $f(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = -2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.
Lưu ý. Sẽ gọn hơn một chút, nếu để ý rằng từ (2) và do f đơn ánh nên $x + f(0) = x$, suy ra $f(0) = 0$.

Bài toán 2.175 (Italy-2000). *Thực hiện các yêu cầu sau:*
a) Tìm tất cả các hàm đơn điệu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + f(y)) = f(x) + y, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n > 1$, không tồn tại hàm đơn điệu nghiêm ngặt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho: $f(x + f(y)) = f(x) + y^n$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. (i)

Giải.
a) Giả sử $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ và $f(y_1) = f(y_2)$, khi đó với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$f(x + f(y_1)) = f(x + f(y_2)) \Rightarrow f(x) + y_1 = f(x) + y_2 \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Vậy f là đơn ánh. Trong (1) lấy $y = 0$ ta được

$$f(x + f(0)) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Trong (1) lấy $x = 0$ ta được $f(f(y)) = f(0) + y, \forall y \in \mathbb{R}$. Hay

$$f(f(x)) = f(0) + x, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta có: $f(f(f(x))) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. (4)
Vì f là đơn ánh nên từ (4) ta có $f(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. So sánh với (3) ta suy ra $f(0) = 0$. Trong (1) thay x bởi $f(x)$ ta được

$$f(f(x) + f(y)) = f(f(x)) + y = x + y = f(f(x + y)), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Vì f là đơn ánh nên từ (5) ta có $f(x+y) = f(x)+f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Từ đây và do f đơn điệu nên theo bài toán 2.167, ở trang 217 suy ra $f(x) = kx, \forall x \in \mathbb{R}$.
Do đó: $f(x + f(y)) = k(x + f(y)) = k(x + ky) = kx + k^2y$, $f(x) + y = kx + y$.
Thay vào (1) suy ra với mọi $y \in \mathbb{R}$ ta có:

$$kx + k^2y = kx + y \Rightarrow k^2y = y \Rightarrow (k^2 - 1)y = 0 \Rightarrow k = \pm 1.$$

Vậy $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.
b) Giả sử tồn tại hàm đơn điệu nghiêm ngặt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn (i). Do f đơn điệu nghiêm ngặt nên f là đơn ánh. Do đó với $y \neq 0$ thì $f(y) \neq f(-y)$, suy ra

$$f(x + f(y)) \neq f(x + f(-y)) \Rightarrow f(x) + y^n \neq f(x) + (-y)^n \Rightarrow y^n \neq (-y)^n,$$

dẫn tới n là số lẻ. Trong (1) lấy $y = 0$ ta được $f(x + f(0)) = f(x)$, do f là đơn ánh nên $x + f(0) = x \Rightarrow f(0) = 0$. Từ (i) lấy $y = 0$ được

$$f(f(y)) = y^n, \ \forall y \in \mathbb{R}. \quad (ii)$$

Từ (ii) suy ra $[f(y)]^n = f(f(f(y))) = f(y^n)$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Vì thế

$$f(x + y^n) = f(x + f(f(y))) \overset{\text{do } (i)}{=} f(x) + f^n(y) = f(x) + f(y^n), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ đây và do n lẻ nên $f(x+y) = f(x)+f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Mà f đơn điệu nên theo bài toán 2.167, ở trang 217 suy ra $f(x) = kx, \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào (i) được

$$k(x + ky) = kx + y^n, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (4i)$$

Từ (4i) cho $x = 0$ và $y = 1$ ta được $k^2 = 1 \Leftrightarrow k \in \{1, -1\}$. Thử lại thấy cả hai hàm $f(x) \equiv x$ và $f(x) \equiv -x$ đều không thỏa (i). Vậy không tồn tại hàm số nào thỏa mãn các điều kiện đã nói ở câu *b)*.

Bài toán 2.176. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f(|x| + y + f(y + f(y))) = 3y + |f(x)|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) thay x bởi $-x$, ta được:

$$f(|x| + y + f(y + f(y))) = 3y + |f(-x)|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $|f(x)| = |f(-x)| \Rightarrow f(-x) = f(x)$ hoặc $f(-x) = -f(x)$.
Trong (2) cho $x = 0$ ta được: $f(y + f(y + f(y))) = 3y + |f(0)|, \forall y \in \mathbb{R}$. (3)
Giả sử $t \in \mathbb{R}$, khi đó xét: $t = 3y + |f(0)| \Leftrightarrow y = \dfrac{t - |f(0)|}{3}$, như vậy theo (3), tồn tại $y = \dfrac{t - |f(0)|}{3} \in \mathbb{R}$, sao cho $f(y + f(y + f(y))) = t$, vì thế f là toàn ánh. Suy ra tồn tại a sao cho $f(a) = 0$ và như thế $f(-a) = 0$. Lần lượt thay y bởi a và $-a$ vào (3), ta được:

$$0 = f(a + f(a + f(a))) = 3a + |f(0)|,$$
$$0 = f(-a + f(-a + f(-a))) = -3a + |f(0)|.$$

Do đó $a = 0$ và $f(0) = 0$. Hơn nữa: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. (4)
Phương trình hàm (3) trở thành: $f(y + f(y + f(y))) = 3y$, $\forall y \in \mathbb{R}$. (5)
Thay $y = 0$ vào (1) ta được: $f(|x|) = |f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}$.
Từ đây và (4) suy ra rằng nếu $x > 0$ thì $f(x) > 0$. (6)
Bây giờ với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta chọn $y = -\dfrac{|f(x)|}{3}$ thì có:

$$f(|x| + y + f(y + f(y))) = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Do (4) nên (7) $\Leftrightarrow y + f(y + f(y)) = -|x|, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $y + f(y + f(y))$ nhận mọi giá trị không dương. Với mọi $x > 0$, $y < 0$, tồn tại u sao cho $u + f(u + f(u)) = y$. Do đó để ý đến (5) và (6), ta có:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(|x| + u + f(u + f(u))) = 3u + |f(x)| \\ &= 3u + f(x) = f(u + f(u + f(u))) + f(x) = f(x) + f(y). \end{aligned} \quad (8)$$

Từ (8) lấy $x = -y$, ta được: $f(-y) = -f(y)$, nghĩa là f là hàm lẻ. Với $x > 0$ và $y > 0$, ta có:

$$\begin{aligned} f(x+y) - f(x) &= f(x+y) + f(-x) = f(x+y-x) = f(y) \\ &\Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Với $x < 0$ và $y < 0$, ta có:

$$\begin{aligned} f(x+y) - f(x) &= f(x+y) + f(-x) = f(x+y-x) = f(y) \\ &\Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Tổng hợp các kết quả ở trên ta thu được:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Với $x > y$ ta có $x - y > 0$, do đó sử dụng (9) và (6) ta được:

$$f(x) = f((x-y) + y) = f(x-y) + f(y) > f(y).$$

Như vậy f là hàm đồng biến. Sử dụng bài toán 2.167 (ở trang 217), ta được:

$$f(x) = kx, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay vào (5) dẫn đến $k = 1$. Vậy $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

2.5.7 Đưa về hàm cộng tính và nhân tính

Trong mục này ta sẽ xét một số bài toán phương trình hàm được giải bằng cách vận dụng bài toán 2.169 ở trang 218. Tức là chứng minh hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cần tìm có tính chất:

$$\begin{aligned} &f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \\ &f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sau đó sử dụng bài toán 2.169 ở trang 218 suy ra:

$$f(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.177 (Dề nghị thi Olympic 30/04/2009). *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(xy - uv) = f(x)f(y) - f(u)f(v), \ \forall x, y, u, v \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Từ (1) cho $x = y = u = v$ được $f(0) = 0$. Trong (1) cho $u = 0$ ta được

$$f(xy) = f(x)f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Trong (2) cho $x = y = 1$ ta được $f(1) = f^2(1) \Leftrightarrow f(1) \in \{0, 1\}$. Nếu $f(1) = 0$ thì trong (2) cho $y = 1$ ta được $f(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Tiếp theo xét $f(1) = 1$. Trong (1) cho $y = v = 1$ ta được

$$f(x-u) = f(x) - f(u), \ \forall x, u \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Từ (3) suy ra $f(x) = f((x+y) - y) = f(x+y) - f(y)$, do đó

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Từ (4) và (2), sử dụng bài toán 2.169 ở trang 218 ta được $f(x) \equiv 0$ và $f(x) \equiv x$. Sau khi thử lại ta kết luận: Có hai hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.178. *Tìm các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm*

$$f(f(x) + yz) = x + f(y)f(z), \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Đặt $a = f(0)$. Trong (1) cho $x = y = z = 0$ ta được $f(a) = a^2$. Trong (1) cho $x = 0$, $y = a$, $z = 0$ ta được $f(a) = f(a)a = a^3$. Suy ra $a^2 = a^3 \Leftrightarrow a \in \{0, 1\}$. Nếu $a = 1$ thì trong (1) lấy $y = f(x)$, $z = 0$ được

$$f(f(x)) = x + f(f(x)), \ \forall x \in \mathbb{R} \ (\text{vô lí}).$$

Vậy $a = 0$. Từ (1) cho $y = 0$ được

$$f(f(x)) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Từ (1) cho $x = 0$ được

$$f(yz) = f(y)f(z), \ \forall y, z \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Từ (3) cho $z = 1$ ta được $f(y) = f(y)f(1), \ \forall y \in \mathbb{R}$. Do $f(y) = 0, \ \forall y \in \mathbb{R}$ không thỏa mãn (1) nên $f(1) = 1$. Từ (1) cho $z = 1$ được

$$f(f(x) + y) = x + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Từ (4) cho $x = f(z)$ được $f(f(f(z)) + y) = f(z) + f(y), \ \forall z, y \in \mathbb{R}$. Sử dụng (2) dẫn đến

$$f(z+y) = f(z) + f(y), \ \forall z, y \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Từ (5) và (3), sử dụng bài toán 2.169 ở trang 218 ta được $f(x) \equiv 0$ (loại) và $f(x) \equiv x$. Thử lại ta kết luận: Có duy nhất một hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là $f(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.179. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f\left((x+1)f(y)\right)=y\left[f(x)+1\right],\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Từ (1) cho $x=-1$ được $f(0)=y\left[f(-1)+1\right]$, $\forall y\in\mathbb{R}$, suy ra $f(0)=0$ và $f(-1)=-1$. Từ (1) cho $x=0$ được $f\left(f(y)\right)=y$, $\forall y\in\mathbb{R}$, từ đây suy ra f là song ánh. Với $y=-1$ thì

$$f(-x-1)=-[f(x)+1],\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ (2) lấy $x=1$ được $f(-2)=-[f(1)+1]$. Từ (1) thay y bởi $f(1)$ được

$$f(x+1)=f(1)\left[f(x)+1\right],\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Từ (3) lấy $x=-2$ được

$$f(-1)=f(1)\left[f(-2)+1\right]\Rightarrow f(1)\left[f(-2)+1\right]=-1\Rightarrow\left[f(1)\right]^2=1.$$

Nếu $f(1)=-1$ thì $f(1)=f(-1)$, mâu thuẫn với f là song ánh, vậy $f(1)=1$. Kết hợp với (3) được

$$f(x+1)=f(x)+1,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Từ (2) và (4) suy ra $f\left(-(x+1)\right)=-f(x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, hay

$$f(-x)=-f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Ta có

$$\begin{aligned}f(xy)&=f\left(xf(f(y))\right)=f\left([(x-1)+1]f(f(y))\right)\\&=f(y)\left[f(x-1)+1\right]\overset{\text{do (4)}}{=}f(y)\left[f\left([x-1]+1\right)\right]=f(x)f(y).\end{aligned}$$

Vậy ta thu được

$$f(xy)=f(x)f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Với mọi $y\neq 0$, ta có

$$\begin{aligned}f(x+y)&=f\left(\left(\frac{x}{y}+1\right)y\right)\overset{\text{do (6)}}{=}f\left(\left(\frac{x}{y}+1\right)\right)f(y)\overset{\text{do (4)}}{=}\left[f\left(\frac{x}{y}\right)+1\right]f(y)\\&=f\left(\frac{x}{y}\right)f(y)+f(y)\overset{\text{do (6)}}{=}f(x)+f(y).\end{aligned}$$

Từ đây kết hợp với $f(0)=0$ ta được

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{7}$$

Từ (6) và (7), sử dụng bài toán 2.169 ở trang 218 ta được $f(x)\equiv 0$ và $f(x)\equiv x$. Thử lại ta kết luận: Có duy nhất một hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 2.180 (India International Mathematical Olympiad Training Camp 2013). *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f\left(x(1+y)\right)=f(x)\left[1+f(y)\right],\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (1).

$$P(0,y)\Rightarrow f(0)=f(0)\left[1+f(y)\right],\ \forall y\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

- Khi $f(0)\neq 0$, từ (2) suy ra $f(y)=0$, $\forall y\in\mathbb{R}$, thay vào (1) thấy thỏa mãn.
- Khi $f(0)=0$. Dễ thấy hàm số $f(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Tiếp theo giả sử $f(x)\not\equiv 0$, tức là tồn tại $t\in\mathbb{R}$ sao cho $f(t)\neq 0$.

$$\begin{aligned}&P(t,-1)\Rightarrow 0=f(t)\left[1+f(-1)\right]\Rightarrow f(-1)=-1.\\&P(1,x)\Rightarrow f(1+x)=f(1)\left[1+f(x)\right],\ \forall x\in\mathbb{R}. &(3)\\&P(1,1)\Rightarrow f(2)=f(1)\left[1+f(1)\right]=\left[f(1)\right]^2+f(1).\\&P(1,2)\Rightarrow f(3)=f(1)\left[1+f(2)\right]=\left[f(1)\right]^3+\left[f(1)\right]^2+f(1).\\&P(1,3)\Rightarrow f(4)=f(1)\left[1+f(3)\right]=f(1)[1+f(1)+f(1)^2+f(1)^3]. &(4)\\&P(2,1)\Rightarrow f(4)=f(2)[1+f(1)]=f(1)[1+f(1)]^2. &(5)\end{aligned}$$

Đặt $a=f(1)$. Khi đó từ (4) và (5) suy ra:

$$a(1+a+a^2+a^3)=a(1+a)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\1+a+a^2+a^3=(1+a)^2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\1+a+a^2+a^3=1+2a+a^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a^3=a\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=1\\a=-1.\end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $f(1)=0$. Thay vào (3), ta được: $f(x+1)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, hay

$$f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\ \text{(loại)}.$$

Trường hợp 2: $f(1)=-1$. Khi đó: $P(x,1)\Rightarrow f(2x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, hay

$$f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\ \text{(loại)}.$$

Trường hợp 3: $f(1)=1$. Thay vào (3), ta được:

$$f(x+1)=f(x)+1,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Thay (6) vào (1) ta thu được:

$$\begin{aligned}&f\left(x(1+y)\right)=f(x)f(1+y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\&\Leftrightarrow f(xy)=f(x)f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{7}$$

Như vậy:

$$P\left(x,\frac{y}{x}\right)\Rightarrow f(x+y)=f(x)\left[1+f\left(\frac{y}{x}\right)\right],\ \forall x\neq 0,\forall y\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(x).f\left(\frac{y}{x}\right), \forall x \neq 0, \forall y \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Từ (7), ta có:

$$f(x).f\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(x.\frac{y}{x}\right) = f(y) \Rightarrow f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{f(y)}{f(x)}, \forall x \neq 0. \quad (9)$$

Từ (8) và (9) suy ra:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x \neq 0, \forall y \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Do $f(0) = 0$ nên: $f(0+y) = f(0) + f(y), \forall y \in \mathbb{R}$. Kết hợp với (10), ta được:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Từ (11) và (7), sử dụng bài toán 2.169 ở trang 218 ta suy ra: $f(x) \equiv x$.
Thử lại, ta kết luận: các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$f(x) \equiv 0, f(x) \equiv x.$$

2.5.8 Phương trình hàm $f(G(x,y)) = G(y,x)$

Nếu gặp phương trình dạng này thì những việc sau là nên làm.

- Cho $x = y$ để tìm điểm bất động của hàm f.
- Khi biết điểm bất động, kiểm tra xem nghịch đảo của nó có phải là điểm bất động hay không, hoặc tích hai điểm bất động có phải là điểm bất động hay không,... để từ đó rút ra một số kết luận.
- Khi u là điểm bất động, nghĩa là $f(u) = u$, ta thường thay $x = y = u$ vào phương trình hàm để tìm u.

Bài toán 2.181 (Đề thi chính thức Olympic 30/04/2005, Olympic toán quốc tế 1994). *Tìm mọi hàm số $f : (-1;+\infty) \to (-1;+\infty)$ thỏa mãn hai điều kiện sau:*
(1) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x), \forall x, y \in (-1;+\infty)$.
(2) $\frac{f(x)}{x}$ *là hàm số tăng nghiêm ngặt trong các khoảng* $(-1;0)$ *và* $(0;+\infty)$.

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn đề bài. Trong (1) cho $x = y$ ta được

$$f(x + f(x) + xf(x)) = x + f(x) + xf(x), \forall x \in (-1;+\infty). \quad (3)$$

Vậy $x + f(x) + xf(x)$ là điểm bất động của hàm f. Giả sử u là một điểm bất động của f, khi đó $f(u) = u$. Trong (3) lấy $x = u$ (tức là trong (1) lấy $x = y = u$) ta được

$$f(u + f(u) + uf(u)) = u + f(u) + uf(u) \overset{\text{do } f(u)=u}{\Rightarrow} f\left(2u + u^2\right) = 2u + u^2.$$

Trường hợp 1: $u \in (-1;0)$. Khi đó $u^2 + 2u \in (-1;0)$. Nếu $u \neq u^2 + 2u$ thì do $\frac{f(x)}{x}$ là hàm số tăng thực sự trong khoảng (-1;0) nên

$$\frac{f(u)}{u} \neq \frac{f(u^2+2u)}{u^2+2u} \Rightarrow 1 \neq 1.$$

Điều mâu thuẫn này chứng tỏ

$$u = u^2 + 2u \Leftrightarrow u^2 + u = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -1 \\ u = 0. \end{array}\right.$$

Nhưng điều này lại mâu thuẫn với việc ta đang xét $u \in (-1;0)$. Vậy trên $(-1;0)$ hàm f không có điểm bất động.
Trường hợp 2: $u \in (0;+\infty)$. Khi đó $u^2 + 2u \in (0;+\infty)$. Nếu $u \neq u^2 + 2u$ thì do $\frac{f(x)}{x}$ là hàm số tăng thực sự trong khoảng $(0;+\infty)$ nên

$$\frac{f(u)}{u} \neq \frac{f(u^2+2u)}{u^2+2u} \Rightarrow 1 \neq 1.$$

Điều mâu thuẫn này chứng tỏ

$$u = u^2 + 2u \Leftrightarrow u^2 + u = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -1 \\ u = 0 \end{array}\right.$$

Nhưng điều này lại mâu thuẫn với việc ta đang xét $u \in (0;+\infty)$. Vậy trên $(0;+\infty)$ hàm f không có điểm bất động.
Trong (1) lấy $x = y = 0$ ta được $f(f(0)) = f(0)$. Vậy $f(0)$ là điểm bất động của f. Từ kết quả của trường hợp 1 và trường hợp 2 suy ra $f(0) = 0$ và

$$x + f(x) + xf(x) = 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{x}{x+1}$$

Vậy $f(x) = -\frac{x}{x+1}, \forall x \in (-1;+\infty)$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.182 (Olympic Toán Quốc tế-1983). *Tìm tất cả các hàm số*

$$f : (0;+\infty) \to (0;+\infty)$$

thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau
(i) $f(xf(y)) = yf(x), \forall x, y \in (0;+\infty)$.
(ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Giải. Từ (i) cho $x = y$ ta được

$$f(xf(x)) = xf(x), \forall x \in (0;+\infty). \quad (1)$$

Giả sử $a \in (0;+\infty)$ là điểm bất động của hàm f, nghĩa là $f(a) = a$. Ta sẽ chứng minh

$$f(a^n) = a^n, \forall n = 1, 2, ... \quad (2)$$

Hiển nhiên $f(a) = a$. Giả sử $f(a^k) = a^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ Khi đó

$$f(a^{k+1}) = f(a.a^k) = f(af(a^k)) = a^k f(a) = a^k.a = a^{k+1}.$$

Theo nguyên lí quy nạp suy ra (2) đúng. Nếu $a > 1$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$. Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a^n) \overset{\text{do}(2)}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$. Điều này mâu thuẫn với (ii). Bởi vậy $0 < a \leq 1$. Tiếp theo ta có

$$a = f(a) = f(1.f(a)) = af(1) \Rightarrow a(1 - f(1)) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1 (\text{do } a \neq 0)$$

Bởi vậy

$$1 = f(1) = f(a^{-1}.a) = f\left(a^{-1}f(a)\right) = af(a^{-1}) \Rightarrow f(a^{-1}) = a^{-1}$$

Giả sử $f(a^k) = a^k$ $(k = -1, -2, \ldots)$ Khi đó

$$f(a^{k+1}) = f(a.a^k) = f(af(a^k)) = a^k f(a) = a^k.a = a^{k+1}.$$

Vậy theo nguyên lí quy nạp suy ra

$$f(a^{-n}) = a^{-n}, \forall n = 1, 2, ... \quad (3)$$

Nếu $0 < a < 1$ thì $a^{-1} > 1$. Do đó

$$\lim_{n\to+\infty} f(a^{-n}) \overset{\text{do}(3)}{=} \lim_{n\to+\infty} (a^{-1})^n = +\infty$$

Điều này mâu thuẫn với (ii). Bởi vậy chỉ còn khả năng $a = 1$. Kết hợp với (1) ta được kết quả $xf(x) = 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x}$. Vậy $f(x) = \dfrac{1}{x}, \forall x \in (0;+\infty)$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Lưu ý. Bạn đọc hãy so sánh bài toán trên với bài toán 2.312 ở trang 354.

Bài toán 2.183 (Dề chính thức Olympic 30/04/2011). *Tìm tất cả các hàm số* $f : [1;+\infty) \to [1;+\infty)$ *thỏa mãn điều kiện*

$$f(xf(y)) = yf(x), \ \forall x, y \in [1;+\infty). \quad (1)$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Trong (1) cho $x = y = 1$ ta được $f(f(1)) = f(1)$. Trong (1) lấy $y = f(1)$ thì

$$f(x.f(f(1))) = f(1)f(x) \Rightarrow f(xf(1)) = f(1)f(x) \Rightarrow 1.f(x) = f(1)f(x).$$

Vậy $f(1) = 1$. Trong (1) cho $x = 1$ được

$$f(f(y)) = y, \ \forall y \in [1;+\infty). \quad (2)$$

Vì $f : [1;+\infty) \to [1;+\infty)$ nên nếu $f(y) = 1$ thì theo (2) ta có

$$y = f(f(y)) = f(1) = 1 \Rightarrow y = 1.$$

Suy ra $f(y) > 1$ với mọi $y > 1$. Cho $x > y \geq 1$ thì

$$f(x) = f\left(\frac{x}{y}.y\right) = f\left(\frac{x}{y}.f(f(y))\right) = f(y).f\left(\frac{x}{y}\right) > f(y),$$

suy ra hàm f đồng biến trên $[1;+\infty)$. Ta sẽ chứng minh

$$f(x) = x, \forall x \in [1;+\infty).$$

Giả sử có $x_0 \in [1;+\infty)$ sao cho $f(x_0) \neq x_0$. Nếu $f(x_0) > x_0$ thì

$$f(f(x_0)) > f(x_0) \Rightarrow x_0 > f(x_0), \text{ mâu thuẫn với } f(x_0) > x_0.$$

Nếu $f(x_0) < x_0$ thì

$$f(f(x_0)) < f(x_0) \Rightarrow x_0 < f(x_0), \text{ mâu thuẫn với } f(x_0) < x_0.$$

Vậy $f(x) = x, \forall x \in [1;+\infty)$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Lưu ý. Hàm số trong bài toán này không có điểm bất động.

2.5.9 Các bài toán tổng hợp

Bài toán 2.184. *Cho số thực* $b > 1$. *Tìm tất cả các hàm tăng thực sự* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn:* $f(xf(y)) = yf(bx), \forall x, y \in \mathbb{R}$. (1)

Giải. Trước hết thấy rằng hàm số $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Tiếp theo giả sử $f(x) \not\equiv 0$, khi đó tồn tại x_0 sao cho: $f(bx_0) \neq 0$. Ta chứng minh f là đơn ánh. Thật vậy, giả sử có y_1 và y_2 mà $f(y_1) = f(y_2)$, khi đó: $f(x_0 f(y_1)) = f(x_0 f(y_2)) \overset{\text{do}(1)}{=} y_1 f(bx_0) = y_2 f(bx_0) \Rightarrow y_1 = y_2$, suy ra f là đơn ánh. Thay $x = y = 1$ vào (1), ta được: $f(f(1)) = f(b)$. Vì f tăng thực sự nên: $f(1) = b \Rightarrow f(b) > f(1) > 0$. Thay $x = 1$ vào (1), ta được:

$$f(f(y)) = yf(b) \Rightarrow f(1.f(f(y))) = f(yf(b)) \Rightarrow f(y)f(b) = bf(by).$$

Vậy: $f(x)f(b) = bf(bx), \forall x \in \mathbb{R}$. (2)

Ta chứng minh: $f(x) = bx, \forall x \in \mathbb{R}$. Giả sử có x mà $f(x) > bx$. Do f tăng thực sự nên để ý đến (2), ta có:

$$f(f(x)) > f(bx) \Rightarrow xf(b) > f(bx) \Rightarrow bxf(b) > bf(bx)$$

$\Rightarrow bxf(b) > f(x)f(b) \Rightarrow bx > f(x)$ (mâu thuẫn).

Giả sử có x mà $f(x) < bx$. Do f tăng thực sự nên để ý đến (2), ta có:

$$f(f(x)) < f(bx) \Rightarrow xf(b) < f(bx) \Rightarrow bxf(b) < bf(bx)$$
$$\Rightarrow bxf(b) < f(x)f(b) \Rightarrow bx < f(x) \text{ (mâu thuẫn).}$$

Vậy: $f(x) = bx, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.
Kết luận: các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R};\ f(x) = bx, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.185 (Poland Second Round 2010, Day 2). *Tìm tất cả các hàm số đơn điệu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm*

$$f(f(x) - y) + f(x + y) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Kí hiệu $P(u, v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào phương trình hàm (1). Giả sử f không phải là đơn ánh. Khi đó tồn tại hai số a, b sao cho $a > b$ và $f(a) = f(b)$.

$$P(a, x - b) \Rightarrow f(f(a) - x + b) + f(x + a - b) = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$
$$P(b. x - b) \Rightarrow f(f(b) - x + b) + f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) và $f(a) = f(b)$, suy ra

$$f(x + a - b) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Từ (4), tương tự bài toán 2.165 (ở trang 216), suy ra f là hàm hằng, kết hợp với (1) ta được $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Tiếp theo giả sử f là đơn ánh.

$$P(x, -f(y)) \Rightarrow f(f(x) + f(y)) + f(x - f(y)) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
$$P(y, -f(x)) \Rightarrow f(f(x) + f(y)) + f(y - f(x)) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
$$\Rightarrow f(x - f(y)) = f(y - f(x)), \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow x - f(y) = y - f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow x + f(x) = y + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow x + f(x) = a, \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f(x) = a - x, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Thay (5) vào (1), ta được $a - [a - x - y] + a - (x + y) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ hay $a = 0$. Vậy các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(x) = -x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lưu ý. Nếu đề bài yêu cầu f là hàm đơn điệu thực sự thì chỉ có hàm số $f(x) = -x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài toán 2.186. *Cho f là hàm số không giảm trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*
1) $f(1 - x) = 1 - f(x)$, $\forall x \in [0; 1]$.
2) $f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{f(x)}{2}$, $\forall x \in [0; 1]$.
Tính $f\left(\frac{1}{13}\right)$, $f\left(\frac{1}{7}\right)$.

Giải. Từ (2) cho $x = 0$ ta được $f(0) = 0$. Từ (1) cho $x = 0$ ta được $f(1) = 1$.
a) Đặt $y = f\left(\frac{1}{13}\right)$, ta lần lượt có

$$f\left(\frac{4}{13}\right) = \frac{f\left(\frac{12}{13}\right)}{2} = \frac{f\left(1 - \frac{1}{13}\right)}{2} = \frac{f(1) - f\left(\frac{1}{13}\right)}{2} = \frac{1 - y}{2}.$$
$$f\left(\frac{9}{13}\right) = f\left(1 - \frac{4}{13}\right) = f(1) - f\left(\frac{4}{13}\right) = 1 - \frac{1 - y}{2} = \frac{1 + y}{2}.$$

Mặt khác $f\left(\frac{1}{13}\right) = \frac{f\left(\frac{3}{13}\right)}{2} = \frac{f\left(\frac{9}{13}\right)}{4} = \frac{1 + y}{8} \Rightarrow \frac{1 + y}{8} = y \Leftrightarrow y = \frac{1}{7}$.
Vậy $f\left(\frac{1}{13}\right) = \frac{1}{7}$.

b) Ta có $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{f(1)}{2} = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{2}{3}\right) = 1 - f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Mà hàm f không giảm nên suy ra $f(x) = \frac{1}{2}$, $\forall x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$. Từ đây sử dụng (3) ta được

$$f(x) = \frac{1}{4},\ \forall x \in \left[\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right].$$

Mà $\frac{1}{7} \in \left[\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right]$ nên $f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{4}$.

Lưu ý. Vì các phương trình hàm cho trong đề bài sinh bởi phép tịnh tiến, phép đối xứng, phép đồng dạng tỉ số $\frac{1}{3}$. Dễ thấy rằng có chu trình sau:

$$\frac{1}{13} \to 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13} \to \frac{4}{13} \to 1 - \frac{4}{13} = \frac{9}{13} \to \frac{3}{13} \to \frac{1}{13},$$

điều này giải thích vì sao ta có lời giải câu a). Còn đối với câu b), với số $\frac{1}{7}$ thì chuỗi ở trên sẽ không đóng được $\frac{1}{7} \to \frac{6}{7} \to \frac{2}{7} \to \frac{5}{7}$. Vậy để giải câu b) ta phải sử dụng giả thiết hàm f không giảm.

Bài toán 2.187. *Tìm tất cả các hàm số* $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ *thỏa mãn:*

$$f\left(xf(y)\right)f(y)=f(x+y),\ \forall x,y>0. \tag{1}$$

Giải. Giả sử có $y>0$ mà $f(y)>1$. Khi đó chọn $x=\dfrac{y}{f(y)-1}>0$, suy ra: $xf(y)=x+y$. Từ đó, kết hợp với (1), ta được: $f(x+y)f(y)=f(x+y)$, suy ra $f(y)=1$, mâu thuẫn. Vậy với mỗi $y>0$ ta có $0<f(y)\le 1$. Do đó:

$$f(x+y)=f\left(xf(y)\right)f(y)\le f(y),\ \forall x,y>0. \tag{2}$$

Như thế f là hàm số giảm vì với $0<x<y$ thì sử dụng (2) ta được:

$$f(y)=f(y-x+x)\le f(x).$$

- Giả sử có $a>0$ mà $f(a)=1$. Khi đó theo (1), ta có:

$$f(y)=f\left(yf(a)\right)f(a)=f(a+y),\ \forall y>0.$$

Hàm f không tăng và tuần hoàn cộng tính nên tương tự như bài toán 2.165 (ở trang 216) suy ra f là hàm hằng. Thay vào (1) ta được: $f(x)=1,\ \forall x>0$.

- Trường hợp: $0<f(x)<1,\ \forall x>0$. Khi đó với $0<x<y$, ta có:

$$f(y)=f(y-x+x)=f\left((y-x)f(x)\right)f(x)<f(x).$$

Suy ra f là hàm giảm thực sự. Cho $y=1$ vào (1) và đặt $f(1)=a$, ta có:

$$\begin{aligned}&f(xa)a=f(x+1)=f(ax+1+x-ax)=f(ax)f\left((1+x-ax)f(ax)\right)\\&\Rightarrow f\left((1+x-ax)f(ax)\right)=a=f(1)\Rightarrow(1+x-ax)f(ax)=1\\&\Rightarrow f(ax)=\frac{1}{1+x-ax}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{1+\dfrac{x}{a}-x}=\frac{a}{a+x-ax}.\end{aligned}$$

Thử lại thấy hàm số $f(x)=\dfrac{a}{a+(1-a)x},\ \forall x>0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Kết luận: các hàm số cần tìm là:

$$f(x)=1,\ \forall x>0;\ f(x)=\frac{a}{a+(1-a)x},\ \forall x>0.$$

Bài toán 2.188 (Olympic Toán Quốc tế năm 2002). *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn:*

$$[f(x)+f(z)][f(y)+f(t)]=f(xy-zt)+f(xt+yz),\ \forall x,y,z,t\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Từ (1) cho $x=y=z=0$, ta được:

$$2f(0)\left[f(0)+f(t)\right]=2f(0),\ \forall t\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Trong (2) cho $t=0$, ta được: $4[f(0)]^2=2f(0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(0)=0\\f(0)=0,5.\end{array}\right.$

- Xét trường hợp: $f(0)=0,5$. Thay vào (2) ta được: $f(t)=\dfrac{1}{2},\ \forall t\in\mathbb{R}$. Thử lại ta thấy hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2},\ \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.
- Xét trường hợp: $f(0)=0$. Từ (1) cho $z=t=0$ ta được:

$$f(xy)=f(x)f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Thay $x=y=1$ vào (3) ta được: $f(1)=[f(1)]^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(1)=1\\f(1)=0.\end{array}\right.$ Nếu $f(1)=0$ thì từ (3) cho $y=1$ ta được: $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (thỏa mãn). Xét $f(1)=1$. Thay $x=0,\ y=t=1$ vào (1) ta được:

$$2f(z)=f(-z)+f(z)\Rightarrow f(-z)=f(z),\ \forall z\in\mathbb{R}.$$

Như vậy f là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$, do đó ta chỉ cần xét f trên $[0;+\infty)$. Ta có: $f(0)=0^2,\ f(1)=1^2$. Giả sử $f(k-1)=(k-1)^2$ và $f(k)=k^2$, với $k\in\mathbb{N}^*$. Từ (1) cho $y=t=1$, ta được: $2\left[f(x)+f(z)\right]=f(x-z)+f(x+z),\ \forall x,z\in\mathbb{R}$. Từ đây lấy $x=k,\ z=1$, dẫn tới:

$$\begin{aligned}&2\left[f(k)+f(1)\right]=f(k-1)+f(k+1)\\&\Rightarrow 2(k^2+1)=(k-1)^2+f(k+1)\\&\Rightarrow f(k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2.\end{aligned}$$

Theo nguyên lí quy nạp suy ra: $f(n)=n^2,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Với mọi $q\in\mathbb{Q}^+$, giả sử $q=\dfrac{m}{n}$, với $m\in\mathbb{N}^*,\ n\in\mathbb{N}^*$, sử dụng (3) ta được:

$$\begin{aligned}&1=f(1)=f\left(n.\frac{1}{n}\right)=f(n).f\left(\frac{1}{n}\right)\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{n^2}.\\&f(q)=f\left(m.\frac{1}{n}\right)=f(m)f\left(\frac{1}{n}\right)=m^2.\frac{1}{n^2}=\left(\frac{m}{n}\right)^2=q^2.\end{aligned}$$

Vậy $f(q)=q^2,\ \forall q\in\mathbb{Q}^+$. Thay $t=x,\ z=y$ vào (1), ta được:

$$[f(x)+f(y)]^2=f(x^2+y^2),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Từ (1) lấy $y=x,\ t=z$ ta được:

$$[f(x)+f(z)]^2=f\left(x^2-z^2\right)+f(2xz),\ \forall x,z\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Từ (4) và (5), ta có: $f(x^2+z^2)=f\left(x^2-z^2\right)+f(2xz),\ \forall x,z\in\mathbb{R}$. (6)

Từ (4) suy ra với mọi $x\ge 0$, ta có:

$$f(x)=f\left(\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2\right)=\left[f\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)+f\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)\right]^2\ge 0.$$

Do đó: $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$. Với $a > 0$, $h > 0$, chọn $x = \sqrt{a + \frac{h}{2}} > 0$ và $z = \sqrt{\frac{h}{2}} > 0$. Khi đó:

$$f(a+h) - f(a) = f(x^2 + z^2) - f(x^2 - z^2) \overset{\text{do (6)}}{=} f(2xz) \geq 0.$$

Dẫn tới hàm f không giảm trên $[0; +\infty)$. Với mọi $x \geq 0$, tồn tại hai dãy số hữu tỉ (α_n), (β_n) sao cho: $0 \leq \alpha_n \leq x \leq \beta_n$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ và

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = \lim_{n \to +\infty} \beta_n = x.$$

Do f không giảm trên $[0; +\infty)$ nên:

$$\begin{aligned} & f(\alpha_n) \leq f(x) \leq f(\beta_n), \ \forall n = 1, 2, \ldots \\ \Rightarrow & \alpha_n^2 \leq f(x) \leq \beta_n^2, \ \forall n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{7}$$

Từ (7) cho $n \to +\infty$, ta được: $x^2 \leq f(x) \leq x^2 \Rightarrow f(x) = x^2, \forall x \geq 0$. Như vậy $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.
Kết luận: các hàm số cần tìm là:

$$f(x) = \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}; \ f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}; \ f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.189. *Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ thỏa mãn*

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + f(x) + f(y), \forall x, y \in (0; +\infty). \tag{1}$$

Giải. Trong (1) lấy $x = y = 2$ ta được

$$f(4) + [f(2)]^2 = f(4) + 2f(2) \Rightarrow f(2) = 2 \ (\text{do } f(x) > 0, \forall x > 0).$$

Trong (1) cho $x = y = 1$ ta được

$$f(2) + [f(1)]^2 = f(1) + 2f(1) \Rightarrow [f(1)]^2 - 3f(1) + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(1) = 2. \end{array} \right.$$

a) Trường hợp $f(1) = 2$. Trong (1) lấy $y = 1$ ta được

$$f(x+1) + 2f(x) = f(x) + f(x) + 2 \Rightarrow f(x+1) = 2.$$

Vậy $f(x+1) = 2, \forall x > 0$. Hay $f(x) = 2, \forall x > 1$. Còn với $0 < x < 1$ ta chọn $y = \frac{1}{x} > 1$, thay vào (1) ta được

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) + f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) + f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow 2 + 2f(x) = 2 + f(x) + 2 \Rightarrow f(x) = 2.$$

Vậy $f(x) = 2, \forall x > 0$. Thử lại đúng.

b) Trường hợp $f(1) = 1$. Thay $y = 1$ vào (1) ta được

$$f(x+1) + f(x) = f(x) + f(x) + 1 \Rightarrow f(x+1) = f(x) + 1, \ \forall x \in (0; +\infty). \tag{2}$$

Từ (2) bằng phép quy nạp đơn giản ta được $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và

$$f(x+n) = f(x) + n, \forall x \in (0; +\infty), \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Từ (1) lấy $x = n$ và $y = \frac{1}{n}$ ta được

$$f\left(n + \frac{1}{n}\right) + f(n)f\left(\frac{1}{n}\right) = f(1) + f(n) + f\left(\frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đây sử dụng (2) và (3) ta được

$$n + f\left(\frac{1}{n}\right) + nf\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + n + f\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Với mọi số hữu tỉ dương $\frac{m}{n}$, với $m, n \in \mathbb{N}^*$ Thay $x = m, y = \frac{1}{n}$ vào (1) ta được

$$\begin{aligned} & f\left(m + \frac{1}{n}\right) + f(m)f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) + f(m) + f\left(\frac{1}{n}\right) \\ \Rightarrow & m + f\left(\frac{1}{n}\right) + mf\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) + m + f\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}. \end{aligned}$$

Vậy ta đã chứng minh được $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{Q}, x > 0$. Tiếp theo ta chứng minh f đồng biến trên $(0; +\infty)$. Với mọi $x > 1$ ta chọn

$$y = \frac{x}{x-1} > 0 \Rightarrow yx - y = x \Rightarrow x + y = xy \Rightarrow f(x+y) = f(xy).$$

Khi đó (1) trở thành

$$\begin{aligned} & f(x)f\left(\frac{x}{x-1}\right) = f(x) + f\left(\frac{x}{x-1}\right) \Rightarrow f\left(\frac{x}{x-1}\right)[f(x) - 1] = f(x) \\ \Rightarrow & f(x) - 1 > 0 \Rightarrow f(x) > 1 \text{ và } f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{f(x)}{f(x)-1}, \forall x > 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Từ (4) suy ra với mọi $x > 0$, ta có

$$1 + f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(1 + \frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{x+1}{(x+1)-1}\right) = \frac{f(x+1)}{f(x+1)-1} = \frac{f(x)+1}{f(x)}.$$

Vậy

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}, \forall x>0.$$

Do đó: nếu $x>1$ thì $f(x)>1$ và nếu $0<x<1$ thì $0<f(x)<1$.

• Xét $0<x<y<1$. Ta có

$$\begin{aligned}&f(y-x+x)+f(y-x)f(x)=f((y-x)x)+f(y-x)+f(x).\\ \Leftrightarrow &f(y)=f((y-x)x)+f(y-x)+f(x)-f(y-x)f(x)\\ \Leftrightarrow &f(y)=f(x)+f((y-x)x)+f(y-x)[1-f(x)].\end{aligned}$$

Để ý rằng $0<x<1$, do đó $f(x)<1$. Vậy $f(y)>f(x)$. Do đó hàm f đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

• Xét $1<x<y$. Khi đó

$$0<\frac{1}{y}<\frac{1}{x}<1\Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right)<f\left(\frac{1}{x}\right)\Rightarrow\frac{1}{f(y)}<\frac{1}{f(x)}\Rightarrow f(y)>f(x).$$

Vậy hàm f đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$. Do đó f đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Cuối cùng, với mỗi $x>0$ ta chọn hai dãy hữu tỉ $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho:

$$0<u_n\le x\le v_n, \forall n=1,2,\ldots;\ \lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}v_n=x.$$

Khi đó do f đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nên

$$f(u_n)\le f(x)\le f(v_n)\Rightarrow u_n\le f(x)\le v_n, \forall n=1,2,\ldots$$

Cho $n\to+\infty$ ta được $f(x)=x$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Tóm lại: Có hai hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x)=2, \forall x\in(0;+\infty) \text{ và } f(x)=x, \forall x\in(0;+\infty).$$

Lưu ý. Bài toán 2.189 ở trang 238 này có phương trình hàm tương tự như phương trình hàm trong bài toán 2.195 ở trang 248, nhưng có khác tập xác định và tập giá trị, bởi thế lời giải cũng khác.

Bài toán 2.190 (Moldova Team Selection Test 2009). *Tìm tất cả các hàm số $f:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$ thỏa mãn*

$$f(x+y-z)+f\left(2\sqrt{xz}\right)+f\left(2\sqrt{yz}\right)=f(x+y+z). \quad (1)$$

với mọi $x,y,z\in[0;+\infty)$ sao cho $x+y\ge z$.

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Thay $x=y=z=0$ vào (1) ta được: $f(0)=0$. Thay $x=0$ vào (1):

$$f(y-z)+f\left(2\sqrt{yz}\right)=f(y+z), \forall y\ge z\ge 0. \quad (2)$$

Đặt $g(x)=f(\sqrt{x})$. Kết hợp với (2), ta được:

$$g\left((y-z)^2\right)+g(4yz)=g\left((y+z)^2\right), \forall y\ge z\ge 0. \quad (3)$$

Với mọi $a\ge 0$, $b\ge 0$, chọn:

$$y=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}{2},\ z=\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}{2}.$$

Khi đó:

$$y\ge z\ge 0,\ (y-z)^2=a,\ 4yz=b,\ (y+z)^2=a+b.$$

Kết hợp với (3), suy ra:

$$g(a)+g(b)=g(a+b), \forall a,b\ge 0. \quad (4)$$

Do hàm số $g:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$ nên từ (4), sử dụng bài toán 2.168 (ở trang 218), ta thu được:

$$g(x)=cx, \forall x\in[0;+\infty) \text{ (với } c \text{ là hằng số không âm).}$$

Do đó: $f(x)=g(x^2)=cx^2, \forall x\ge 0$. Thử lại thấy hàm số:

$$f(x)=cx^2, \forall x\in[0;+\infty) \text{ (với } c \text{ là hằng số không âm)}$$

thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Lưu ý. Phép chọn

$$y=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}{2},\ z=\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}{2}$$

được tìm ra nhờ xét hệ:

$$\begin{cases}(y-z)^2=a\\ 4yz=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(y-z)^2=a\\ (y+z)^2=a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y-z=\sqrt{a}\\ y+z=\sqrt{a+b}\end{cases}$$

$$\Rightarrow(y;z)=\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}{2};\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}{2}\right).$$

Bài toán 2.191. *Tìm tất cả các hàm số $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn*

$$f(f(x)+y)=xf(1+xy),\ \forall x,y\in(0;+\infty). \quad (1)$$

Giải. Ta chứng minh f là hàm không tăng. Giả sử tồn tại hai số u, v sao cho $0<u<v$ và $f(u)<f(v)$. Đặt $w=\dfrac{vf(v)-uf(u)}{v-u}$. Khi đó

$$w-f(v)=\frac{vf(v)-uf(u)}{v-u}-f(v)=\frac{u[f(v)-f(u)]}{v-u}>0\Rightarrow w>f(v).$$

Vì thế $w > f(v) > f(u)$. Ta có

$$f(w) = f\left(f(u) + [w - f(u)]\right) = uf\left(1 + u\left[w - f(u)\right]\right)$$
$$= uf\left(1 + u\left[\frac{vf(v) - uf(u)}{v - u} - f(u)\right]\right) = uf\left(1 + \frac{uv[f(v) - f(u)}{v - u}\right).$$

Tương tự $f(w) = vf\left(1 + \frac{uv[f(v) - f(u)}{v - u}\right)$. Suy ra

$$vf\left(1 + \frac{uv[f(v) - f(u)}{v - u}\right) = uf\left(1 + \frac{uv[f(v) - f(u)}{v - u}\right) \Rightarrow v = u.$$

Đến đây ta gặp mâu thuẫn, vì thế, với mọi u, v sao cho $0 < u < v$ ta có $f(u) \geq f(v)$, hay f là hàm không tăng trên $(0; +\infty)$. Tiếp theo ta tính $f(1)$. Giả sử $f(1) \neq 1$. Thay $x = 1$ vào (1) được

$$f\left(f(1) + y\right) = f(1 + y),\ \forall y > 0. \tag{2}$$

Từ (2) thay y bởi $y - 1$ ta được

$$f(y) = f\left(y + [f(1) - 1]\right),\ \forall y > 1. \tag{3}$$

Từ (2) thay y bởi $y - f(1)$ ta được

$$f(y) = f\left(y + [1 - f(1)]\right),\ \forall y > f(1). \tag{4}$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$f\left(u + |f(1) - 1|\right) = f(u),\ \forall u > \max\left\{1, f(1)\right\}. \tag{5}$$

Đặt $x_0 = \max\{1, f(1)\}$. Từ (5) và do f là hàm không tăng trên $[x_0; +\infty)$, suy ra f là hàm hằng trên $[x_0; +\infty)$ (tương tự bài toán 2.165 ở trang 216). Tuy nhiên khi đó, với mọi x, y thuộc $[x_0; +\infty)$ ta có vế trái của (1) là $f\left(f(x) + y\right)$ trở thành hằng số, còn vế phải của (1) là $xf(1+xy)$ thì không thể bằng hằng số, mâu thuẫn. Vậy $f(1) = 1$. Với $x > 1$, thay $y = 1 - \frac{1}{x}$ vào (1) được

$$f\left(f(x) + 1 - \frac{1}{x}\right) = xf(x),\ \forall x > 1. \tag{6}$$

Nếu $f(x) > \frac{1}{x}$ thì $f(x) + 1 - \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow f\left(f(x) + 1 - \frac{1}{x}\right) \leq f(1) = 1$, điều này mâu thuẫn với vế phải của (6) là $xf(x) > 1$. Tương tự, nếu $f(x) < \frac{1}{x}$ thì cũng dẫn đến mâu thuẫn. Vậy

$$f(x) = \frac{1}{x},\ \forall x > 1. \tag{7}$$

Từ (1) cho $y = 1$ được

$$f\left(f(x) + 1\right) = xf(1 + x),\ \forall x \in (0; +\infty)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{f(x) + 1} = \frac{x}{1 + x},\ \forall x > 0 \text{ (do (7))}$$
$$\Rightarrow f(x) + 1 = 1 + \frac{1}{x},\ \forall x > 0$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x},\ \forall x > 0.$$

Vậy $f(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x > 0$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.192. *Tìm tất cả các hàm số đơn điệu $f : [0 : +\infty) \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$[f(x) + f(y)]^2 = f(x^2 - y^2) + f(2xy),\ \forall x \geq y \geq 0. \tag{1}$$

Giải. Từ (1) cho $x = y = 0$ được $4f^2(0) = 2f(0) \Leftrightarrow f(0) \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$.

a) Trường hợp $f(0) = \frac{1}{2}$. Từ (1) cho $x = 1$, $y = 0$ được

$$\left[f(1) + \frac{1}{2}\right]^2 = f(1) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(1) \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}.$$

Xét $f(1) = -\frac{1}{2}$. Từ (1) lấy $x = y = 1$ được $1 = \frac{1}{2} + f(2) \Leftrightarrow f(2) = \frac{1}{2}$. Khi đó ta thấy $f(0) > f(1)$, $f(1) < f(2)$, điều này mâu thuẫn với giả thiết hàm f đơn điệu. Vậy $f(1) = \frac{1}{2}$. Từ (1) cho $x = y$ thu được

$$4f^2(x) = \frac{1}{2} + f(2x^2),\ \forall x \geq 0. \tag{2}$$

Xét dãy số (x_n) như sau: $x_1 = 1$ và $x_{n+1} = 2x_n^2$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ Từ (2) suy ra

$$4f^2(x_n) = \frac{1}{2} + f(x_{n+1}),\ \forall n = 1, 2, \ldots$$

Từ đây, bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được

$$f(x_n) = \frac{1}{2},\ \forall n = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Dễ dàng chứng minh dãy (x_n) tăng nghiêm ngặt và không bị chặn trên, do đó $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$. Do f đơn điệu nên từ (3) và từ dãy (x_n) tăng nghiêm

ngặt đến $+\infty$ suy ra $f(x) = \dfrac{1}{2}$, $\forall x \geq 0$.

b) Trường hợp $f(0) = 0$. Từ (1) cho $y = 0$ ta thu được

$$f^2(x) = f(x^2),\ \forall x \geq 0.$$

Suy ra $f(x) \geq 0$, $\forall x \geq 0$. Ngoài ra từ (1) cho $x = y$ được

$$4f^2(x) = f(2x^2),\ \forall x \geq 0.$$

Bởi thế

$$4f(x) = f(2x),\ \forall x \geq 0. \tag{4}$$

Với mọi u, v sao cho $u \geq v \geq 0$, đặt $x = u + v$, $y = u - v$, khi đó $x \geq y \geq 0$, cho nên theo (1) và (4) suy ra

$$\begin{aligned}[f(u+v) + f(u-v)]^2 &= f(4uv) + f\left(2(u^2 - v^2)\right) \\ &= 4\left[f(2uv) + f(u^2 - v^2)\right] = 4[f(u) + f(v)]^2.\end{aligned}$$

Từ đó và do $f(x) \geq 0$, $\forall x \geq 0$ nên suy ra

$$f(u+v) + f(u-v) = 2\left[f(u) + f(v)\right],\ \forall u \geq v \geq 0.$$

Hay

$$f(x+y) + f(x-y) = 2\left[f(x) + f(y)\right],\ \forall x \geq y \geq 0. \tag{5}$$

Trong (5) lấy $x = y$, được $f(2x) = 4f(x), \forall x \geq 0$. Từ (5) lấy $x = 2y$, được

$$\begin{aligned}&f(3y) + f(y) = 2\left[f(2y) + f(y)\right], \forall y \geq 0 \\ \Leftrightarrow &f(3y) + f(y) = 2\left[4f(y) + f(y)\right], \forall y \geq 0 \\ \Leftrightarrow &f(3y) = 9f(y), \forall y \geq 0 \\ \Leftrightarrow &f(3x) = 9f(x), \forall x \geq 0.\end{aligned}$$

Giả sử $f((n-1)x) = (n-1)^2 f(x), \forall x \geq 0$ và $f(nx) = n^2 f(x), \forall x \geq 0$ (với $n = 2, 3, \ldots$). Khi đó

$$\begin{aligned}f((n+1)x) &= f(nx + x) = -f(nx - x) + 2\left[f(nx) + f(x)\right] \\ &= -(n-1)^2 f(x) + 2\left[n^2 f(x) + f(x)\right] \\ &= (-n^2 + 2n - 1 + 2n^2 + 2) f(x) = (n+1)^2 f(x), \forall x \geq 0.\end{aligned}$$

Theo nguyên lí quy nạp toán học suy ra

$$f(nx) = n^2 f(x), \forall x \geq 0, \forall n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Trong (6) lấy $x = 1$, ta được $f(n) = n^2 f(1)$. Suy ra

$$f(1) = f\left(n.\frac{1}{n}\right) = n^2 f\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{f(1)}{n^2}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Lấy $x = \dfrac{m}{n}, \forall m, n = 1, 2, \ldots$, ta được

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m.\frac{1}{n}\right) = m^2 f\left(\frac{1}{n}\right) = m^2 \frac{f(1)}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 f(1).$$

Vậy $f(r) = ar^2, \forall r \in \mathbb{Q}, r > 0$ (với $a = f(1)$). Với $x > 0$ tùy ý, ta chọn hai dãy số hữu tỉ $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho

$$0 \leq u_n \leq x \leq v_n, \forall n = 1, 2, \ldots; \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = x.$$

Nếu f là hàm đơn điệu tăng thì

$$f(u_n) \leq f(x) \leq f(v_n) \Rightarrow au_n \leq f(x) \leq av_n\ (\forall n = 1, 2, \ldots)$$

Cho $n \to +\infty$ trong bất đẳng thức trên ta được $ax \leq f(x) \leq ax \Rightarrow f(x) = ax$.
Nếu f là hàm đơn điệu giảm thì

$$f(u_n) \geq f(x) \geq f(v_n) \Rightarrow au_n \geq f(x) \geq av_n\ (\forall n = 1, 2, \ldots)$$

Cho $n \to +\infty$ trong bất đẳng thức trên ta được $ax \geq f(x) \geq ax \Rightarrow f(x) = ax$.
Vậy $f(x) = ax, \forall x > 0$, kết hợp với $f(0) = 0$ suy ra $f(x) = ax, \forall x \geq 0$. Từ (1) lấy $x = 1$ và $y = 0$ được $f^2(1) = f(1) \Leftrightarrow f(1) \in \{0, 1\}$. Vậy $a = 0$, $a = 1$.
Sau khi thử lại ta kết luận: Tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x) = 0,\ \forall x \geq 0;\ f(x) = \frac{1}{2},\ \forall x \geq 0;\ f(x) = x^2,\ \forall x \geq 0.$$

Lưu ý. Bài toán trên xuất phát từ một hằng đẳng thức quen thuộc

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2,$$

hằng đẳng thức này liên quan mật thiết đến việc giải phương trình nghiệm nguyên $A^2 + B^2 = C^2$. Điểm mấu chốt của lời giải ở trên chính là tính chất $f^2(x) = f(x^2)$, $\forall x \geq 0$ để suy ra $f(x) \geq 0$, $\forall x \geq 0$.

Bài toán 2.193. *Tìm các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(4x) - f(3x) = 2x,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow [f(4x) - 2.(4x)] = f(3x) - 2.(3x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Đặt $g(x) = f(x) - 2x$. Thay vào (2) được

$$g(3x) = g(4x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Từ (3) thay x bởi $\frac{x}{3}$ ta được

$$g(x) = g\left(\frac{4}{3}x\right),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Với $x > 0$, đặt $x = \left(\frac{4}{3}\right)^u$, hay $u = \log_{\frac{4}{3}} x$, thay vào (4) ta được

$$g\left(\left(\frac{4}{3}\right)^u\right) = g\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{u+1}\right),\ \forall u \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow h(u) = h(u+1),\ \forall u \in \mathbb{R}\left(\text{với } h(u) = g\left(\left(\frac{4}{3}\right)^u\right)\right). \tag{5}$$

Vậy với $x > 0$ thì $f(x) = 2x + g(x) = 2x + h\left(\log_{\frac{4}{3}} x\right)$. Tương tự, ta thu được

$$f(x) = \begin{cases} 2x + h\left(\log_{\frac{4}{3}} x\right) & \text{khi } x > 0 \\ c & \text{khi } x = 0 \\ 2x + k\left(\log_{\frac{4}{3}}(-x)\right) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

với c là hằng số tùy ý, h và k là những hàm số tuần hoàn cộng tính chu kì 1 trên $\mathbb{R}$, tùy ý. Ta sẽ chứng minh rằng h là hàm hằng trên $[0;1)$, từ đây sử dụng $h(u) = h(u+1)$, $\forall u \in \mathbb{R}$ suy ra h là hàm hằng trên $\mathbb{R}$.

• Xét trường hợp f là hàm tăng. Giả sử tồn tại $a, b \in [0;1)$, $a \neq b$ sao cho $h(a) - h(b) = \varepsilon > 0$. Xét hai dãy số (x_n), (y_n) như sau:

$$\log_{\frac{4}{3}} x_n = a - n,\ \log_{\frac{4}{3}} y_n = b - n \text{ hay } x_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{a-n},\ y_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{b-n}.$$

Khi đó $x_n > 0$, $y_n > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$. Ta có

$$f(x_n) = 2x_n + h\left(\log_{\frac{4}{3}} x_n\right) = 2x_n + h(a-n) = 2x_n + h(a).$$

Tương tự: $f(y_n) = 2y_n + h(b)$. Do $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$ nên tồn tại n_0 đủ lớn sao cho $x_k < \frac{\varepsilon}{2}, y_k < \frac{\varepsilon}{2}$ với mọi $k > n_0$. Bây giờ cố định $m > n_0$, do $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ suy ra có $n > n_0$ đủ lớn sao cho $x_n < y_m$, khi đó rõ ràng

$$x_n - y_m > 0 - \frac{\varepsilon}{2} = -\frac{\varepsilon}{2}.$$

Lúc này:

$$f(x_n) - f(y_m) = 2(x_n - y_m) + h(a) - h(b) > -\varepsilon + \varepsilon = 0 \Rightarrow f(x_n) > f(y_m),$$

điều này mâu thuẫn với tính tăng của hàm f. Do đó h là hàm hằng trên $[0;1)$.

• Xét trường hợp f là hàm giảm. Ta cũng xây dựng hai dãy số như trên. Do $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$ nên tồn tại n_0 đủ lớn sao cho $x_k < \frac{\varepsilon}{2}, y_k < \frac{\varepsilon}{2}$ với mọi $k > n_0$. Bây giờ cố định $m > n_0$, do $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$ suy ra có $n > n_0$ đủ lớn sao cho $y_n < x_m$, khi đó rõ ràng $x_m - y_n > 0 - \frac{\varepsilon}{2} = -\frac{\varepsilon}{2}$. Lúc này:

$$f(x_m) - f(y_n) = 2(x_m - y_n) + h(a) - h(b) > -\varepsilon + \varepsilon = 0 \Rightarrow f(x_m) > f(y_n),$$

điều này mâu thuẫn với tính giảm của hàm f. Vậy h là hàm hằng trên $[0;1)$. Tóm lại h là hàm hằng trên $\mathbb{R}$. Tương tự, ta cũng chứng minh được k là hàm hằng trên $\mathbb{R}$. Do đó $f(x) = 2x + c$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (c là hằng số tùy ý). Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.194 (Iran Team Selection Test 2013). *Tìm tất cả các hàm số $f, g : (0;+\infty) \to (0;+\infty)$, với f là hàm số tăng nghiêm ngặt và thỏa mãn đồng thời các phương trình hàm sau:*

$$f(f(x) + 2g(x) + 3f(y)) = g(x) + 2f(x) + 3g(y),\ \forall x, y > 0 \tag{1}$$

$$g(f(x) + y + g(y)) = 2x - g(x) + f(y) + y,\ \forall x, y > 0. \tag{2}$$

Giải. Đặt $h(x) = f(x) + x$. Ta sẽ chứng minh h là đơn ánh. Giả sử $x_1 > 0$ và $x_2 > 0$ sao cho $h(x_1) = h(x_2)$. Khi đó $f(x_1) + x_1 = f(x_2) + x_2$, suy ra $x_1 = x_2$, vì nếu $x_1 > x_2$ thì do f là hàm tăng nghiêm ngặt nên

$$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) + x_1 > f(x_2) + x_2$$

đến đây ta gặp mâu thuẫn, tương tự nếu $x_1 < x_2$ thì cũng dẫn đến mâu thuẫn. Từ (1), ta có

$$\begin{aligned} &h(f(x) + 2g(x) + 3f(y)) - [f(x) + 2g(x) + 3f(y)] \\ =&g(x) + 2f(x) + 3g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Hay

$$h(f(x) + 2g(x) + 3f(y)) = 3f(x) + 3g(x) + 3f(y) + 3g(y),\ \forall x, y > 0. \tag{3}$$

Trong (3) thay x bởi y và thay y bởi x, ta được

$$h(f(y) + 2g(y) + 3f(x)) = 3f(x) + 3g(x) + 3f(y) + 3g(y),\ \forall x, y > 0. \tag{4}$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$h(f(x) + 2g(x) + 3f(y)) = h(f(y) + 2g(y) + 3f(x)),\ \forall x, y > 0. \tag{5}$$

Mà h là đơn ánh nên từ (5) ta có

$$\begin{aligned} &f(x)+2g(x)+3f(y)=f(y)+2g(y)+3f(x),\ \forall x,y>0\\ \Leftrightarrow &f(x)-g(x)=f(y)-g(y),\ \forall x,y>0\\ \Rightarrow &f(x)-g(x)=c,\ \forall x>0. \end{aligned} \tag{6}$$

Từ (2) cho $x=y$, ta được

$$\begin{aligned} &g\left(f(x)+x+g(x)\right)=2x-g(x)+f(x)+x,\ \forall x>0\\ \Leftrightarrow &g\left(f(x)+x+g(x)\right)=3x-g(x)+f(x),\ \forall x>0\\ \Rightarrow &g\left(2g(x)+x+c\right)=3x-c,\ \forall x>0. \end{aligned} \tag{7}$$

Từ (7) suy ra hàm g nhận mọi giá trị lớn hơn c, do đó hàm f nhận mọi giá trị lớn hơn $2c$ và $c\geq 0$. Thay (6) vào (1), ta được

$$\begin{aligned} &f\left(f(x)+2f(x)-2c+3f(y)\right)=f(x)-c+2f(x)+3f(y)-3c\\ \Rightarrow &f(3f(x)+3f(y)-2c)=3f(x)+3f(y)-4c,\ \forall x,y>0.\\ \Rightarrow &f(x)=x-2c,\forall x>10c\\ \Rightarrow &g(x)=x-3c,\forall x>10c. \end{aligned} \tag{8}$$

Do (8) nên với $x>10c$, ta có

$$\begin{aligned} &2g(x)+x+c=2(x-3c)+x+c=3x-5c>10c\\ \Rightarrow &g\left(2g(x)+x+c\right)=3x-5c-3c=3x-8c. \end{aligned}$$

Vậy thay (8) vào (7), ta được $c=0$. Do đó $f(x)=g(x)=x,\forall x>0$. Thử lại thấy $f(x)=x,\ \forall x>0$ và $g(x)=x,\ \forall x>0$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 2.195. *Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm*

$$f(x-y)+f(xy)=f(x)-f(y)+f(x)f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Trong (1) cho $x=y=0$ ta được $2f(0)=[f(0)]^2\Leftrightarrow f(0)\in\{0,2\}$.

Trường hợp 1: $f(0)=0$. Thay $x=0$ vào (1) ta thu được

$$f(-y)=-f(y),\ \forall y\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Trong (1) thay y bởi $-y$ và để ý đến (2) được

$$f(x+y)-f(xy)=f(x)+f(y)-f(x)f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Cộng (3) và (1) theo vế ta được

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Từ (4) cho $x=y$ và lưu ý đến $f(0)=0$ ta được $f(2x)=2f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Bởi thế (4) trở thành

$$f(x+y)+f(x-y)=f(2x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Đặt $u=x+y$, $v=x-y$, thay vào (5) được

$$\begin{aligned} &f(u)+f(v)=f(u+v),\ \forall u,v\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow &f(x)+f(y)=f(x+y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6}$$

Từ (6) và (3) cho ta

$$f(xy)=f(x)f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{7}$$

Từ (7) và (6), sử dụng bài toán 2.169 ở trang 218 ta được $f(x)\equiv 0$ và $f(x)\equiv x$. Thử lại thấy thỏa mãn $f(0)=0$ và thỏa mãn (1).

Trường hợp 2: $f(0)=2$. Thay $x=0$ vào (1) ta được

$$f(-y)+2=2-f(y)+2f(y),\forall y\in\mathbb{R}.$$

Hay $f(-y)=f(y),\forall y\in\mathbb{R}$. Trong (1) thay y bởi $-y$ và lưu ý $f(-y)=f(y)$ ta được

$$f(x+y)+f(xy)=f(x)-f(y)+f(x)f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{8}$$

Từ (8) và (1) suy ra

$$f(x+y)=f(x-y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{9}$$

Từ (9) cho $x=y$ dẫn đến $f(2x)=2,\ \forall x\in\mathbb{R}$, hay $f(x)=2,\ \forall x\in\mathbb{R}$, thế vào (1) thấy thỏa mãn.

Vậy có ba hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x)\equiv 0,\ f(x)\equiv 2,\ f(x)\equiv x.$$

Lưu ý. Bài toán 2.195 ở trang 248 này có phương trình hàm na ná như phương trình hàm trong bài toán 2.189 ở trang 238, nhưng có khác tập xác định và tập giá trị, bởi thế lời giải cũng khác.

Bài toán 2.196 (Belarus - 1997). *Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm*

$$f(x+y)+f(x)f(y)=f(x)+f(y)+f(xy),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Nếu f là hàm hằng thì từ (1) ta được $f(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv 2$. Tiếp theo giả sử f không phải là hàm hằng. Thay $y=0$ vào (1) được

$$f(x)f(0)=2f(0),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Do đang xét f không phải là hàm hằng nên tồn tại $x_0\in\mathbb{R}: f(x_0)\neq 2$. Trong (2) lấy $x=x_0$ ta được $f(0)=0$. Ta sẽ tính $f(x+2)$ bằng hai cách. Trong (1) cho $y=1$ ta được

$$f(x+1)+f(x)f(1)=f(x)+f(1)+f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x+1) = [2 - f(1)]\, f(x) + f(1),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Từ (3) cho $x = 1$ ta được $f(2) = [2 - f(1)]\, f(1) + f(1) = [3 - f(1)]\, f(1)$. Trong (3) thay x bởi $x+1$ và sử dụng (3) ta được

$$\begin{aligned} f(x+2) &= [2 - f(1)]\, [(2 - f(1))f(x) + f(1)] + f(1) \\ &= [2 - f(1)]^2 f(x) + f(2),\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4}$$

Trong (1) cho $y = 2$ được

$$\begin{aligned} &f(x+2) + f(x)f(2) = f(x) + f(2) + f(2x),\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &f(x+2) = [1 - f(2)]\, f(x) + f(2x) + f(2),\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5}$$

Từ (4) và (5) suy ra

$$\begin{aligned} &[2 - f(1)]^2 f(x) + f(2) = [1 - f(2)]\, f(x) + f(2x) + f(2),\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &f(2x) = [3 - f(1)]\, f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6}$$

Vậy $f(2x) = af(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$, với $a = [3 - f(1)]$ là hằng số khác 0 (vì nếu $a = 0$ thì f là hàm hằng). Từ đây ta được

$$f(4x) = a^2 f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Trong (1) thay x bởi $2x$, thay y bởi $2y$ và sử dụng các kết quả trên ta được

$$af(x+y) + a^2 f(x)f(y) = af(x) + af(y) + a^2 f(xy),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Nhân hai vế của (1) với a^2 dẫn đến

$$a^2 f(x+y) + a^2 f(x)f(y) = a^2 f(x) + a^2 f(y) + a^2 f(xy),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Từ (8) và (9) suy ra

$$\begin{aligned} &f(x+y) + af(x) + af(y) = af(x+y) + f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &(a-1)\, f(x+y) = (a-1)\, [f(x) + f(y)],\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

Nếu $a = 1$ thì $f(1) = 2$, thay vào (3) được $f(x+1) = 2,\ \forall x \in \mathbb{R}$, hay $f(x) \equiv 2$, không rơi vào trường hợp ta đang xét, vậy $a \neq 1$. Do đó từ (10) suy ra

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Kết hợp (11) với (1) ta được

$$f(xy) = f(x)f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Từ (11) và (12), sử dụng bài toán 2.169 ở trang 218 ta được $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại đúng. Vậy có ba hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x) \equiv x,\ f(x) \equiv 0,\ f(x) \equiv 2.$$

Bài toán 2.197. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm*

$$f(x+y) + f(xy) = f(x) + f(y) + f(x)f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải.
Cách 1. Phương trình hàm (1) là tổng của hai phương trình hàm hàm

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

$$f(xy) = f(x)f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Ta biết rằng nếu có (2) và (3) thì theo bài toán 2.169 ở trang 218 ta có kết quả $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy ta chỉ cần chứng minh (1) suy ra (2) và (3) là xong. Để tách được các phương trình hàm trong (1) ta cần quan tâm đến tính chẵn, lẻ của hàm f. Chẳng hạn nếu f là hàm lẻ thì từ (1) thay y bởi $-y$ ta được

$$f(x-y) - f(xy) = f(x) - f(y) - f(x)f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Cộng (1) và (4) thu được

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Từ (1) cho $x = y = 0$ được $f(0) = 0$. Từ (5) cho $y = x$ ta được

$$f(2x) = 2f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ (5), đặt $u = x + y$, $v = x - y$ ta được

$$\begin{aligned} &f(u) + f(v) = 2f\left(\frac{u+v}{2}\right),\ \forall u, v \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &f(2u) + f(2v) = 2f(u+v),\ \forall u, v \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow &f(u) + f(v) = f(u+v),\ \forall u, v \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow &f(x) + f(y) = f(x+y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy từ (1) ta suy ra được (2) nếu f là hàm lẻ. Kết hợp (1) và (2) ta có (3). Bây giờ chứng minh f là hàm lẻ. Một cách tự nhiên, từ (1) cho $y = -1$ ta được

$$f(x-1) + f(-x) = f(x) + f(-1) + f(x)f(-1),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Ta cần tìm $f(-1)$. Từ (1) cho $y = 1$ ta được

$$\begin{aligned} &f(x+1) + f(x) = f(x) + f(1) + f(x)f(1),\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow &f(x+1) = f(1)f(x) + f(1),\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6}$$

Đặt $f(1) = a$. Khi đó từ (2) suy ra

$$f(2) = a^2 + a,\ f(3) = a^3 + a^2 + a,\ f(4) = a^4 + a^3 + a^2 + a.$$

Từ (1) cho $x = y = 2$ ta được

$$2f(4) = 2f(2) + f^2(2) \Rightarrow 2\left(a^4 + a^3 + a^2 + a\right) = 2\left(a^2 + a\right) + \left(a^2 + a\right)^2$$
$$\Rightarrow 2\left(a^4 + a^3 + a^2 + a\right) = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a \Rightarrow a^4 = a^2 \Rightarrow a \in \{0, -1, 1\}.$$

- Nếu $a = 0$ thì từ (6) suy ra $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, thử lại thấy thỏa mãn.
- Nếu $a = -1$ thì từ (6) ta có

$$f(x+1) = -f(x) - 1, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Từ (7) cho $x = -1$ ta được $f(-1) = -1$. Thay vào (5) dẫn đến

$$f(x-1) + f(-x) = f(x) - 1 - f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f(x-1) + f(-x) = -1, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Trong (7) thay x bởi $-x$ ta được

$$f(1-x) = -f(-x) - 1, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Từ (9) và (8) suy ra $f(x-1) = f(1-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, hay $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, vậy f là hàm chẵn. Do đó từ (1) thay y bởi $-y$ ta được

$$f(x-y) + f(xy) = f(x) + f(y) + f(x)f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Từ (1) và (10) suy ra $f(x-y) = f(x+y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Từ đây lấy $y = x$ được $f(2x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, hay f là hàm hằng, điều này mâu thuẫn với $f(0) = 0$ và $f(-1) = -1$. Vậy trường hợp $a = -1$ không xảy ra.

- Nếu $a = 1$ thì từ (6) ta có

$$f(x+1) = f(x) + 1, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Từ (11) cho $x = -1$ ta được $f(-1) = -1$. Thế vào (5) dẫn đến

$$f(x-1) + f(-x) = -1, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Từ (6) thay x bởi $-x$ được

$$f(1-x) = f(-x) + 1, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Từ (12) và (13) suy ra $f(x-1) = -f(1-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, hay

$$f(-x) = -f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy f là hàm lẻ. Theo lí luận ban đầu ta có (2) và (3). Vậy sử dụng bài toán 2.169 ở trang 218 ta được $f(x) \equiv x$. Sau khi thử lại ta kết luận: Có hai hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Cách 2. Nếu f là hàm hằng thì từ (1) suy ra $f(x) \equiv 0$. Tiếp theo giả sử f không phải là hàm hằng và $f(x) \not\equiv 0$. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow f(xy) = f(x)f(y) + f(x) + f(y) - f(x+y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Trong (2) lấy $x = 0$, $y = 0$ được $f(0) = 0$. Trong (1) lấy $y = 1$ được

$$f(x) = f(x)f(1) + f(x) + f(1) - f(x+1), \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f(1)\left[f(x) + 1\right] = f(x+1), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Nếu $f(1) = 0$ thì từ (3) suy ra $f(x+1) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, hay f là hàm hằng, vô lí. Vậy $f(1) \neq 0$. Trong (3) cho $x = -1$ được $f(1)\left[f(-1) + 1\right] = 0 \Leftrightarrow f(-1) = -1$. Trong (2) cho $x = y = -1$ được $f(1) = f^2(-1) + 2f(-1) - f(-2) = -1 - f(-2)$. Trong (3) cho $x = -2$ được

$$f(1)\left[f(-2) + 1\right] = -1 \Rightarrow -f^2(1) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(1) = -1. \end{array}\right.$$

Nếu $f(1) = -1$ thì từ (2) cho $y = -1$ được

$$f(-x) = -f(x) + f(x) - 1 - f(x-1), \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f(-x) = -\left[1 + f(x-1)\right] = f(1)\left[1 + f(x-1)\right] \overset{\text{do (3)}}{=} f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Trong (2), lấy $y = x$ được

$$f(x^2) = f^2(x) + 2f(x) - f(2x) \Leftrightarrow f^2(x) = f(x^2) - 2f(x) + f(2x). \tag{4}$$

Trong (1) lấy $y = -x$, ta được

$$f(-x^2) = f(x)f(-x) + f(x) + f(-x) \Rightarrow f(x^2) = f^2(x) + 2f(x).$$

Kết hợp với (4) suy ra

$$f(x^2) = f(x^2) - 2f(x) + f(2x) + 2f(x) \Rightarrow f(2x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đó $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, hay f là hàm hằng, vô lí. Vậy ta phải có $f(1) = 1$. Kết hợp với (3) được

$$f(x) + 1 = f(x+1), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Từ (5) bằng phép quy nạp toán học, ta chứng minh được

$$f(a) = a, \ \forall a \in \mathbb{Z}; \ f(x+a) = f(x) + f(a), \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{Z}.$$

Với mọi $a \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$f(a.x) = f(a)f(x) + f(a) + f(x) - f(a+x) = af(x).$$

Suy ra $f(-x) = -f(x)$ và $f(2x) = 2f(x)$. Vì vậy, với mọi $x \in \mathbb{Q}$, tồn tại $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$ sao cho $x = \dfrac{p}{q}$ và

$$qf(x) = f(qx) = f(p) = p \Rightarrow f(x) = \frac{p}{q} \Rightarrow f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{Q}. \tag{6}$$

Trong (1) cho $y = x$ ta được $f(x^2) = f^2(x) + 2f(x) - f(2x) = f^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Do đó với mọi $x \geq 0$ thì $f(x) = \left[f\left(\sqrt{x}\right)\right]^2 \geq 0$. Còn với $x \leq 0$ thì $-x \geq 0$, suy ra $f(x) = -f(-x) \leq 0$. Ta cũng chứng minh được

$$f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{f(x)}{n},\ \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}^*,$$

thật vậy $nf\left(\dfrac{x}{n}\right) = f\left(n.\dfrac{x}{n}\right) = f(x) \Rightarrow f\left(\dfrac{x}{n}\right) = \dfrac{f(x)}{n}$. Tiếp theo ta chứng minh

$$f(x+q) = q + f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{Q}. \tag{7}$$

Giả sử $q = \dfrac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$. Khi đó

$$f(x+q) = f\left(x + \frac{a}{b}\right) = \frac{1}{b}f(bx+a) = \frac{f(bx)+a}{b} = \frac{bf(x)+a}{b} = f(x) + q.$$

Vậy (7) được chứng minh. Ta chứng minh nếu $x > y$ thì $f(x) \geq f(y)$. Tồn tại $r \in \mathbb{Q}$ sao cho $y < r < x$. Khi đó

$$f(x) = f(x-r) + r \geq r \geq r + f(y-r) = f(y).$$

Giả sử tồn tại x sao cho $f(x) \neq x$. Không mất tính tổng quát, giả sử $f(x) > x$. Xét r là số hữu tỉ sao cho $x < r < f(x)$. Vì $r \in \mathbb{Q}$ nên $f(r) = r$, suy ra $f(x) > r = f(r)$, dẫn tới $r \leq x$. Vậy $x < r \leq x$, vô lí. Từ đây suy ra $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Sau khi thử lại ta kết luận: Có hai hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét 3. *Nếu ta đã tìm được $f(x) = \alpha(x)$, $\forall x \in \mathbb{Q}$ mà muốn chứng minh kết quả $f(x) = \alpha(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ta thường dùng kĩ thuật sau: Giả sử tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) \neq \alpha(x)$, giả sử $f(x) > \alpha(x)$ (trường hợp $f(x) < \alpha(x)$ được xét tương tự), khi đó tồn tại số hữu tỉ q sao cho $\alpha(x) < q < f(x)$, để dẫn tới điều mâu thuẫn (chẳng hạn bài toán 2.197, bài toán 2.94). Do đó $f(x) = \alpha(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Bài toán 2.198. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Hướng dẫn. Đặt $g(x) = f(x) - 1$, khi đó từ (1) có

$$g(xy) = g(x)g(y) + g(x) + g(y) - g(x+y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ (2), sử dụng bài toán 2.197 ta được kết quả. Ngoài ra bài toán này còn được giải bằng phương pháp thêm biến (xem bài toán 2.323 ở trang 365).

Bài toán 2.199. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x + yf(x)) = f(x) + xf(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Dễ thấy $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Tiếp theo xét $f(x) \not\equiv 0$. Từ (1) cho $y = 0$ và $x = 1$ được $f(0) = 0$. Nếu $f(x) = 0$ thì $xf(y) = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, suy ra $x = 0$. Vậy $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Từ (1) cho $x = 1$ được

$$f(1 + yf(1)) = f(1) + f(y),\ \forall y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Nếu $f(1) \neq 1$ thì thay $y = \dfrac{1}{1 - f(1)}$ vào (2) được

$$f\left(1 + \frac{f(1)}{1-f(1)}\right) = f(1) + f\left(\frac{1}{1-f(1)}\right) \Leftrightarrow f(1) = 0 \text{ (mâu thuẫn).}$$

Vậy $f(1) = 1$, do đó (2) trở thành

$$f(y+1) = f(y) + 1,\ \forall y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Từ (3) ta chứng minh được

$$f(n) = n,\ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Với $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} f(nx) = f\left(n + (x-1)n\right) = f\left(n + (x-1)f(n)\right) &\overset{\text{do (1)}}{=} f(n) + nf(x-1) \\ = n + nf(x-1) &\overset{\text{do (3)}}{=} n + n\left[f(x) - 1\right] = nf(x). \end{aligned} \tag{5}$$

Nếu $a = -b$ thì

$$f(a) = f(-1b) \overset{\text{do (5)}}{=} -1f(b) = -f(b) \Rightarrow f(a) + f(b) = 0 = f(0) = f(a+b).$$

Nếu $a \neq -b$ thì $a + b \neq 0$ và $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \neq 0$. Vì thế

$$f(a) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2.f\left(\frac{a+b}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{a+b}{2} f\left(\frac{a-b}{2.f\left(\frac{a+b}{2}\right)}\right)$$

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2.f\left(\frac{a+b}{2}\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{a+b}{2}f\left(\frac{b-a}{2.f\left(\frac{a+b}{2}\right)}\right)$$

Cộng lại ta được $f(a)+f(b)=2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\overset{\text{do (5)}}{=}f(a+b)$. Tóm lại

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Do (6) nên (1) trở thành $f(x)+f\left(yf(x)\right)=f(x)+xf(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$, hay

$$f\left(yf(x)\right)=xf(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{7}$$

Từ (7) lấy $y=1$ được $f\left(f(x)\right)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$, suy ra f là song ánh. Do đó, với mọi $z\in\mathbb{R}$, tồn tại duy nhất $x\in\mathbb{R}$ sao cho $f(x)=z$. Sử dụng (7) cho ta

$$f(yz)=f\left(yf(x)\right)=xf(y)=f\left(f(x)\right)f(y)=f(z)f(y),\ \forall y,z\in\mathbb{R}. \tag{8}$$

Từ (6) và (8), sử dụng bài toán 2.169 ở trang 218 ta được $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại đúng. Vậy có hai hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 2.200. *Cho số nguyên $n\geq 2$. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f\left(x^n+f(y)\right)=[f(x)]^n+y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Đặt $f(0)=a$. Trong (1) cho $x=0$ được: $f\big(f(y)\big)=y+a^n,\ \forall y\in\mathbb{R}$. (2)
Sử dụng (1) và (2), ta được:

$$f\left(f\left(x^n+f\left(f(y)\right)\right)\right)=x^n+f\left(f(y)\right)+a^n\overset{\text{do (2)}}{=}x^n+y+2a^n,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

$$\begin{aligned}f\left(f\left(x^n+f\left(f(y)\right)\right)\right)&=f\left([f(x)]^n+f(y)\right)\\&=[f\left(f(x)\right)]^n+y\overset{\text{do (2)}}{=}(x+a^n)^n+y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{4}$$

Từ (3) và (4), suy ra: $x^n+2a^n=(x+a^n)^n,\ \forall x\in\mathbb{R}$. So sánh hệ số của x^{n-1} ở hai vế, ta được: $C_n^1a^n=0\Leftrightarrow a^n=0\Leftrightarrow a=0$. Do đó (2) trở thành:

$$f(f(y))=y,\ \forall y\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Từ (5) suy ra f là song ánh, do đó $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$.
Từ (1) cho $y=0$ ta được: $f\left(x^n\right)=[f(x)]^n,\ \forall x\in\mathbb{R}$. (6)
Với mọi $x\geq 0$ và $y\in\mathbb{R}$, ta có:

$$f(x+y)=f\left(\left(\sqrt[n]{x}\right)^n+f\left(f(y)\right)\right)=\left[f\left(\sqrt[n]{x}\right)\right]^n+f(y)\overset{\text{do (6)}}{=}f(x)+f(y).$$

Như vậy: $f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x\in\mathbb{R},\ y\geq 0$. (7)
Trong (7) lấy $y=-x$ ta được:

$$0=f(0)=f\left(x+(-x)\right)=f(x)+f(-x)\Rightarrow f(-x)=-f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{8}$$

Với mọi $y\in\mathbb{R},\ x<0$, sử dụng (7) và (8), ta được:

$$f(x+y)-f(x)=f(x+y)+f(-x)=f\left((x+y)+(-x)\right)=f(y).$$

Từ đây kết hợp với (7), ta được: $f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. (9)
Trường hợp n chẵn. Từ (6) thay $x=1$, ta được:

$$f(1)=[f(1)]^n\Rightarrow[f(1)]^{n-1}=1\Rightarrow f(1)=1\ (\text{do } n-1 \text{ lẻ}).$$

Do n chẵn nên từ (6) suy ra với $x>0$ thì $f(x)>0$. Giả sử $x<y$, khi đó $f(y-x)>0$ ta có:

$$f(y)=f(y-x+x)\overset{\text{do (7)}}{=}f(y-x)+f(x)>f(x).$$

Vậy hàm f đồng biến trên $\mathbb{R}$. Sử dụng bài toán 2.167 (ở trang 217) suy ra $f(x)=kx,\forall x\in\mathbb{R}$. Do $f(1)=1$ nên $f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy đúng.
Trường hợp n lẻ. Từ (6) thay $x=1$, ta được:

$$f(1)=[f(1)]^n\Rightarrow[f(1)]^{n-1}=1\Rightarrow f(1)=\pm 1\ (\text{do } n-1 \text{ chẵn}).$$

Ta chứng minh f đơn điệu. Trước hết, từ (9) và bằng quy nạp, ta có:

$$f(nx)=nf(x),\forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}.$$

Đặt $f(1)=k\in\{1,-1\}$. Ta tính $f\left((x+1)^n\right)$ bằng hai cách.

$$f\big((x+1)^n\big)=[f(x+1)]^n=[f(x)+k]^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i[f(x)]^{n-i}k^i$$

$$\begin{aligned}f\big((x+1)^n\big)&=f\Big(\sum_{i=0}^{n}C_n^ix^{n-i}\Big)=f(x^n+C_n^1x^{n-1}+\cdots+C_n^{n-1}x+1)\\&=f(x^n)+C_n^1f(x^{n-1})+\cdots+C_n^{n-2}f(x^2)+C_n^{n-1}f(x)+k.\end{aligned}$$

So sánh hai kết quả trên, ta được:

$$\begin{aligned}&f(x^n)+C_n^1f(x^{n-1})+C_n^2f(x^{n-2})+\cdots+C_n^{n-2}f(x^2)+C_n^{n-1}f(x)+k\\=&[f(x)]^n+C_n^1[f(x)]^{n-1}k+\cdots+C_n^{n-1}f(x)k^{n-1}+k^n.\end{aligned}$$

Do (6) nên ta có:

$$C_n^1f(x^{n-1})+C_n^2f(x^{n-2})+\cdots+C_n^{n-2}f(x^2)+C_n^{n-1}f(x)+k$$

$$=C_n^1[f(x)]^{n-1}k+\cdots+C_n^{n-1}f(x)k^{n-1}+k^n.$$

Do f là hàm cộng tính nên ta có thể viết lại như sau:

$$f(C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+\cdots+C_n^{n-2}x^2)+C_n^{n-1}f(x)+k$$
$$=C_n^1[f(x)]^{n-1}k+\cdots+C_n^{n-1}f(x)k^{n-1}+k^n. \quad (10)$$

Xét hàm số:

$$g(x)=C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+\cdots+C_n^{n-2}x^2=(x+1)^n-x^n-nx-1.$$

Ta có:

$g'(x)=n(x+1)^{n-1}-nx^{n-1}-n, g''(x)=n(n-1)(x+1)^{n-2}-n(n-1)x^{n-2}$.

Vì $n-2$ lẻ nên $(x+1)^{n-2}>x^{n-2}$. Do đó: $n(n-1)(x+1)^{n-2}>n(n-1)x^{n-2}$. Vậy $g''(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra $g'(x)$ tăng thực sự, vì vậy phương trình $g'(x)=0$ nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất. Mà $g'(0)=0$ nên $g'(x)$ chỉ triệt tiêu tại một điểm duy nhất $x=0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Vậy $g(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ và $g(x)=0\Leftrightarrow x=0$. Với mọi $t>0$ luôn có x_0 sao cho $t=g(x_0)$. Có hai trường hợp:

Trường hợp 1: $k=1$. Viết lại đẳng thức (10):

$$f(C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+\cdots+C_n^{n-2}x^2)$$
$$=C_n^1[f(x)]^{n-1}+C_n^2[f(x)]^{n-2}+\cdots+C_n^{n-2}[f(x)]^2.$$

Hay viết gọn hơn: $f(g(x))=g(f(x))$. Lấy $t>0$ tuỳ ý, theo các tính chất của hàm g ta thấy tồn tại $x_0\neq 0$ sao cho $t=g(x_0)$ và do $f(x_0)\neq 0$ nên $g(f(x_0))>0$. Vậy: $f(t)=f(g(x_0))=g(f(x_0))>0$. Hay với $x>0$ thì $f(x)>0$. Với $x<y$ thì $y-x>0\Rightarrow f(y-x)>0$. Khi đó ta có:

$$f(y)=f(y-x+x)=f(y-x)+f(x)>f(x).$$

Suy ra f là hàm đơn điệu tăng. Như vậy, f cộng tính và đơn điệu trên $\mathbb{R}$ nên:

$$f(x)=kx=x, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Trường hợp 2: $k=-1$. Viết lại đẳng thức (10):

$$f(C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+\cdots+C_n^{n-2}x^2)$$
$$=-C_n^1[f(x)]^{n-1}+C_n^2[f(x)]^{n-2}-\cdots-C_n^{n-2}[f(x)]^2.$$

$$=-\left(C_n^1[-f(x)]^{n-1}+C_n^2[-f(x)]^{n-2}+\cdots+C_n^{n-2}[-f(x)]^2\right).$$

Hay $f(g(x))=-g(-f(x))$. Từ sự biến thiên của $g(x)$ ta có: với mỗi $t>0$ luôn có $x_0\neq 0$ (đúng hai giá trị x_0) sao cho $t=g(x_0)$. Với $x_0\neq 0$ thì $f(x_0)\neq 0$ và $g(x)>0, \forall x\neq 0$. Do đó: $g(-f(x_0))>0\Rightarrow -g(-f(x_0))<0$. Vậy:

$$f(t)=f(g(x_0))=-g(-f(x_0))<0.$$

Hay với $x>0$ thì $f(x)<0$. Bây giờ ta chứng minh $f(x)$ là hàm số giảm. Thật vậy, giả sử $x<y\Rightarrow y-x>0\Rightarrow f(y-x)<0$, ta có:

$$f(y)=f(y-x+x)=f(y-x)+f(x)<f(x).$$

Vậy f cộng tính và giảm trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)=kx=-x, \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại, ta được nghiệm $f(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(x)=-x, \forall x\in\mathbb{R}$.

Kết luận:

- Nếu n chẵn thì có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$f(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}.$$

- Nếu n lẻ thì có hai hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$f(x)=x, \forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=-x, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Lưu ý. Khi $n=2$, ta được đề thi Olympic Toán Quốc tế năm 1992.

2.6 Phương trình hàm trong lớp các hàm bị chặn

2.6.1 Một vài lưu ý khi giải toán.

Định nghĩa 7. *Hàm số f được gọi là bị chặn trên tập $\mathcal{D}$ nếu nó xác định trên $\mathcal{D}$ và tồn tại số $M>0$ sao cho $|f(x)|\leq M,\ \forall x\in\mathcal{D}$.*

Định nghĩa 8. *Cho tập hợp $A\subset\mathbb{R}$.*

- *Số x được gọi là một cận trên của tập A nếu với mọi $a\in A$ ta có $a\leq x$. Lúc này ta nói tập A bị chặn trên.*
- *Số x được gọi là một cận dưới của tập A nếu với mọi $a\in A$ ta có $x\leq a$. Lúc này ta nói tập A bị chặn dưới.*
- *Cận trên bé nhất (nếu có) của tập A được gọi là cận trên đúng của tập hợp A, kí hiệu là $\sup A$. Cận dưới lớn nhất (nếu có) của tập A được gọi là cận dưới đúng của tập hợp A, kí hiệu là $\inf A$.*

Lưu ý. $\sup A$ có thể không thuộc A. Nếu $\sup A$ thuộc A thì đó chính là giá trị lớn nhất của A, kí hiệu là $\max A$. Tương tự, $\inf A$ có thể không thuộc A. Nếu $\inf A$ thuộc A thì đó chính là giá trị nhỏ nhất của A, kí hiệu là $\min A$. Chẳng hạn, với $A = (a;b)$ thì $\sup A = b$ và $\inf A = a$; với $A = [a;b]$ thì $\sup A = b = \max A$ và $\inf A = a = \min A$; với

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$$

thì $\inf A = 0$ và $\sup A = 1$.

Định lý 6. *Tập con khác rỗng A của $\mathbb{R}$ nếu bị chặn trên thì có $\sup A$, nếu bị chặn dưới thì có $\inf A$.*

Định lý 7 (Đặc trưng của cận trên đúng và cận dưới đúng).

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} M \geq x, \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ sao cho } a > M - \varepsilon. \end{cases}$$

$$m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq x, \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ sao cho } a < m + \varepsilon. \end{cases}$$

Trong thực hành ta thường áp dụng định lý sau:

Định lý 8. *Cho $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$.*

- *Nếu tập hợp A bị chặn trên thì tồn tại dãy số $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ trong A sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup A$.*
- *Nếu tập hợp A bị chặn dưới thì tồn tại dãy số $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ trong A sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf A$.*

Chứng minh. Ta chứng minh phần sau của định lí, còn phần đầu được tiến hành tương tự. Theo đặc trưng của $\inf A$, với mọi $n = 1, 2, \ldots$, tồn tại $x_n \in A$ sao cho:

$$\inf A \leq x_n < \inf A + \frac{1}{n}.$$

Ta có $(x_n)_{n=1}^{+\infty} \subset A$. Mặt khác từ

$$\lim_{n\to\infty} (\inf A) = \lim_{n\to\infty} \left(\inf A + \frac{1}{n}\right) = \inf A$$

suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf A$.

Định lý 9. *Cho $f : (a;b) \to \mathbb{R}$ là hàm số tăng. Nếu f bị chặn trên thì f có giới hạn hữu hạn khi $x \to b$ và $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \sup\limits_{x\in(a;b)} f(x)$. Nếu f không bị chặn trên thì $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$.*

Chứng minh. Xét trường hợp hàm số f bị chặn trên. Khi đó $A = \{f(x) | x \in (a;b)\}$ khác rỗng và bị chặn trên nên tồn tại $\sup A = \sup\limits_{x\in(a;b)} f(x)$. Với $\varepsilon > 0$ bất kì, $\exists \alpha \in (a;b)$ sao cho $\sup A - \varepsilon < f(\alpha) \leq \sup A$. Với $x \in (a;b)$ và $\alpha \leq x$, ta có

$$f(\alpha) \leq f(x) \Rightarrow \sup A - \varepsilon < f(x) \leq \sup A \Rightarrow |f(x) - \sup A| \leq \varepsilon.$$

Giả sử $b \in \mathbb{R}$ (trường hợp $b = +\infty$ khảo sát tương tự). Đặt $\beta = b - \alpha > 0$, khi đó ta có: với mọi $x \in (a;b)$ sao cho $0 < b - x \leq \beta$ thì $|f(x) - \sup A| \leq \varepsilon$. Điều này chứng tỏ $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \sup A$. Xét trường hợp f không bị chặn trên. Cho $M \in \mathbb{R}$. Vì f không bị chặn trên nên tồn tại $\lambda \in (a;b)$ sao cho $f(\lambda) > M$. Vậy với $x \in (a;b)$ và $\lambda \leq x$, ta có $f(\lambda) \leq f(x) \Rightarrow f(x) > M$. Giả sử $b \in \mathbb{R}$ (trường hợp $b = +\infty$ khảo sát tương tự). Đặt $d = b - \lambda > 0$, ta có: với mọi $x \in (a;b)$ sao cho $0 < b - x \leq \lambda$ thì $f(x) \geq M$. Điều này chứng tỏ $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$.

Lưu ý. Nếu $b \in \mathbb{R}$ thì trong định lí trên ta có thể nói về giới hạn trái tại b.

Lưu ý. Đối với bài toán phương trình hàm trong lớp các hàm bị chặn, để hướng tới một tính chất nào đó của hàm số ta thường dùng phương pháp phản chứng, giả sử tính chất đó không đúng để dẫn tới một điều mâu thuẫn với giả thiết hàm bị chặn.

2.6.2 Một số bài toán.

Bài toán 2.201. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bị chặn trong khoảng $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ và thỏa mãn điều kiện: $f(x) - \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.* (1)

Giải. Từ giả thiết (1) ta có:

$$f(x) = \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) + x^2$$

$$\frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2^2} f\left(\frac{x}{2^2}\right) + \frac{x^2}{2^3}$$

$$\frac{1}{2^2} f\left(\frac{x}{2^2}\right) = \frac{1}{2^3} f\left(\frac{x}{2^3}\right) + \frac{x^2}{2^6}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) + \frac{x^2}{2^{3n}}.$$

Cộng lại ta được:

$$f(x) = \frac{1}{2^{n+1}} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) + x^2 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{3n}}\right), \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n = 1, 2, \ldots \quad (2)$$

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ đủ lớn sao cho $-\frac{1}{2} < \frac{x}{2^{n+1}} < \frac{1}{3}$. Do f bị chặn trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ nên $\exists c \in \mathbb{R} : \left|f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\right| \le c$. Vậy từ (*) cho $n \to +\infty$ ta được:

$$f(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{8}}x^2 = \frac{8x^2}{7}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại thấy đúng.

Bài toán 2.202. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bị chặn trên đoạn $[a; b]$ và thỏa mãn điều kiện:*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Do f bị chặn trên đoạn $[a; b]$ nên $\exists M \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) < M, \ \forall x \in [a; b]$. Ta sẽ chứng minh f cũng bị chặn trên đoạn $[0; b-a]$. Thật vậy, với mọi $x \in [0; b-a]$ thì $x + a \in [a; b]$. Ta có

$$f(x+a) = f(x) + f(a) \Rightarrow f(x) = f(x+a) - f(a) \Rightarrow -2M < f(x) < 2M.$$

Vậy $|f(x)| < 2M, \ \forall x \in [0; b-a]$, hay f cũng bị chặn trên đoạn $[0; b-a]$. Đặt $b - a = d > 0$, khi đó f bị chặn trên $[0; d]$. Đặt $c = \frac{f(d)}{d}$, $g(x) = f(x) - cx$. Khi đó với mọi $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ thì

$$g(x+y) = f(x+y) - c(x+y) = f(x) - cx + f(y) - cy = g(x) + g(y).$$

Hơn nữa $g(d) = f(d) - cd = 0$. Vậy $g(x+d) = g(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$, hay g là hàm tuần hoàn, hơn nữa g cũng bị chặn trên $[0; d]$, kết hợp với tính tuần hoàn của g trên $\mathbb{R}$, suy ra g bị chặn trên $\mathbb{R}$. Giả sử $\exists x_0 \in \mathbb{R} : g(x_0) \neq 0$. Khi đó với số tự nhiên n thì $g(nx_0) = ng(x_0)$, suy ra

$$|g(nx_0)| = n\,|g(x_0)|, \ \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Do $g(x_0) \neq 0$ nên từ (2) ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} |g(nx_0)| = \lim\limits_{n\to+\infty} |g(x_0)|\, n = +\infty$, do đó $|g(nx_0)|$ lớn tùy ý (chỉ cần chọn n đủ lớn), trái với điều kiện bị chặn của hàm g. Vậy $g(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$, do đó $f(x) = cx, \ \forall x \in \mathbb{R}$ (c là hằng số). Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.203. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bị chặn trên đoạn $[-1; 1]$ và thỏa mãn điều kiện*

$$f(4f(x) + f(y)) = 4x + y, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) cho $x = y$ được

$$f(5f(x)) = 5x, \ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Đặt $5f(x) = u, \ 5f(y) = v$. Từ (2) ta được $f(u) = 5x, \ f(v) = 5y$. Từ đó

$$f(4f(u) + f(v)) = f(4.5x + 5y) = f(20x + 5y). \quad (3)$$

Mặt khác, theo (1) ta có

$$f(4f(u) + f(v)) = 4u + v = 20f(x) + 5f(y). \quad (4)$$

Từ (4) và (3) ta được

$$f(20x + 5y) = 20f(x) + 5f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Trong (5) cho $x = y = 0$ được $f(0) = 0$, cho $x = 0$ được $f(5y) = 5f(y)$, cho $y = 0$ được $f(20x) = 20f(x)$. Vậy (5) trở thành

$$\begin{aligned} &f(20x + 5y) = f(20x) + f(5y), \ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &f(x+y) = f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (6)$$

Từ (6), sử dụng kết quả bài toán 2.202 ở trang 262, ta được

$$f(x) = cx, \ \forall x \in \mathbb{R} \ (c \text{ là hằng số}).$$

Thử lại thấy có hai hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x) \equiv x$ và $f(x) \equiv -x$.

Bài toán 2.204. *Tìm các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bị chặn trên $\mathbb{R}$, $f(1) = 1$ và*

$$f\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = f(x) + \left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2, \ \forall x \neq 0. \quad (1)$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài, khi đó tồn tại số $M > 0$ sao cho

$$-M \le f(x) \le M, \ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Gọi c là cận trên bé nhất của tập hợp $\{f(x) | x \in \mathbb{R}\}$, tức là $f(x) \le c, \ \forall x \in \mathbb{R}$ và với mọi $\varepsilon > 0$, luôn tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) > c - \varepsilon$. Do (2) nên luôn tồn tại c. Ta có $c \ge 2$ vì

$$f(2) = f\left(1 + \frac{1}{1^2}\right) = f(1) + [f(1)]^2 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow c \ge 2.$$

Với mỗi số tự nhiên k, luôn tồn tại x_k sao cho $f(x_k) > c - \frac{1}{k}$, từ đây, tồn tại dãy số (x_n) sao cho

$$f(x_n) > c - \frac{1}{n}, \ \forall n = 1, 2, \ldots \quad (3)$$

Ta có

$$c \geq f\left(x_k + \frac{1}{x_k^2}\right) = f(x_k) + \left[f\left(\frac{1}{x_k}\right)\right]^2 \overset{\text{do (3)}}{\geq} c - \frac{1}{k} + \left[f\left(\frac{1}{x_k}\right)\right]^2.$$

Như vậy $\left[f\left(\frac{1}{x_k}\right)\right]^2 \leq \frac{1}{k} \Rightarrow f\left(\frac{1}{x_k}\right) \geq -\frac{1}{\sqrt{k}}$. Mặt khác ta lại có

$$c \geq f\left(\frac{1}{x_k} + \frac{1}{\frac{1}{x_k^2}}\right) = f\left(\frac{1}{x_k}\right) + [f(x_k)]^2 \geq -\frac{1}{\sqrt{k}} + \left(c - \frac{1}{k}\right)^2$$

$$\Rightarrow c \geq -\frac{1}{\sqrt{k}} + c^2 - \frac{2c}{k} + \frac{1}{k^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{k^2} \geq c^2 - \frac{2c}{k} - c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{k^2} \geq c\left(c - \frac{2}{k} - 1\right) \overset{\text{do } c\geq 2}{\geq} c\left(1 - \frac{2}{k}\right) = \frac{c(k-2)}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{k\sqrt{k}-1}{k^2} \geq \frac{c(k-2)}{k} \Rightarrow \frac{k\sqrt{k}-1}{k(k-2)} \geq c \Rightarrow \frac{k\sqrt{k}-1}{k(k-2)} \geq 2, \ \forall k = 1, 2, \ldots \quad (4)$$

Vì $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{k\sqrt{k}-1}{k(k-2)} = 0$ nên (3) không đúng khi k đủ lớn, vậy không tồn tại hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 2.205. *Cho hàm số $f : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$, bị chặn trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn*

$$f(x)f(y) \leq x^2 f\left(\frac{y}{2}\right) + y^2 f\left(\frac{x}{2}\right), \ \forall x, y \in [0; +\infty). \quad (1)$$

Chứng minh rằng $f(x) \leq x$, $\forall x \in [0; +\infty)$.

Giải. Từ (1) cho $y = x > 0$ ta được $f^2(x) \leq 2x^2 f\left(\frac{x}{2}\right)$, $\forall x > 0$ hay

$$f\left(\frac{x}{2}\right) \geq \frac{1}{2}\left[\frac{f(x)}{x}\right]^2, \ \forall x > 0. \quad (2)$$

Đặt $f(x) = k$, sử dụng (2), suy ra với mọi $x > 0$ thì

$$f\left(\frac{x}{4}\right) \geq \frac{1}{2}\left[\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right]^2 \geq \frac{2}{x^2}\frac{1}{4}\left[\frac{f(x)}{x}\right]^4 = \frac{k^4}{2x^6}. \quad (3)$$

$$f\left(\frac{x}{8}\right) \geq \frac{1}{2}\left[\frac{f\left(\frac{x}{4}\right)}{\frac{x}{4}}\right]^2 \geq \frac{8}{x^2}\left(\frac{k^4}{2x^6}\right)^2 = \frac{2k^8}{x^{14}}. \quad (4)$$

$$f\left(\frac{x}{16}\right) \geq \frac{1}{2}\left[\frac{f\left(\frac{x}{8}\right)}{\frac{x}{8}}\right]^2 \geq \frac{32}{x^2}\left(\frac{2k^8}{x^{14}}\right)^2 = \frac{128k^{16}}{x^{30}}. \quad (5)$$

Với mọi $x > 0$, nếu n đủ lớn thì $\frac{x}{2^n} \in [0; 1]$, điều này gợi ý rằng đây là dãy trong đoạn $[0; 1]$ mà ảnh của dãy này qua f không bị chặn. Ta sẽ chứng minh rằng nếu $k > x^2$ thì

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) \geq 2^N x^2, \ N = 2^n - 2n - 1. \quad (6)$$

Từ (2), (3), (4), (5) suy ra nếu $k > x^2$ thì (6) đúng khi $n = 1, 2, 3, 4$. Giả sử khẳng định đó đúng tới n. Khi đó

$$f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \geq \frac{1}{2}\left[\frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}\right]^2$$
$$= \frac{2^{2n-1}}{x^2}\left[f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]^2 \geq \frac{2^{2n-1}}{x^2}\cdot(2^N x^2)^2$$
$$= 2^{2N+2n-1}x^2 = 2^{2(2^n-2n-1)+2n-1}x^2 = 2^{2^{n+1}-2(n+1)-1}x^2.$$

Theo nguyên lí quy nạp suy ra (6) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Vậy nếu tồn tại $x > 0$ sao cho $f(x) > x^2$ thì từ (6) và $\lim\limits_{n\to+\infty}(2^N x^2) = +\infty$ sẽ dẫn tới mâu thuẫn với giả thiết hàm f bị chặn trên $[0; 1]$, do đó $f(x) \leq x^2$, $\forall x > 0$. Mặt khác từ (1) cho $x = y = 0$ ta được $f^2(0) \leq 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$. Vậy $f(x) \leq x^2$, $\forall x \geq 0$.

Bài toán 2.206. *Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $|f(x)| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và*

$$f\left(x + \frac{13}{42}\right) + f(x) = f\left(x + \frac{1}{6}\right) + f\left(x + \frac{1}{7}\right), \ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Chứng minh rằng f là hàm tuần hoàn.

Giải. Đặt $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{7}$. Khi đó (1) viết lại

$$f(x + a + b) + f(x) = f(x + a) + f(x + b), \ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Lần lượt thay x bởi $x + a$, $x + 2a$, $x + 3a$, $x + 4a$, $x + 5a$ ta được

$$f(x + 2a + b) + f(x + a) = f(x + 2a) + f(x + a + b), \ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$
$$f(x + 3a + b) + f(x + 2a) = f(x + 3a) + f(x + 2a + b), \ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$
$$f(x + 4a + b) + f(x + 3a) = f(x + 4a) + f(x + 3a + b), \ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

$$f(x+5a+b)+f(x+4a)=f(x+5a)+f(x+4a+b),\ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (6)$$
$$f(x+6a+b)+f(x+5a)=f(x+6a)+f(x+5a+b),\ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (7)$$

Cộng tất cả (2), (3),...,(7) ta được

$$f(x)+f(x+6a+b)=f(x+b)+f(x+6a),\ \forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f(x)+f(x+1+b)=f(x+b)+f(x+1),\ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (8)$$

Trong (8) lần lượt thay x bởi $x+b, x+2b, \ldots, x+6b$ và lấy tổng ta được

$$f(x)+f(x+1+7b)=f(x+1)+f(x+7b),\ \forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f(x)+f(x+2)=f(x+1)+f(x+1),\ \forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f(x+2)-f(x+1)=f(x+1)-f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (9)$$

Nếu đặt $f(x+1)-f(x)=c$ thì từ (9) ta có

$$f(x+1)-f(x)=c$$
$$f(x+2)-f(x+1)=c$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(x+n)-f(x+n-1)=c.$$

Cộng lại ta được

$$f(x+n)-f(x)=nc,\ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (10)$$

Từ (1) suy ra nếu $c\neq 0$ thì $f(x+n)$ lớn tùy ý khi n đủ lớn, điều này mâu thuẫn với giả thiết $|f(x)|\leq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, vậy $c=0$ và

$$f(x+1)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (11)$$

Từ (11) suy ra f là hàm tuần hoàn, ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 2.207. *Tìm các hàm số đồng biến $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$ và thỏa mãn:*

$$f(x+1)=f(x)+2^{-x},\ \forall x>0. \quad (1)$$

Giải. Đặt $f(x)=g(x)-2^{1-x},\ \forall x>0$. Thay vào (1) ta được

$$g(x+1)-2^{1-(x+1)}=g(x)-2^{1-x}+2^{-x},\ \forall x>0$$
$$\Leftrightarrow g(x+1)=g(x),\ \forall x>0. \quad (2)$$

Do f đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên nếu f bị chặn trên thì $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, với $A=\sup\limits_{(0;+\infty)}f(x)$, do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=A$ $\left(\text{do }\lim\limits_{x\to+\infty}2^{1-x}=0\right)$. Với $\alpha>0$ bất kì, ta cố định α. Từ (2), bằng quy nạp suy ra

$$g(\alpha)=g(\alpha+n),\ \forall n=1,2,\ldots \quad (3)$$

Từ (3) suy ra $g(\alpha)=\lim\limits_{n\to+\infty}g(\alpha)=\lim\limits_{n\to+\infty}g(\alpha+n)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=A$. Vì α tùy ý nên $g(x)=A,\ \forall x>0$, do đó $f(x)=-2^{1-x}+A,\ \forall x>0$, thử lại thấy thỏa mãn. Nếu f không bị chặn trên thì $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, do đó lập luận như trên ta được $g(x)=+\infty,\ \forall x>0$, vô lí. Vậy tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x)=-2^{1-x}+A,\ \forall x>0$ (A là hằng số tùy ý).

2.7 Phương trình hàm trong lớp các hàm liên tục

2.7.1 Một số lưu ý

Việc giải phương trình hàm trong lớp các hàm liên tục xuất hiện khá nhiều trong quyển sách này, kể cả trước và sau bài này. Chú ý rằng khái niệm liên tục rất quan trọng, việc vận dụng khái niệm này để giải toán đòi hỏi phải nắm vững bản chất. Bạn đọc nên xem thêm các bài toán có liên quan trong chương "Sử dụng dãy số để giải một số dạng phương trình hàm" ở các trang 559 (và một số trang sau đó), trang 320 (và một số trang sau đó). Sau đây là một số lưu ý:

- Cho hàm số f xác định trên $D\subset\mathbb{R}$ và $x_0\in D$. Hàm số f được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.
- Cho hàm số f xác định trên $D\subset\mathbb{R}$ và $x_0\in D$. Khi đó hàm số f liên tục tại x_0 khi và chỉ khi với mọi dãy $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}\subset D$ sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0$ ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=f(x_0)$.
- Các hàm số c (hằng số), $x, \sin x, \cos x, \tan x, \cot x, e^x, \ln x$ được gọi là các hàm số sơ cấp cơ bản. Các hàm số thu được từ các hàm số sơ cấp cơ bản bằng cách lấy tổng, hiệu, tích, thương và phép lấy hàm hợp được gọi là các hàm số sơ cấp. Các hàm số sơ cấp liên tục trên tập xác định của chúng.
- (Định lí Giá trị trung gian). Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì $f(x)$ lấy tất cả các giá trị từ $f(a)$ đến $f(b)$.
- Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì nó có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a;b]$.
- Kết quả và kĩ thuật giải của bài toán 2.214 ở trang 278 được sử dụng nhiều lần, bạn đọc cần nắm vững.
- Nếu f và g là những hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)=g(x),\ \forall x\in\mathbb{Q}$ thì
$$f(x)=g(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

- Nếu hàm số f là đơn ánh và liên tục trên một khoảng nào đó thì nó đơn điệu thực sự trên khoảng đó (xem chứng minh ở mục 2.7.6, ở trang 296).

2.7.2 Xây dựng dãy số hữu tỉ

Khi đã tìm được công thức của hàm số f trên tập số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, nếu muốn suy ra được công thức của hàm f trên tập số thực, ta thường sử dụng dãy số, giới hạn và tính liên tục, đơn điệu, đặc biệt là phải xây dựng các dãy số hữu tỉ thỏa mãn điều kiện nào đó.

- Giữa hai số thực phân biệt luôn có một số hữu tỉ.
  Chứng minh. Giả sử x, y là hai số thực phân biệt và $x < y$. Chọn số tự nhiên n đủ lớn sao cho $n(y-x) > 3$. Khi đó tồn tại số nguyên m sao cho:
  $$nx < m < ny \Rightarrow x < \frac{m}{n} < y.$$
  Vậy $\dfrac{m}{n}$ là số hữu tỉ nằm giữa x và y.

- Với mọi số thực x, luôn tồn tại dãy số hữu tỉ (x_n) hội tụ về x.
  Chứng minh. Với mỗi số tự nhiên n, luôn tồn tại số hữu tỉ x_n sao cho
  $$x - \frac{1}{n} < x_n < x + \frac{1}{n}.$$
  Vậy ta xây dựng được dãy số hữu tỉ (x_n) thỏa mãn
  $$x - \frac{1}{n} < x_n < x + \frac{1}{n} \Rightarrow -\frac{1}{n} < x_n - x < \frac{1}{n} \Rightarrow |x_n - x| \le \frac{1}{n},\ \forall n = 1, 2, \ldots$$
  Từ đây cho $n \to +\infty$ và sử dụng nguyên lí kẹp ta được $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, suy ra điều phải chứng minh.

- Với mọi $x \in \mathbb{R}, x > 0$, luôn tồn tại dãy số hữu tỉ dương (x_n) hội tụ về x.
  Chứng minh. Với mỗi số tự nhiên n, luôn tồn tại số hữu tỉ x_n sao cho
  $$x - \frac{1}{n} < x_n < x + \frac{1}{n}.$$
  Vậy ta xây dựng được dãy số hữu tỉ (x_n) thỏa mãn
  $$x - \frac{1}{n} < x_n < x + \frac{1}{n} \Rightarrow -\frac{1}{n} < x_n - x < \frac{1}{n} \Rightarrow |x_n - x| \le \frac{1}{n},\ \forall n = 1, 2, \ldots$$
  Từ đây cho $n \to +\infty$ và sử dụng nguyên lí kẹp ta được $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
  Do $x > 0$ nên tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $x_n > \dfrac{x}{2} > 0,\ \forall n \ge n_0$ Đặt:
  $$y_1 = x_{n_0+1},\ y_2 = x_{n_0+2}, \ldots, y_n = x_{n_0+n}.$$

Ta thu được dãy số hữu tỉ dương (y_n) thỏa mãn:
$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} x_{n_0+n} = x.$$
Suy ra điều phải chứng minh.
Cách khác. Giả sử $x > 0$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, luôn tồn tại số hữu tỉ x_n sao cho:
$$0 < x + \frac{1}{2n} < x_n < x + \frac{1}{n}.$$
(x_n) là dãy hữu tỉ dương, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x + \dfrac{1}{2n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(x + \dfrac{1}{n}\right) = x$ nên từ $0 < x + \dfrac{1}{2n} < x_n < x + \dfrac{1}{n},\ \forall n = 1, 2, \ldots$, sử dụng nguyên lí kẹp suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

- Với mọi số thực x luôn tồn tại hai dãy số hữu tỉ (α_n), (β_n) sao cho
  $$\alpha_n \le x \le \beta_n,\ \forall n = 1, 2, \ldots \text{ và } \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = x = \lim_{n\to+\infty} \beta_n.$$
  Chứng minh. Giả sử $x \in \mathbb{R}$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, luôn tồn tại số hữu tỉ α_n và β_n sao cho:
  $$x - \frac{1}{n} < \alpha_n < x,\ \forall n = 1, 2, \ldots \text{; và } x < \beta_n < x + \frac{1}{n},\ \forall n = 1, 2, \ldots$$
  Do $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x - \dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(x + \dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} x = x$ nên
  $$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = x = \lim_{n\to+\infty} \beta_n.$$
  Vậy ta thu được hai dãy số hữu tỉ (α_n), (β_n) sao cho
  $$\alpha_n \le x \le \beta_n,\ \forall n = 1, 2, \ldots \text{ và } \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = x = \lim_{n\to+\infty} \beta_n.$$

- Với mọi số thực $x > 0$ luôn tồn tại hai dãy số hữu tỉ dương (α_n), (β_n) sao cho
  $$\alpha_n \le x \le \beta_n,\ \forall n = 1, 2, \ldots \text{ và } \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = x = \lim_{n\to+\infty} \beta_n.$$
  Chứng minh. Giả sử $x > 0$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, luôn tồn tại số hữu tỉ α_n và β_n sao cho:
  $$0 < x - \frac{x}{2^n} < \alpha_n < x,\ \forall n = 1, 2, \ldots \text{; và } x < \beta_n < x + \frac{1}{n},\ \forall n = 1, 2, \ldots$$

Do $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x-\dfrac{x}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}x=x$ nên

$$\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=x=\lim_{n\to+\infty}\beta_n.$$

Vậy ta thu được hai dãy số hữu tỉ dương (α_n), (β_n) sao cho

$$\alpha_n\le x\le\beta_n,\ \forall n=1,2,\dots \text{ và } \lim_{n\to+\infty}\alpha_n=x=\lim_{n\to+\infty}\beta_n.$$

- Với mọi số thực $x\in[0;1]$, luôn tồn tại dãy số hữu tỉ $(x_n)\subset[0;1]$ sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$.

Chứng minh.

- Khi $x=0$. Xét dãy số: $x_n=\dfrac{1}{n}$, $\forall n=1,2,\dots$ Khi đó dãy số hữu tỉ $(x_n)\subset[0;1]$ và hội tụ về 0.
- Khi $x=1$. Xét dãy số: $x_n=1-\dfrac{1}{n}$, $\forall n=1,2,\dots$ Khi đó dãy số hữu tỉ $(x_n)\subset[0;1]$ và hội tụ về 1.
- Khi $0<x<1$. Với mỗi $n=1,2,\dots$, ta luôn có:

$$0<x<x+\frac{1-x}{2^n}<1.$$

Suy ra tồn tại số hữu tỉ x_n sao cho: $x<x_n<x+\dfrac{1-x}{2^n}$. Như vậy tồn tại dãy số hữu tỉ $(x_n)\subset[0;1]$ sao cho:

$$x<x_n<x+\frac{1-x}{2^n},\ \forall n=1,2,\dots \qquad (*)$$

Từ (*) cho $n\to+\infty$, ta được: $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$.

- Với mọi số thực x, luôn tồn tại dãy số hữu tỉ $(x_n)\subset\left\{\dfrac{m}{2^n}|m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}\right\}$ sao cho: $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$.

Chứng minh. Ta có:

$$[2^nx]\le 2^nx\le[2^nx]+1,\ \forall n\in\mathbb{N}$$
$$\Rightarrow\frac{[2^nx]}{2^n}\le x\le\frac{[2^nx]}{2^n}+\frac{1}{2^n},\ \forall n\in\mathbb{N}. \qquad (*)$$

Từ (*) cho $n\to+\infty$ và sử dụng nguyên lí kẹp ta được: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{[2^nx]}{2^n}=x$, điều phải chứng minh.

2.7.3 Phương trình với một ẩn hàm

Trong mục này, ta chủ yếu sử dụng kết quả: Cho hàm số f xác định trên $D\subset\mathbb{R}$ và $x_0\in D$. Khi đó hàm số f liên tục tại x_0 khi và chỉ khi với mọi dãy $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}\subset D$ sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0$ ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=f(x_0)$.

Lưu ý. Khi dạy cho học trò tôi thường nói nôm na kết quả này là: "Hàm số f liên tục khi và chỉ khi lim của ép bằng ép của lim"

Bài toán 2.208. *Tìm tất cả các hàm số f liên tục tại 0 và thỏa mãn*

$$f(x)=f(2017x),\forall x\in\mathbb{R}. \qquad (1)$$

Giải. Đặt $f(0)=a$. Trong (1) thay x bởi $\dfrac{x}{2017}$ ta được

$$f(x)=f(\frac{x}{2017}),\forall x\in\mathbb{R}. \qquad (2)$$

Với mỗi $x_1\in\mathbb{R}$, ta xây dựng dãy số $\{x_n\}$ như sau: $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2017},\forall n=1,2,\dots$

Khi đó $\{x_n\}$ là cấp số nhân với số hạng đầu là x_1, công bội $q=\dfrac{1}{2017}$. Vậy số hạng tổng quát của dãy số này là $x_n=\left(\dfrac{1}{2017}\right)^{n-1}x_1,\forall n=1,2,\dots$ Do đó

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2017}\right)^{n-1}x_1=x_1\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2017}\right)^{n-1}=0.$$

Hơn nữa từ (2) ta có

$$f(x_1)=f\left(\frac{x_1}{2017}\right)=f(x_2)=\cdots=f\left(\frac{x_{n-1}}{2017}\right)=f(x_n),\forall n=1,2,\dots$$

Vì f là hàm liên tục tại 0 nên

$$f(x_1)=\lim_{n\to+\infty}f(x_1)=\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=f\left(\lim_{n\to+\infty}x_n\right)=f(0)=a.$$

Vậy $f(x_1)=a,\forall x_1\in\mathbb{R}$. Hay f là hàm hằng trên $\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Lưu ý. Ta cũng có thể trình ngắn gọn hơn như sau: Với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ ta có

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2017}\right)=f\left(\frac{x}{2017^2}\right)=\cdots=f\left(\frac{x}{2017^n}\right),\forall n=1,2,\dots$$

Vì f là hàm liên tục tại 0 nên

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}f(x)=\lim_{n\to+\infty}f\left(\frac{x}{2017^n}\right)=f\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{2017^n}\right)=f(0),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Suy ra f là hàm hằng trên $\mathbb{R}$.

Lưu ý. Bạn đọc hãy so sánh bài toán này với bài toán 1.44 ở trang 26.

Bài toán 2.209. *Tìm tất cả các hàm số f liên tục tại 0 và thỏa mãn*

$$f(x) = 7f(2017x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Đặt $f(0) = a$. Trong (1) thay x bởi $\frac{x}{2017}$ ta được

$$f(x) = \frac{1}{7} f(\frac{x}{2017}), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Với mỗi $x_1 \in \mathbb{R}$, ta xây dựng dãy số $\{x_n\}$ như sau: $x_{n+1} = \frac{x_n}{2017}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ là cấp số nhân với số hạng đầu là x_1, công bội $q = \frac{1}{2017}$. Vậy số hạng tổng quát của dãy số này là $x_n = \left(\frac{1}{2017}\right)^{n-1} x_1, \forall n = 1, 2, \ldots$ Do đó: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2017}\right)^{n-1} x_1 = x_1 \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2017}\right)^{n-1} = 0$. Hơn nữa từ (2) ta có:

$$f(x_1) = \frac{1}{7} f\left(\frac{x_1}{2017}\right) = \frac{1}{7} f(x_2) = \cdots = \frac{1}{7^{n-1}} f\left(\frac{x_{n-1}}{2017}\right) = \frac{1}{7^{n-1}} f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vì f là hàm liên tục tại 0 nên

$$f(x_1) = \lim_{n\to+\infty} f(x_1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{7^{n-1}} f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = 0.f(0) = 0$$

Vậy $f(x_1) = 0, \forall x_1 \in \mathbb{R}$. Hay f đồng nhất 0 trên $\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Lưu ý. Liên hệ bài toán 2.208, 2.209 với bài toán 1.84 ở trang 50.

Bài toán 2.210 (Đề nghị thi Olympic Toán Sinh viên Toàn quốc - 2012). *Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$3f(2x+1) = f(x) + 5x, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow 3\left[f(2x+1) - (2x+1)\right] = \left[f(x) - x\right] - 3, \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow 3g(2x+1) = g(x) - 3, \forall x \in \mathbb{R} \ (\text{với } g(x) = f(x) - x). \quad (2)$$

Đặt $g(x) = -\frac{3}{2} + h(x)$. Ta có f là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra g, h cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Thay vào (2) được: $h(2x+1) = \frac{1}{3} h(x), \forall x \in \mathbb{R}$. (3)

Do tương ứng $x \to \frac{x-1}{2}$ là song ánh từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ nên thay x bởi $\frac{x-1}{2}$, ta có

$$h(x) = \frac{1}{3} h\left(\frac{x-1}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Sử dụng (4) liên tiếp, suy ra với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì

$$h(x) = \frac{1}{3} h\left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{1}{3^2} h\left(\frac{x-1-2}{2^2}\right) = \frac{1}{3^3} h\left(\frac{x-1-2-2^2}{2^3}\right)$$
$$= \cdots = \frac{1}{3^n} h\left(\frac{x-1-2-2^2-\cdots-2^{n-1}}{2^n}\right) = \frac{1}{3^n} h\left(\frac{x+1-2^n}{2^n}\right).$$

Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x+1-2^n}{2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{x+1}{2^n} - 1\right) = -1$ nên

$$h(x) = \lim_{n\to+\infty} h(x) = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{3^n} h\left(\frac{x+1-2^n}{2^n}\right)\right] = 0.h(-1) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy $f(x) = x - \frac{3}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Lưu ý. Từ (3), vận dụng chú ý **11** ở trang 52, ta có thể giải quyết tiếp như sau: Đặt $x = t - 1$, thay vào (3) được

$$h(2t-1) = \frac{1}{3} h(t-1), \ \forall t \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \varphi(2t) = \frac{1}{3}\varphi(t), \ \forall t \in \mathbb{R} \ (\text{với } \varphi(t) = h(t-1), \ \forall t \in \mathbb{R})$$
$$\Leftrightarrow \varphi(t) = \frac{1}{3}\varphi\left(\frac{t}{2}\right), \ \forall t \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \varphi(t) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \varphi\left(\frac{t}{2^2}\right) = \cdots = \left(\frac{1}{3}\right)^n \varphi\left(\frac{t}{2^n}\right), \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (5)$$

Do φ liên tục nên $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi\left(\frac{t}{2^n}\right) = \varphi\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{t}{2^n}\right) = \varphi(0)$. Vậy từ (5) suy ra

$$\varphi(t) = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n \varphi\left(\frac{t}{2^n}\right)\right] = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \lim_{n\to+\infty} \varphi\left(\frac{t}{2^n}\right) = 0.\varphi(0) = 0.$$

Do đó $\varphi(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, dẫn đến $h(t-1) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ hay $h(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy $f(x) = x - \frac{3}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.211. *Tìm tất cả các hàm số f liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:*

$$f(x) = 2016, \ \forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \quad (1)$$
$$f(x) = f(2x-1), \ \forall x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]. \quad (2)$$

Giải. Ta sẽ chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì

$$f(x) = 2016,\ \forall x \in \left[0; 1 - \frac{1}{2^n}\right]. \tag{3}$$

Do (1) nên (3) đúng khi $n = 1$. Giả sử

$$f(x) = 2016,\ \forall x \in \left[0; 1 - \frac{1}{2^k}\right]\ (k \in \mathbb{N}^*). \tag{4}$$

Ta cần chứng minh: $f(x) = 2016,\ \forall x \in \left[0; 1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right]$. (5)

Để chứng minh (5) đúng ta chỉ cần xét $x \in \left[\frac{1}{2}; 1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right]$, lúc này

$$1 \le 2x \le 2 - \frac{1}{2^k} \Leftrightarrow 0 \le 2x - 1 \le 1 - \frac{1}{2^k} \Rightarrow f(2x-1) = 2016,$$

do đó, sử dụng (2) ta được $f(x) = f(2x-1) = 2016$. Bởi vậy

$$f(x) = 2016,\ \forall x \in \left[0; 1 - \frac{1}{2^n}\right]\ (\forall n \in \mathbb{N}^*). \tag{6}$$

Với mọi $x \in [0;1)$, tồn tại số tự nhiên n (đủ lớn) sao cho $x \in \left[0; 1 - \frac{1}{2^n}\right]$, do đó từ (6) được

$$f(x) = 2016,\ x \in [0;1). \tag{7}$$

Do hàm f liên tục trên đoạn $[0;1]$ nên

$$f(1) = f\left(\lim_{n\to+\infty}(1 - \frac{1}{2^n})\right) = \lim_{n\to+\infty} f\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \overset{\text{do (7)}}{=} \lim_{n\to+\infty} 2016 = 2016. \tag{8}$$

Từ (7) và (8) suy ra $f(x) = 2016,\ x \in [0;1]$. Thử lại thấy thỏa mãn.

2.7.4 Sử dụng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

Trong mục này ta sẽ sử dụng các kết quả sau về hàm liên tục:

- (Định lí Giá trị trung gian). Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì $f(x)$ lấy tất cả các giá trị từ $f(a)$ đến $f(b)$.
- Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì nó có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a;b]$.

Lưu ý. Nếu $\max\limits_D f(x) = \min\limits_D f(x)$ thì f là hàm hằng trên D.

Bài toán 2.212. *Tìm tất cả các hàm liên tục $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{1+x}{2}\right)\right],\ \forall x \in [0;1]. \tag{1}$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Do f liên tục trên đoạn $[0;1]$ nên tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó. Đặt:

$$\max_{[0;1]} f(x) = f(x_0),\ \min_{[0;1]} f(x) = f(y_0)\ \ (x_0, y_0 \in [0;1]).$$

Khi đó $f(x_0) \ge f(x),\ \forall x \in [0;1]$. Do đó:

$$f(x_0) \ge f\left(\frac{x_0}{2}\right), f(x_0) \ge f\left(\frac{1+x_0}{2}\right).$$

Từ (1), ta có:

$$f(x_0) = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x_0}{2}\right) + f\left(\frac{1+x_0}{2}\right)\right] \le \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x_0}{2}\right) + f(x_0)\right]$$

$$\Rightarrow 2f(x_0) \le f\left(\frac{x_0}{2}\right) + f(x_0) \Rightarrow f(x_0) \le f\left(\frac{x_0}{2}\right) \Rightarrow f(x_0) = f\left(\frac{x_0}{2}\right).$$

Như vậy $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = \max\limits_{[0;1]} f(x)$. Sử dụng các lập luận ở trên suy ra:

$$f\left(\frac{x_0}{2^2}\right) = \max_{[0;1]} f(x),\ f\left(\frac{x_0}{2^3}\right) = \max_{[0;1]} f(x), \ldots$$

$$\Rightarrow f(x_0) = f\left(\frac{x_0}{2}\right) = f\left(\frac{x_0}{2^2}\right) = \cdots = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right),\ \forall n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Từ (2), sử dụng tính liên tục của hàm f và $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_0}{2^n} = 0$, ta thu được:

$$f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = f\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{x_0}{2^n}\right) = f(0).$$

Vậy $\max\limits_{[0;1]} f(x) = f(0)$. Tương tự, ta có:

$$f(y_0) \le f\left(\frac{y_0}{2}\right),\ f(y_0) \le f\left(\frac{1+y_0}{2}\right).$$

Từ (1) suy ra:

$$f(y_0) = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{y_0}{2}\right) + f\left(\frac{1+y_0}{2}\right)\right] \ge \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{y_0}{2}\right) + f(y_0)\right]$$

$$\Rightarrow 2f(y_0) \geq f\left(\frac{y_0}{2}\right) + f(y_0) \Rightarrow f(y_0) \geq f\left(\frac{y_0}{2}\right) \Rightarrow f(y_0) = f\left(\frac{y_0}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(y_0) = f\left(\frac{y_0}{2}\right) = f\left(\frac{y_0}{2^2}\right) = \cdots = f\left(\frac{y_0}{2^n}\right), \forall n = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow \min_{[0;1]} f(x) = f(y_0) = \lim_{n\to+\infty} f(y_0) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{y_0}{2^n}\right) = f\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{y_0}{2^n}\right) = f(0).$$

Như vậy $\max\limits_{[0;1]} f(x) = \min\limits_{[0;1]} f(x) = f(0)$, suy ra f là hàm hằng trên đoạn $[0;1]$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.213. *Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$2f(x) = f\left(\frac{x}{x^2+1}\right) + f\left(\frac{1-x}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Vì hàm f liên tục trên đoạn $[-1;1]$ nên tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó, vậy đặt

$$M = \max_{[-1;1]} f(x) = f(x_0), \; m = \min_{[-1;1]} f(x) = f(y_0).$$

Ta có $\left|\frac{x}{x^2+1}\right| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} \in [-1;1]$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Từ (1) suy ra

$$2M = 2f(x_0) = f\left(\frac{x_0}{x_0^2+1}\right) + f\left(\frac{1-x_0}{2}\right). \tag{2}$$

Để ý rằng $\frac{1-x_0}{2} \in [-1;1]$ (do $x_0 \in [-1;1]$) và $\frac{x_0}{x_0^2+1} \in [-1;1]$ nên

$$f\left(\frac{x_0}{x_0^2+1}\right) \leq M, \; f\left(\frac{1-x_0}{2}\right) \leq M,$$

kết hợp với (2) ta được $f\left(\frac{x_0}{x_0^2+1}\right) = M$. Xây dựng dãy số $(x_n)_{n=0}^{+\infty}$ như sau:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n^2+1}, \; \forall n = 0, 1, 2 \ldots$$

Theo trên suy ra $f(x_n) = M$, $\forall n = 0, 1, 2 \ldots$ Ta có $-1 \leq x_n \leq 1$, $\forall n$. Nếu $x_0 = 0$ thì $x_n = 0$ với mọi n, suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. Nếu $x_0 > 0$ thì $x_n > 0$ với mọi n, suy ra $x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n^2+1} < x_n$, dẫn tới dãy (x_n) giảm, do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. Nếu $x_0 < 0$ thì $x_n < 0$ với mọi n, suy ra dãy (x_n) tăng, do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. Tóm lại $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. Mà hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên

$$M = \lim_{n\to+\infty} M = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = f(0).$$

Tương tự ta chứng minh được $m = f(0)$, suy ra $M = m$. Vậy

$$f(x) = f(0), \; \forall x \in [-1;1]. \tag{3}$$

Do $\frac{x}{x^2+1} \in [-1;1]$ nên từ (1) và (3) ta có

$$2f(x) = f(0) + f\left(\frac{1-x}{2}\right), \; \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Đặt $f(x) = f(0) + g(x)$, khi đó hàm g liên tục trên $\mathbb{R}$ và thay vào (4) được

$$2g(x) = g\left(\frac{1-x}{2}\right), \; \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Từ (5), thay x bởi $1 - 2x$ ta được

$$2g(1-2x) = g(x), \; \forall x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Từ (6), thay x bởi $\frac{1-x}{2}$, ta được

$$2g(x) = g\left(\frac{1-x}{2}\right), \; \forall x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Với $x_0 \in \mathbb{R}$, xét dãy số (x_n) như sau: $x_{n+1} = \frac{1-x_n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó

$$3x_n - 1 = \frac{3 - 3x_{n-1}}{2} - 1 = \frac{-(3x_{n-1} - 1)}{2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 (3x_{n-2} - 1)$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 (3x_{n-3} - 1) = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (3x_0 - 1).$$

Suy ra $x_n = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{3x_0 - 1}{3} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{3}$. Từ (7) ta có

$$2g(x_n) = g(x_{n+1}) \Rightarrow g(x_n) = 2g(x_{n-1}) = 2^2 g(x_{n-2}) = \cdots = 2^n g(x_0). \tag{8}$$

Vì hàm g liên tục trên $\mathbb{R}$ nên từ (8) ta có

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = \lim_{n\to+\infty} g(x_n) = \lim_{n\to+\infty} 2^n g(x_0). \tag{9}$$

Do $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ nên từ (9) suy ra $g(x_0) = 0$. Do x_0 lấy tùy ý trong $\mathbb{R}$ nên $g(x) \equiv 0$, suy ra f là hàm hằng trên $\mathbb{R}$. Sau khi thử lại ta kết luận: Tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài đều có dạng

$$f(x) = C, \; \forall x \in \mathbb{R} \; (C \text{ là hằng số bất kì}).$$

Lưu ý. Từ (5), vận dụng chú ý **11** ở trang 52, ta có thể giải quyết tiếp như sau: Đặt $x = t + \frac{1}{3}$, thay vào (5) ta được

$$2g\left(t+\frac{1}{3}\right) = g\left(-\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}\right),\ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow h(t) = \frac{1}{2}h\left(-\frac{1}{2}t\right),\ \forall t \in \mathbb{R}\ \left(\text{với } h(t) = g\left(t+\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$\Rightarrow h(t) = (\frac{1}{2})^n h\left((-\frac{1}{2})^n t\right),\ \forall t \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow h(t) = \lim_{n\to+\infty}\left[(\frac{1}{2})^n h\left((-\frac{1}{2})^n t\right)\right] = 0.h(0) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow h(x) \equiv 0 \Rightarrow g(x) \equiv 0.$$

Vậy $f(x) = C,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (C là hằng số bất kì).

2.7.5 Phương trình hàm Cauchy (Côsi) và ứng dụng

Khi giải phương trình hàm với cặp biến tự do có giả thiết hàm liên tục ta thường sử dụng kết quả của bài toán 2.214 (khi thi HGS ta được phép sử dụng kết quả này mà không cần chứng minh lại).

Bài toán 2.214 (Phương trình hàm Cauchy). *Hãy tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn đề bài, khi đó ta có (1). Trong (1) lấy $y = x$ ta được

$$f(2x) = 2f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Trong (2) lấy $x = 0$ ta được $f(0) = 0$. Từ (1) và (2) và bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được

$$f(nx) = nf(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Trong (1) lấy $y = -x$ và sử dụng $f(0) = 0$ ta được

$$f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Bởi vậy khi $n = -1, -2, \ldots$, sử dụng (3) và (4) ta có

$$f(nx) = f(-n(-x)) = -nf(-x) = nf(x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Từ (3) và (5) suy ra

$$f(nx) = nf(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Với mọi $n = 1, 2, \ldots$, sử dụng (3) ta có

$$f(x) = f\left(n.\frac{1}{n}x\right) = nf\left(\frac{1}{n}x\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n}f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Với mọi $m, n \in \mathbb{Z}$ và $n > 0$, sử dụng (7) và (6) ta có

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = f\left(m.\frac{1}{n}x\right) = mf\left(\frac{1}{n}x\right) = m.\frac{1}{n}f(x) = \frac{m}{n}f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bởi vậy

$$f(rx) = rf(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{Q}. \tag{8}$$

Trong (8) lấy $x = 1$ ta được

$$f(r) = rf(1), \forall r \in \mathbb{Q}. \tag{9}$$

Với mỗi $x \in \mathbb{R}$ tồn tại dãy số hữu tỉ $\{r_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = x$. Vì f liên tục nên

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to+\infty} r_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(r_n) = \lim_{n\to+\infty} r_n f(1) = f(1)\lim_{n\to+\infty} r_n = f(1)x.$$

Vậy

$$f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}\ (\text{với } C \text{ là hằng số tùy ý}). \tag{10}$$

Thử lại thấy thỏa mãn. Ta kết luận: tất cả các hàm số cần tìm đều có dạng như ở (10).

Nhận xét 4. *Lời giải của bài toán 2.214 là một lời giải khuôn mẫu, kinh điển, nó sẽ được lặp lại nhiều lần trong quyển sách này. Bạn đọc nên xem thêm phương pháp giải cũng như các bài toán của dạng này ở bài 2.8: Phương trình hàm dạng $f(G(x,y)) = F(f(x), f(y))$ (ở trang 320).*

Nhận xét 5. *Trong bài toán 2.214, nếu ta thay giả thiết hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ bởi hàm số f liên tục tại điểm x_0 thì kết quả trên vẫn đúng. Thật vậy, nếu hàm số f liên tục tại điểm x_0 thì $\lim\limits_{t\to x_0} f(t) = f(x_0)$. Bởi vậy*

$$\begin{aligned}\lim_{u\to x} f(u) &= \lim_{u-x+x_0\to x_0} f((u-x+x_0)+(x-x_0))\\ &= \lim_{t\to x_0} f(t+(x-x_0)) = \lim_{t\to x_0} f(t) + f(x-x_0)\\ &= f(x_0) + f(x-x_0) = f(x_0+x-x_0) = f(x),\end{aligned}$$

hay f liên tục tại $x \in \mathbb{R}$. Như vậy, nếu hàm số f xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục tại điểm $x_0 \in \mathbb{R}$ và thỏa mãn phương trình hàm Cauchy thì f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài toán 2.215. *Tìm các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(x+y)=f(x)-f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Cho $y=0$ ta được $f(x)=f(x)-f(0)\Rightarrow f(0)=0$. Cho $x=0$ ta được

$$f(y)=f(0)-f(y),\forall y\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f(y)=0,\forall y\in\mathbb{R}.$$

Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Lưu ý. Giả thiết hàm f liên tục trong đề bài là thừa.

Bài toán 2.216. *Tìm các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(x+y)=f(x)f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Dễ thấy hàm $f(x)\equiv 0$ thỏa mãn (1). Tiếp theo xét $f(x)\not\equiv 0$. Khi đó tồn tại $x_0\in\mathbb{R}$ sao cho $f(x_0)\neq 0$. Theo (1) ta có

$$f(x_0)=f\left(x+(x_0-x)\right)=f(x).f(x_0-x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Suy ra $f(x)\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Vậy đặt $\ln f(x)=g(x)$ $\left(f(x)=e^{g(x)}\right)$. Khi đó hàm g liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$e^{g(x+y)}=e^{g(x)}.e^{g(y)},\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow e^{g(x+y)}=e^{g(x)+g(y)},\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow g(x+y)=g(x)+g(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Theo kết quả bài toán 2.214 suy ra $g(x)=bx,\forall x\in\mathbb{R}$ (b là hằng số). Vậy $f(x)=e^{bx}=a^x$, với $a>0$ tùy ý. Các hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x)\equiv 0,\ f(x)\equiv a^x\ (a \text{ là hằng số dương}).$$

Lưu ý. Phương trình hàm (1) của bài toán 2.216 cũng được gọi là phương trình hàm Cauchy. Kết quả bài toán 2.216 được phép sử dụng mà không cần chứng minh lại.

Bài toán 2.217. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và thỏa mãn: $f(xy)=f(x)+f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$.* (1)

Giải.
a) Trước hết ta tìm hàm số f trên khoảng $(0;+\infty)$, muốn vậy, xét $x>0$ và $y>0$. Đặt $x=e^u$, $y=e^v$ và $f\left(e^t\right)=g(t)$. Khi đó (1) có dạng

$$g(u+v)=g(u)+g(v),\forall u,v\in\mathbb{R}. \quad (2)$$

Theo bài toán 2.214 ở trang 278 suy ra $g(t)=bt$, do đó

$$f(x)=a\ln x,\forall x>0,\ a\in\mathbb{R},\ \text{tùy ý}.$$

b) Tiếp theo ta tìm hàm số f trên khoảng $(-\infty;0)$, muốn vậy,xét $x<0$ và $y<0$ thì $xy>0$. Trong (1) lấy $y=x$ và sử dụng kết quả phần a) ta được

$$f(x)=\frac{1}{2}f\left(x^2\right)=\frac{1}{2}b\ln x^2=b\ln|x|,\ \text{với } b\in\mathbb{R}\ \text{tùy ý}.$$

Thử lại ta thấy hàm $f(x)=b\ln|x|$, với b thuộc $\mathbb{R}$ tùy ý, thỏa mãn các điều kiện của bài toán đặt ra. Vậy

$$f(x)=b\ln|x|,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ \text{với } b\in\mathbb{R}\ \text{tùy ý}.$$

Bài toán 2.218. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy,\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Hướng dẫn. Xét hàm số $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ như sau: $g(x)=f(x)-\frac{x^2}{2},\forall x\in\mathbb{R}$.
Thay vào phương trình hàm đã cho ta được

$$g(x+y)=g(x)+g(y),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Sau đó sử dụng kết quả bài toán 2.214 ở trang 278.
Lưu ý. Phép đặt $f(x)=g(x)+\frac{x^2}{2}$ tìm ra như sau: Cần đặt $f(x)=g(x)+cx^2$, với c tìm sau, sao cho khi thay vào phương trình hàm đã cho ta được

$$g(x+y)=g(x)+g(y),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Thay vào ta có

$$g(x+y)+c(x+y)^2=g(x)+cx^2+g(y)+cx^2+xy,\forall x,y\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow g(x+y)+2cxy=g(x)+g(y)+xy,\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Vậy để khử xy ở hai vế, ta cần chọn c sao cho $2c=1\Leftrightarrow c=\frac{1}{2}$.

Bài toán 2.219. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+x^2y+xy^2+xy,\forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (*)$$

Hướng dẫn. $f(x)=g(x)+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$. Thay vào (1) ta được

$$g(x+y)=g(x)+g(y),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Sau đó sử dụng kết quả bài toán 2.214 ở trang 278.

Lưu ý. Phép đặt $f(x) = g(x) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ được tìm ra như sau: Ta cần đặt

$$f(x) = g(x) + bx^2 + cx^3,$$

với b, c tìm sau, sao cho khi thay vào phương trình hàm đã cho ta được

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Thay vào ta có

$$\begin{aligned} &g(x+y) + b(x+y)^2 + c(x+y)^3 \\ =&g(x) + bx^2 + cx^3 + g(y) + by^2 + cy^3 + x^2y + xy^2 + xy. \end{aligned}$$

Vậy ta cần chọn b và c sao cho

$$2bxy + 3c(x^2y + xy^2) = x^2y + xy^2 + xy.$$

Nghĩa là ta cần có: $\begin{cases} 2b = 1 \\ 3c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (b; c) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$.

Bài toán 2.220. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + \frac{1}{2}(x^2y + xy^2) - xy, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Hướng dẫn. $f(x) = g(x) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

Nhận xét 6. *Phép đặt $f(x) = g(x) + f_0(x)$ trong các bài toán 2.218, 2.219, 2.220 để đưa về phương trình hàm $g(x+y) = g(x) + g(y)$ còn được tìm ra như sau: Ta tìm một nghiệm riêng $f_0(x)$ của phương trình hàm đã cho, sau đó đặt $f(x) = g(x) + f_0(x)$. Chẳng hạn trong bài toán 2.218, ta chọn nghiệm riêng $f_0(x) = \frac{x^2}{2}$. Khi tìm nghiệm riêng, thường thì ta tìm trong các lớp hàm hằng, hàm bậc nhất, hàm đa thức, hàm đơn điệu, hàm tuần hoàn...*

Bài toán 2.221. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện*

$$\begin{aligned} f(x+y-1) = &f(x-1) + f(y-1) + x^3y + xy^3 \\ &+ \frac{3}{2}(x^2y^2 + x^2y + xy^2) - \frac{xy}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Hướng dẫn. Đặt $f(x-1) = g(x) + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{4}$. Thay vào phương trình hàm đã cho ta được

$$\begin{aligned} &g(x+y) + \frac{(x+y)^4}{4} + \frac{(x+y)^3}{2} - \frac{(x+y)^2}{4} \\ =&g(x) + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{4} + g(y) + \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{2} - \frac{y^2}{4} \\ &+x^3y + xy^3 + \frac{3}{2}(x^2y^2 + x^2y + xy^2) - \frac{xy}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Suy ra g là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.222. *Tìm các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(x+y) + f(z) = f(x) + f(y+z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Đặt $f(0) = a$. Trong (1) lấy $z = 0$ ta được

$$f(x+y) + a = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Đặt $f(x) - a = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó g là hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hơn nữa thay vào (2) ta được

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Từ (3), sử dụng kết quả bài toán 2.214 ở trang 278 ta được $g(x) = bx, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy $f(x) = bx + a, \forall x \in \mathbb{R}$ (a và b là hằng số tùy ý). Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.223 (Phương trình hàm Jensen). *Tìm các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện:*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) lấy $y = 0$ ta được

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x) + a}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R} \ (\text{với } a = f(0)). \quad (2)$$

Từ (2) ta có

$$\begin{aligned} &\frac{f(x+y) + a}{2} = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &f(x+y) + a = f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3)$$

Xét hàm số $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ như sau $g(x)=f(x)-a, \forall x\in\mathbb{R}$. Vì f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên g liên tục trên $\mathbb{R}$. Thay vào (3) ta được

$$\begin{aligned} &g(x+y)+2a=g(x)+a+g(y)+a,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow &g(x+y)=g(x)+g(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4}$$

Từ (4) và sử dụng kết quả bài toán 2.214 ở trang 278, ta được:

$$g(x)\equiv bx\Rightarrow f(x)\equiv bx+a.$$

Thử lại thấy hàm số

$$f(x)=bx+a, \forall x\in\mathbb{R}\ (a,b \text{ là các hằng số})$$

thỏa mãn các yêu cầu đề bài, vậy đó là đáp số cần tìm.

Bài toán 2.224 (HSG Quốc gia 2006 - bảng B). *Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(x-y).f(y-z).f(z-x)+8=0, \forall x,y,z\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài, khi đó ta có (1). Thay $x=\dfrac{t}{2}$, $y=-\dfrac{t}{2}$, $z=0$ vào (1) ta được

$$f(t).\left[f\left(-\frac{t}{2}\right)\right]^2+8=0, \forall t\in\mathbb{R}.$$

Suy ra $f(t)<0, \forall t\in\mathbb{R}$. Vậy đặt $f(x)=-2^{g(x)}$. Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned} &\left[-2^{g(x-y)}\right].\left[-2^{g(y-z)}\right].\left[-2^{g(z-x)}\right]=-2^3, \forall x,y,z\in\mathbb{R}.\\ \Leftrightarrow &g(x-y)+g(y-z)+g(z-x)=3, \forall x,y,z\in\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2}$$

Đặt $h(x)=g(x)-1$, thay vào (2) ta được

$$h(x-y)+h(y-z)=-h(z-x), \forall x,y,z\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Đặt $u=x-y$, $v=y-z\Rightarrow u+v=x-z$. Từ (3) ta có

$$h(u)+h(v)=-h(-u-v), \forall u,v\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Trong (4), lấy $u=v=0$ ta được $h(0)=0$. Trong (4), lấy $v=0$ và sử dụng $h(0)=0$, suy ra $h(-u)=-h(u), \forall u\in\mathbb{R}$. Vậy từ (4) ta được

$$h(u)+h(v)=h(u+v), \forall u,v\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Từ (5), sử dụng kết quả bài toán 2.214 ở trang 278 ta được $h(x)=ax, \forall x\in\mathbb{R}$, với a là hằng số thực tùy ý nào đó. Vậy $g(x)=ax+1$, suy ra hàm số ban đầu là $f(x)=-2^{ax+1}$, với a là hằng số thực tùy ý nào đó. Thử lại thấy hàm số này thỏa mãn các yêu cầu bài toán.

Bài toán 2.225. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện*

$$\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2=f(x)f(y), \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Dễ thấy hàm $f\equiv 0$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Tiếp theo giả sử $f\not\equiv 0$, nghĩa là tồn tại $x_0\in\mathbb{R}$ sao cho $f(x_0)\neq 0$. Từ (1) ta có

$$f(x)\,f(2x_0-x)=\left[f\left(\frac{x+2x_0-x}{2}\right)\right]^2=[f(x_0)]^2>0\Rightarrow f(x)\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Trường hợp 1. $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$. Xét hàm số g như sau:

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\ln(f(x)),\ x\in\mathbb{R}.$$

Khi đó g liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$\begin{aligned} g\left(\frac{x+y}{2}\right)&=\ln\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]=\ln\left(\sqrt{f(x)f(y)}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left[\ln(f(x))+\ln(f(y))\right]=\frac{1}{2}\left[g(x)+g(y)\right], \forall x,y\in\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2}$$

Xét hàm số h như sau: $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=g(x)-g(0)$, $x\in\mathbb{R}$. Khi đó $h(0)=0$ và h liên tục trên $\mathbb{R}$. Từ (2) ta có

$$h\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{h(x)+h(y)}{2}, \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Trong (3) lấy $y=0$ ta được

$$h\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}h(x), \forall x\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$h(x+y)=h(x)+h(y), \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Từ (5), sử dụng kết quả bài toán 2.214 ở trang 278 ta được $h(x)=\lambda x, \forall x\in\mathbb{R}$, với λ là hằng số thực tùy ý nào đó. Đặt $\mu=g(0)$. Khi đó

$$g(x)=\lambda x+\mu\Rightarrow\ln(f(x))=\lambda x+\mu\Rightarrow f(x)=e^{\lambda x+\mu}=ae^{\lambda x}\ (a=e^{\mu}>0).$$

Thử lại thấy hàm số $f(x)=ae^{\lambda x}, \forall x\in\mathbb{R}$ $(a,\lambda$ là hằng số, $a>0)$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Trường hợp 2. $f(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $-f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$. Theo trường hợp 1 suy ra

$$-f(x)=be^{\alpha x}, \forall x\in\mathbb{R}\ (b,\alpha \text{ là hằng số, } b>0).$$

Vậy $f(x) = ce^{\beta x}, \forall x \in \mathbb{R}$ (c, β là hằng số). Thử lại thấy thỏa mãn.
Tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(x) = ce^{\beta x}, \forall x \in \mathbb{R}\ (c, \beta \text{ là hằng số}).$$

Bài toán 2.226. *Tìm tất cả các hàm số $f : (0;+\infty) \to (0;+\infty)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn*

$$f(f(xy) - xy) + xf(y) + yf(x) = f(xy) + f(x)f(y),\ \forall x, y \in (0;+\infty). \quad (1)$$

Giải. Từ (1) chọn $y = 1$ ta được

$$\begin{aligned} &f(f(x) - x) + xf(1) + f(x) = f(x) + f(x)f(1),\ \forall x \in (0;+\infty) \\ \Rightarrow &f(f(x) - x) = f(1)[f(x) - x],\ \forall x \in (0;+\infty). \end{aligned} \quad (2)$$

Do (2) nên (1) có thể viết lại thành

$$f(1)[f(xy) - xy] = f(xy) - xy + [f(x) - x][f(y) - y)],\ \forall x, y \in (0;+\infty).$$

Đặt $g(x) = f(x) - x$ ta được $f(1)g(xy) = g(xy) + g(x)g(y)$, suy ra

$$g(1)g(xy) = g(x)g(y),\ \forall x, y \in (0;+\infty). \quad (3)$$

Cũng từ (1) ta suy ra được $f(x) > x$ như vậy $g(x) > 0$. Vì f liên tục nên hàm g cũng liên tục. Thay $x = e^u, y = e^v$, với u, v thuộc $\mathbb{R}$ và đặt $g(e^t) = h(t)$ thì từ (3) ta suy ra

$$h(0)h(u+v) = h(u)h(v),\ \forall u, v \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

trong đó $h(u) > 0$, $\forall u \in \mathbb{R}$ và h cũng là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Tiếp tục đặt $k(x) = \ln(h(x))$ thì từ (4) ta suy ra

$$k(0) + k(u+v) = k(u) + k(v),\ \forall u, v \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

và k cũng là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Từ (5), đặt $m(x) = k(x) - k(0)$ ta được

$$m(u+v) = m(u) + m(v),\ \forall u, v \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

Từ (6), sử dụng kết quả bài toán 2.214 ở trang 278 ta được $m(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$, với a là hằng số. Suy ra $k(x) = ax + b$ với a, b là các hằng số thực. Như vậy

$$h(x) = e^{ax+b}, g(x) = g(e^{\ln x}) = e^{a\ln x + b} = e^b.x^a.$$

Cuối cùng $f(x) = x + Cx^a, \forall x > 0$, trong đó C là một hằng số dương và a là một hằng số thực. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.227. *Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho*

$$f\left(\sqrt{x^4 + y^4}\right) = f\left(x^2 - y^2\right) + f\left(\sqrt{2}xy\right),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) lấy $x = y = 0$ ta được $f(0) = 0$. Cho $x = 0$ được

$$f(t) = f(-t),\ \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Để ý rằng với $a \geq 0$, $b \geq 0$, luôn tồn tại $x \in \mathbb{R}$ và $y \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ \sqrt{2}xy = b. \end{cases}$$

Do đó

$$\begin{aligned} &f(a) + f(b) = f\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right), \forall a \geq 0, b \geq 0 \\ \Rightarrow &f\left(\sqrt{a}\right) + f\left(\sqrt{b}\right) = f\left(\sqrt{a+b}\right), \forall a \geq 0, b \geq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Đặt $g(x) = f(\sqrt{x})$, suy ra g là hàm liên tục trên $[0;+\infty)$ và

$$g(a+b) = g(a) + g(b), \forall a \geq 0, b \geq 0.$$

Suy ra $g(a) = ca$, với c là hằng số không âm. Vậy $f(x) \equiv cx^2$, với c là hằng số không âm. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.228. *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f^2(x) = f(x+y)f(x-y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Kí hiệu $P(u, v)$ chỉ việc thay x bởi u, thay y bởi v vào (1). Giả sử tồn tại $u \in \mathbb{R}$ sao cho $f(u) = 0$. Khi đó

$$P(x, u - x) \Rightarrow f^2(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại thấy $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn (1). Tiếp theo giả sử $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} &P\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right) \Rightarrow f^2\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)f(0) \Rightarrow \frac{f(x)}{f(0)} = \frac{f^2\left(\frac{x}{2}\right)}{f^2(0)} \text{ và } \frac{f(x)}{f(0)} > 0 \\ &\Rightarrow \ln\frac{f(x)}{f(0)} = 2\ln\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{f(0)},\ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow g(x) = 2g\left(\frac{x}{2}\right),\ \forall x \in \mathbb{R},\ \text{với } g(x) = \ln\frac{f(x)}{f(0)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) ta có

$$\frac{f^2(x)}{f^2(0)} = \frac{f(x+y)}{f(0)}.\frac{f(x-y)}{f(0)},\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2\ln\frac{f(x)}{f(0)} = \ln\frac{f(x+y)}{f(0)} + \ln\frac{f(x-y)}{f(0)},\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow 2g(x) = g(x+y)+g(x-y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$
$$\overset{\text{đo (2)}}{\Leftrightarrow} g(2x) = g(x+y)+g(x-y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (3)$$

Với mọi số thực u, v, đặt $\frac{u+v}{2} = x$, $\frac{u-v}{2} = y$. Từ (3) ta có

$$g(u+v) = g(u)+g(v),\ \forall u,v\in\mathbb{R}. \quad (4)$$

Từ (4), sử dụng kết quả bài toán 2.214 ở trang 278 ta được $g(x) \equiv ax$. Vì thế

$$\frac{f(x)}{f(0)} = c^{g(x)} = c^{ax} \Rightarrow f(x) = f(0)c^{ax} \Rightarrow f(x) = \alpha a^x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Thử lại thấy hàm số $f(x) = \alpha a^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn (1). Vậy tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x) = \alpha a^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, với α là hằng số tùy ý, a là hằng số dương.

Bài toán 2.229. *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$\{f(x+y)\} = \{f(x)+f(y)\},\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

(trong đó $[t]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá t và $\{t\} = t-[t]$).

Giải. Từ (1) ta có

$$f(x+y)-[f(x+y)] = f(x)+f(y)-[f(x)+f(y)],\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f(x+y)-f(x)-f(y) = [f(x+y)]-[f(x)+f(y)],\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (2)$$

Vế trái của (2) là hàm số liên tục theo x ứng với mọi y cố định cho trước còn vế phải nhận giá trị nguyên, nên từ (2) suy ra

$$f(x+y)-f(x)-f(y) = C\in\mathbb{Z},\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (3)$$

Đặt $f(x) = -C+g(x)$, thì $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cũng là hàm liên tục. Thay vào (3) được

$$g(x+y) = g(x)+g(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (4)$$

Từ (4), sử dụng kết quả bài toán 2.214 ở trang 278 ta được $g(x) = ax, \forall x\in\mathbb{R}$, với a là hằng số thực tùy ý nào đó. Suy ra $f(x) = ax - C$, $C\in\mathbb{Z}$. Thử lại thấy hàm số này thỏa mãn các yêu cầu bài toán.

Bài toán 2.230 (Đề nghị thi Olympic 30/4/2010). *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục tại 0 và thỏa mãn: Với mọi số thực x, y ta có*

$$f(x+y)[f(x)+1][f(y)+1] = [f(x)+f(y)+2f(x)f(y)][f(x+y)+1]. \quad (1)$$

Giải. Từ (1) thay x bởi $\frac{x}{2}$ và thay y bởi $\frac{x}{2}$ ta được

$$f(x)\left[f\left(\frac{x}{2}\right)+1\right]^2 = 2\left[f\left(\frac{x}{2}\right)+f^2\left(\frac{x}{2}\right)\right][f(x)+1],\forall x\in\mathbb{R}. \quad (2)$$

- Nếu tồn tại $x_0\in\mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) = -1$ thì từ (2) lấy $x = x_0$ ta được

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right)+1 = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{x_0}{2}\right) = -1.$$

Tương tự ta được $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = -1$, $\forall n = 1,2,\ldots$ Từ đây sử dụng giả thiết hàm f liên tục tại 0 suy ra $-1 = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_0}{2^n}\right) = f(0)$. Từ (1) cho $y = 0$ và sử dụng $f(0) = -1$ được $[f(x)+1]^2 = 0, \forall x\in\mathbb{R}$ hay $f(x)\equiv -1$. Thử lại thấy đúng.

- Nếu $f(x)\neq -1, \forall x\in\mathbb{R}$ thì ta viết lại (1) như sau:

$$\frac{f(x+y)}{f(x+y)+1} = \frac{f(x)+f(y)+2f(x)f(y)}{[f(x)+1][f(y)+1]},\forall x,y\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \frac{f(x+y)}{1+f(x+y)} = \frac{f(x)}{1+f(x)}+\frac{f(y)}{1+f(y)},\forall x,y\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow g(x+y) = g(x)+g(y),\forall x,y\in\mathbb{R}\ \left(\text{với } g(x) = \frac{f(x)}{1+f(x)}\right). \quad (3)$$

Do f liên tục tại 0 nên suy ra g liên tục tại 0, do đó từ (3) suy ra g liên tục trên $\mathbb{R}$ (do nhận xét **5** ở trang 279). Vậy áp dụng kết quả bài toán 2.214 suy ra $g(x) = ax, \forall x\in\mathbb{R}$ (a là hằng số). Lúc này

$$(1-ax)f(x) = ax,\ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (4)$$

Nếu $a\neq 0$ thì với $x\neq\frac{1}{a}$, từ (4) suy ra

$$f(x) = \frac{ax}{1-ax},\ \forall x\neq\frac{1}{a}. \quad (5)$$

Từ (5) lấy $x = \frac{2}{a}$ ta được $f\left(\frac{2}{a}\right) = -2$. Nếu $f\left(\frac{1}{a}\right) = b$ thì từ (1) cho $x = y = \frac{1}{a}$ ta được $-2(b+1)^2 = -(2b+2b^2) \Leftrightarrow 4b+2 = 2b \Leftrightarrow b = -1$. Vậy $f\left(\frac{1}{a}\right) = -1$, mâu thuẫn, do đó $a = 0$, dẫn tới $f(x)\equiv 0$. Thử lại thấy thỏa mãn. Có hai hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x)\equiv -1$ và $f(x)\equiv -0$.

Bài toán 2.231. *Tìm các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=1$ và*

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

$$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=1,\ \forall x\neq 0. \tag{2}$$

Giải.
Cách 1. Từ (1) cho $x=y=0$ được $f(0)=0$. Ta sẽ chứng minh f liên tục tại 0. Từ (2) suy ra $f(x)$ và $f\left(\frac{1}{x}\right)$ cùng dấu. Vì hàm số $y=x+\frac{1}{x}$ có tập giá trị là $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$ nên với y thỏa $|y|\geq 2$, tồn tại $x\neq 0$ để $y=x+\frac{1}{x}$. Khi đó

$$\left|f\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|=\left|f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right|=|f(x)|+\left|f\left(\frac{1}{x}\right)\right|\geq 2\sqrt{\left|f(x).f\left(\frac{1}{x}\right)\right|}=2.$$

Vậy, với mọi y thỏa $|y|\geq 2$ ta có $f(y)\geq 2$. Với y thỏa $0<|y|\leq\frac{1}{2}$, ta có $\left|\frac{1}{y}\right|\geq 2$, theo trên suy ra

$$1=\left|f(y)f\left(\frac{1}{y}\right)\right|=|f(y)|\left|f\left(\frac{1}{y}\right)\right|\geq 2\,|f(y)|\Rightarrow|f(y)|\leq\frac{1}{2}.$$

Mà $|f(0)|=0\leq\frac{1}{2}$ nên với y thỏa $|y|\leq\frac{1}{2}$, ta có $|f(y)|\leq\frac{1}{2}$. Với $|y|\leq\frac{1}{2^2}$ thì $|2y|\leq\frac{1}{2}$, do đó $2\,|f(y)|=|2f(y)|=|f(2y)|\leq\frac{1}{2}\Rightarrow|f(y)|\leq\frac{1}{2^2}$. Bằng quy nạp ta chứng minh được

$$|f(y)|\leq\frac{1}{2^n},\ \text{với mọi } y \text{ thỏa mãn } |y|\leq\frac{1}{2^n}\ (n=2,3,\ldots). \tag{3}$$

Ta cần chứng minh $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$. Với mọi $\varepsilon>0$, tồn tại $n\in\mathbb{N}^*$ sao cho $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$. Với mọi x sao cho $|x|<\frac{1}{2^n}$, theo (3) ta có $|f(x)|<\varepsilon$, suy ra $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$. mà $f(0)=0$ nên $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$, dẫn tới hàm f liên tục tại 0. Do (1) và hàm f liên tục tại 0 nên sử dụng nhận xét **5** ở trang 279 suy ra f liên tục trên $\mathbb{R}$. Sử dụng kết quả bài toán 2.214 suy ra $f(x)=ax,\forall x\in\mathbb{R}$ (a là hằng số). Mà $f(1)=1$ nên $a=1$. Vậy $f(x)\equiv x$, thử lại thấy thỏa mãn.
Cách 2. Ta chứng minh được $f(0)=0$, $f(1)=1$ và

$$f(x-y)=f(x)-f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Với mọi $x\notin\{0,1\}$, ta có

$$f\left(\frac{1}{x(1-x)}\right)=f\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)\overset{\text{do (1)}}{=}f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)$$
$$\overset{\text{do (2)}}{=}\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(1-x)}=\frac{f(1-x)+f(x)}{f(x)f(1-x)}\overset{\text{do (1)}}{=}\frac{f(1)}{f(x)f(1-x)}$$
$$=\frac{1}{f(x)f(1-x)}=\frac{1}{f(x)\,[f(1)-f(x)]}=\frac{1}{f(x)-f^2(x)}. \tag{4}$$

Mặt khác

$$f\left(\frac{1}{x(1-x)}\right)\overset{\text{do (2)}}{=}\frac{1}{f(x-x^2)}=\frac{1}{f(x)-f(x^2)}. \tag{5}$$

Từ (4) và (5) suy ra

$$f(x)-f^2(x)=f(x)-f(x^2)\Rightarrow f(x^2)=f^2(x)\Rightarrow f(x)\geq 0,\ \forall x\geq 0.$$

Vì thế, với $x>y$ ta có $f(x)-f(y)=f(x-y)\geq 0$, suy ra f là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Theo bài toán 2.167 ở trang 217 ta có

$$f(x)=kx,\forall x\in\mathbb{R}\ (k \text{ là hằng số}).$$

Do $f(1)=1$ nên $k=1$. Vậy $f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.232 (IMC 2010). *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện*

$$f(xy+x+y)=f(xy)+f(x)+f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn đề bài. Từ (1) cho $x=y=0$ ta được $f(0)=0$. Cho $y=-1$ vào (1) thu được kết quả f là hàm lẻ. Cho $y=1$ vào (1) ta được

$$f(2x+1)=2f(x)+f(1),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Sử dụng (1) và (2) ta được

$$f\left(2(xy+x+y)+1\right)=2f(xy+x+y)+f(1)=2\left[f(x)+f(y)+f(xy)\right]+f(1).$$

Mặt khác cũng theo (1) và (2) ta có

$$\begin{aligned}f\left(2(xy+x+y)+1\right)&=f\left(2x+1+y(2x+1)+y\right)\\&=f(2x+1)+f(y(2x+1))+f(y)\\&=2f(x)+f(1)+f(y)+f(2xy+y).\end{aligned}$$

Do đó

$$f(2xy+y)=f(y)+2f(xy),\forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Cho $x = \dfrac{-1}{2}$ vào (3) với chú ý $f(0) = 0$ ta có

$$f(y) = -2f\left(\frac{-y}{2}\right) = 2f\left(\frac{y}{2}\right).$$

Từ đây kết hợp với (3) ta được

$$f(2xy + y) = f(y) + f(2xy), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Với mọi số thực u và v. Nếu $v = 0$ thì $f(u + v) = f(u) + f(v)$. Nếu $v \neq 0$ thì đặt $x = \dfrac{u}{2v}$ và $y = v$. Khi đó

$$f(u + v) = f(2xy + y) \overset{\text{do (4)}}{=} f(2xy) + f(y) = f(u) + f(v).$$

Tóm lại $f(u + v) = f(u) + f(v)$, $\forall u, v \in \mathbb{R}$. Theo kết quả bài toán 2.214 ở trang 278 suy ra $f(x) \equiv ax$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.233. *Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f\left(f\left(f\left(x + y + xy\right)\right)\right) = f\left(x\right) + f\left(y\right) + f\left(xy\right), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Từ (1) cho $y = 0$, ta có $f_3(x) = f(x) + 2f(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, trong đó $f_3(x) = f(f(f(x)))$. Từ đó suy ra

$$f(x) + f(y) + f(xy) = f_3(x + y + xy) = f(x + y + xy) + 2f(0), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Đặt $g(x) = f(x) - f(0)$ thì g cũng là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và từ (2) suy ra

$$g(xy + x + y) = g(x) + g(y) + g(xy), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Từ (3), sử dụng bài toán 2.232 ở trang 291 ta được $g(x) \equiv ax$. Do đó

$$f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned}
&a\left(a\left[a\left(xy + x + y\right) + b\right] + b\right) + b = ax + b + ay + b + axy + b \\
\Leftrightarrow &a\left(a^2\left(xy + x + y\right) + ab + b\right) + b = ax + b + ay + b + axy + b \\
\Leftrightarrow &a^3\left(xy + x + y\right) + a^2b + ab + b = a(xy + x + y) + 3b \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} a^3 = a \\ a^2b + ab + b = 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \{0, 1, -1\} \\ a^2b + ab = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 1 \\ b \text{ tùy ý} \end{cases} \\ \begin{cases} a = -1 \\ b = 0. \end{cases} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x) \equiv 0, \ f(x) \equiv x + b, \ f(x) \equiv -x.$$

Bài toán 2.234. *Cho trước $a \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$x^2 f(y) + y f(x^2) = f(xy) + a, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Từ (1) cho $y = 0$ được $x^2 f(0) = f(0) + a$, $\forall x \in \mathbb{R}$, điều này chỉ xảy ra khi $\begin{cases} f(0) = 0 \\ a = 0. \end{cases}$ Vậy nếu $a \neq 0$ thì bài toán vô nghiệm. Xét $a = 0$, khi đó

$$(1) \Leftrightarrow x^2 f(y) + y f(x^2) = f(xy), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ (2) cho $x = y = 1$ được $f(1) = 0$. Từ (2) cho $y = 1$ được

$$f(x^2) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ (2) cho $x = y$ được $x^2 f(x) + x f(x^2) = f(x^2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra

$$\begin{aligned}
&x^2 f(x) + x f(x) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow &\left(x^2 + x - 1\right) f(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow &f(x) = 0, \ \forall x \notin \left\{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

Do f liên tục tại $\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ nên

$$\lim_{x \to \frac{\sqrt{5}-1}{2}} f(x) = f\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) = \lim_{x \to \frac{\sqrt{5}-1}{2}} 0 = 0.$$

Tương tự, $f\left(\dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right) = 0$. Vậy $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Lưu ý. Thay giả thiết f liên tục trên $\mathbb{R}$ bởi giả thiết f là hàm không giảm (hoặc không tăng) trên $\mathbb{R}$ ta được kết quả tương tự.

Bài toán 2.235. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(x + f(y)\right) = 2y + f(x), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Nhận xét rằng f là một đơn ánh. Thật vậy, nếu $f(y_1) = f(y_2)$ thì ứng với mỗi x ta có

$$f\left(x + f(y_1)\right) = f\left(x + f(y_2)\right) \Rightarrow 2y_1 + f(x) = 2y_2 + f(x) \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Gọi T là tập giá trị của f, khi đó $T = \{f(y) | y \in \mathbb{R}\}$. Trong (1) lấy $x = 0$ được

$$f\left(f(y)\right) = 2y + f(0), \ \forall y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Do $2y+f(0)$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$ nên từ (2) suy ra $f(f(y))$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$, hay $\{f(f(y))\,|y\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$. Mà $\{f(f(y))\,|y\in\mathbb{R}\}\subset T$ nên $T=\mathbb{R}$. Do đó tồn tại a sao cho $f(a)=0$. Trong (1) lấy $y=a$ được

$$f(x)=2a+f(x)\Rightarrow a=0\Rightarrow f(0)=0.$$

Thay vào (2) được

$$f(f(y))=2y,\ \forall y\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Trong (1) thay $x=f(t)$ và sử dụng (3) ta được

$$f(f(t)+f(y))=2y+f(f(t))=2y+2t=2(y+t)=f(f(y+t)). \tag{4}$$

Mà f là đơn ánh nên từ (4) suy ra

$$f(t+y)=f(t)+f(y),\ \forall t,y\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Từ (5), sử dụng kết quả bài toán 2.214 ở trang 278 ta được $f(x)=ax,\forall x\in\mathbb{R}$, với a là hằng số thực. Thay vào (1) ta được

$$a(x+ay)=2y+ax,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Từ (6) cho $x=y=1$ ta được $a(1+a)=2+a\Leftrightarrow a^2=2\Leftrightarrow a=\pm\sqrt{2}$. Vậy

$$f(x)=\sqrt{2}x,\ \forall x\in\mathbb{R}\ ;f(x)=-\sqrt{2}x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Thử lại thấy hàm số này thỏa mãn các yêu cầu bài toán.

Lưu ý.

- Ta có thể chứng minh $f(0)=0$ nhanh hơn như sau: Từ (1) lấy $x=y=0$ ta thu được $f(f(0))=f(0)$, từ đây và do f là đơn ánh nên $f(0)=0$. Hoặc đặt $f(0)=\alpha$, khi đó $f(\alpha)=\alpha$, từ (1) cho $x=0$ và $y=\alpha$ ta được

$$f(f(\alpha))=2\alpha+\alpha\Rightarrow\alpha=2\alpha+\alpha\Rightarrow\alpha=0\Rightarrow f(0)=0.$$

- Từ (3) suy ra f là toàn ánh. Sử dụng (3) thì (1) trở thành

$$\begin{aligned}&f(x+f(y))=f(x)+f(f(y)),\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\ \Rightarrow&f(x+t)=f(x)+f(t),\ \forall x,t\in\mathbb{R}\ \big(\text{do } f \text{ là toàn ánh}\big)\\ \Rightarrow&f(x)=ax,\ \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

- Từ kết quả f đơn ánh và liên tục suy ra f là hàm đơn điệu, từ đây kết hợp với (5) và sử dụng bài toán 2.167 (ở trang 217) ta cũng thu được kết quả.

Bài toán 2.236. *Tìm các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(x+f(y))=y+f(x+1),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (1).

$$P(0,y+1-f(1))\Rightarrow f(f(y+1-f(1)))=y+1,\ \forall y\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Thực hiện $P(x-f(1),f(y+1-f(1)))$ và sử dụng (2) ta được

$$f(x-f(1)+y+1)=f(y+1-f(1))+f(x+1-f(1)),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Đặt $g(x)=f(x+1-f(1))$, khi đó g là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và theo (3) thì

$$\begin{aligned}&g(x+y)=g(x)+g(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\ \Rightarrow&g(x)=ax\Rightarrow f(x)=a[x+f(1)-1]\Rightarrow f(x)=ax+b,\ \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&a(x+ay+b)+b=y+a(x+1)+b,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&a^2y+ab=y+a,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}a^2=1\\ ab=a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\pm1\\ b=1.\end{cases}\end{aligned}$$

Vậy có hai hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là $f(x)\equiv x+1$, $f(x)\equiv -x+1$.

Bài toán 2.237. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+f(y+f(z)))=f(x)+f(f(y))+f(f(f(z))),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Kí hiệu $P(u,v,w)$ chỉ phép thay x bởi u, thay y bởi v, thay z bởi w vào phương trình (1). Lần lượt thực hiện $P(0,y-f(z),z)$, $P(x,y-f(z),z)$ được

$$f(f(y))=f(0)+f(f(y-f(z)))+f(f(f(z))),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

$$f(x+f(y))=f(x)+f(f(y-f(z)))+f(f(f(z))),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$f(x+f(y))=f(x)+f(f(y))-f(0),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Đặt $g(x)=f(x)-f(0)$, $A=\{f(x)|x\in\mathbb{R}\}$. Vì f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm g cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Từ (4) suy ra

$$g(x+y)=g(x)+g(y),\ \forall x\in\mathbb{R},\ y\in A. \tag{5}$$

Với mọi $x\in\mathbb{R}$, $y\in A$ ta có $g(x)=g((x-y)+y)\overset{\text{do (5)}}{=}g(x-y)+g(y)$. Suy ra

$$g(x-y)=g(x)-g(y),\ \forall x\in\mathbb{R},\ y\in A. \tag{6}$$

Với mọi $x\in\mathbb{R}, y_1\in A, y_2\in A$, sử dụng (5) và (6) ta được

$$g(x+y_1+y_2)=g(x+y_1)+g(y_2)=g(x)+g(y_1)+g(y_2)$$

$$= g(x) + g(y_1 + y_2). \quad (7)$$

$$g(x + y_1 - y_2) = g(x + y_1) - g(y_2) = g(x) + g(y_1) - g(y_2)$$
$$= g(x) + g(y_1 - y_2). \quad (8)$$

Từ (7) và (8) suy ra với mọi $x \in \mathbb{R}$, y là tổng và hiệu hữu hạn các phần tử của A thì

$$g(x + y) = g(x) + g(y).$$

• Trường hợp 1: Tập A có đúng một phần tử. Khi đó f là hàm hằng, thay vào (1) được $f(x) \equiv 0$.

• Trường hợp 2: Tập A có nhiều hơn một phần tử. Do hàm g liên tục nên tồn tại $u < v$ sao cho $[u; v] \subset A$ và mọi số thực đều được biểu diễn thành tổng và hiệu hữu hạn các phần tử của A. Vì thế nên

$$g(x + y) = g(x) + g(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ đây suy ra $g(x) \equiv ax$, do đó $f(x) \equiv ax + b$. Thay vào (1) ta được

$$a[x + a(y + az + b) + b] = ax + b + a(ay + b) + b + a[a(az + b) + b]$$
$$\Leftrightarrow ax + a^2(y + az + b) + ab = ax + a(ay + b) + a^2(az + b) + 2b + ab$$
$$\Leftrightarrow ax + a^2(y + az + b) = ax + a(ay + b) + a^2(az + b) + 2b$$
$$\Leftrightarrow ax + a^2y + a^3z + a^2b = ax + a^2y + a^3z + a^2b + ab + 2b$$
$$\Leftrightarrow ab + 2b = 0 \Leftrightarrow b(a + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ a = -2. \end{array}\right.$$

Vậy các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x) \equiv 0, \ f(x) \equiv ax, \ f(x) = -2x + b.$$

2.7.6 Liên hệ giữa hàm liên tục và hàm đơn điệu

Có một kết quả rất sâu sắc về mối liên hệ giữa tính đơn điệu và tính liên tục của hàm số, đó là: Nếu hàm số f là đơn ánh và liên tục trên một khoảng nào đó thì nó đơn điệu thực sự trên khoảng đó.

Chứng minh. Giả sử f đơn ánh và liên tục trên $(a; b)$. Lấy hai giá trị cố định $\alpha, \beta \in (a; b)$ mà $\alpha < \beta$. Với mọi $x, y \in (a; b), x < y$, ta xét hàm số $g : [0; 1] \to \mathbb{R}$ được xác định như sau

$$g(t) = f((1 - t)\beta + ty) - f((1 - t)\alpha + tx), \forall t \in [0; 1].$$

Khi đó g là hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và

$$g(0) = f(\beta) - f(\alpha), \ g(1) = f(y) - f(x).$$

Nếu $g(0).g(1) = [f(\beta) - f(\alpha)][f(y) - f(x)] < 0$ thì tồn tại $\gamma \in (0; 1)$ sao cho $g(\gamma) = 0$. Nghĩa là: $f((1 - \gamma)\beta + \gamma y) - f((1 - \gamma)\alpha + \gamma x) = 0$. Hay

$$f((1 - \gamma)\beta + \gamma y) = f((1 - \gamma)\alpha + \gamma x).$$

Vì f là đơn ánh nên

$$(1 - \gamma)\beta + \gamma y = (1 - \gamma)\alpha + \gamma x \Leftrightarrow (1 - \gamma)(\beta - \alpha) = \gamma(x - y).$$

Điều này là vô lí vì vế phải âm còn vế trái dương. Bởi vậy

$$g(0).g(1) = [f(\beta) - f(\alpha)][f(y) - f(x)] \geq 0$$

Nhưng nếu $[f(\beta) - f(\alpha)][f(y) - f(x)] = 0$ thì $f(\beta) = f(\alpha)$ hoặc $f(y) = f(x)$. Điều này mâu thuẫn với f là đơn ánh. Bởi vậy

$$[f(\beta) - f(\alpha)][f(y) - f(x)] > 0.$$

Suy ra $f(\beta) - f(\alpha)$ luôn cùng dấu với $f(y) - f(x)$.

- Trường hợp 1: $f(\alpha) < f(\beta)$. Khi đó do $f(\beta) - f(\alpha)$ luôn cùng dấu với $f(y) - f(x)$ nên $f(x) < f(y)$, suy ra f tăng thực sự.
- Trường hợp 2: $f(\alpha) > f(\beta)$. Khi đó do $f(\beta) - f(\alpha)$ luôn cùng dấu với $f(y) - f(x)$ nên $f(x) > f(y)$, suy ra f giảm thực sự.

Như vậy f đơn điệu thực sự.

Chú ý 5. *Có một mối liên hệ nữa, rất thú vị và sâu sắc giữa hàm liên tục và hàm đơn điệu, đó là: "Nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là toàn ánh và là hàm số tăng nghiêm ngặt trên $\mathbb{R}$ thì f là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$." Kết quả này được phát biểu dưới dạng bổ đề và sẽ được chứng minh ở trang 529.*

Bài toán 2.238. *Tìm tất cả các hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn hai điều kiện sau:*
i) $f(-x) = -f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$
ii) $f(f(x)) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Giải. Ta có f là đơn ánh. Thật vậy, nếu $f(x) = f(y)$ thì

$$x = f(f(x)) = f(f(y)) = y.$$

Vì f đơn ánh và liên tục nên f đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp 1: f đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ *(ii)* suy ra $f(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Thật vậy, giả sử tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) \neq x_0$. Nếu $f(x_0) < x_0$ thì $f(f(x_0)) < f(x_0) \Rightarrow x_0 < f(x_0)$, mâu thuẫn. Nếu $f(x_0) > x_0$ thì

$$f(f(x_0)) > f(x_0) \Rightarrow x_0 > f(x_0) \text{ (mâu thuẫn).}$$

Vậy nếu f đồng biến thì $f(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Trường hợp 2: f nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Đặt $g(x) = -f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó hàm g liên tục, đồng biến trên $\mathbb{R}$ và

$$g(g(x)) = -f(g(x)) = -f(-f(x)) = f(f(x)) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy theo trường hợp 1 suy ra $g(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ hay $f(x) = -x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Sau khi thử lại ta kết luận: Có hai hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(x) = -x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.239. *Tìm tất cả những hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn điều kiện $f_3(x) + f(x) = 2x,\ \forall x \in \mathbb{R}$, trong đó $f_3(x) = f(f(f(x)))$.*

Giải. Trước hết ta chứng minh f là một đơn ánh. Thật vậy, nếu $f(x_1) = f(x_2)$ thì

$$f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow f_3(x_1) = f_3(x_2).$$

Do đó $2x_1 - f(x_1) = 2x_2 - f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Vậy f là đơn ánh và liên tục trên $\mathbb{R}$ nên suy ra f là hàm số đơn điệu thực sự (hoặc đồng biến hoặc nghịch biến trên $\mathbb{R}$). Giả sử f đồng biến trên $\mathbb{R}$ (trường hợp nghịch biến được xét tương tự). Nếu xảy ra $f(x_0) > x_0$ thì

$$f(f(x_0)) > f(x_0) \Rightarrow f_3(x_0) = f(f(f(x_0))) > f(f(x_0)) > f(x_0) > x_0.$$

Vậy $f_3(x_0) > x_0 \Rightarrow f_3(x_0) + f(x_0) > x_0 + x_0 \Rightarrow f_3(x_0) + f(x_0) > 2x_0$, mâu thuẫn với giả thiết. Tương tự, nếu $f(x_0) < x_0$ thì cũng dẫn tới mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy hàm số này thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 2.240. *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f_{2017}(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

trong đó $f_n(x) = f(f(\ldots(f(x))\ldots))$, n lần f.

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Ta chứng minh f là đơn ánh. Giả sử có các số thực x_1, x_2 sao cho $f(x_1) = f(x_2)$. Khi đó:

$$f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow \cdots \Rightarrow f_n(x_1) = f_n(x_2) \overset{\text{do (1)}}{\Rightarrow} x_1 = x_2.$$

Như vậy, f là đơn ánh. Mà f là hàm liên tục nên f đơn điệu thực sự.

- Trường hợp 1: f tăng thực sự. Ta sẽ chứng minh: $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
  - Nếu tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho: $f(x) > x$. Khi đó do f là hàm tăng nghiêm ngặt nên: $f_2(x) = f(f(x)) > f(x)$. Ta suy ra ngay:

    $$x = f_{2017}(x) > f_{2016}(x) > \cdots > f_2(x) > f(x) > x \text{ (vô lí)}.$$

  - Nếu tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho: $f(x) < x$. Khi đó do f là hàm tăng nghiêm ngặt nên: $f_2(x) = f(f(x)) < f(x)$. Ta suy ra ngay:

    $$x = f_{2017}(x) < f_{2016}(x) < \cdots < f_2(x) < f(x) < x \text{ (vô lí)}.$$

Vậy $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

- Trường hợp 2: f giảm sự. Với $x < y$, khi đó $f(x) > f(y)$. Suy ra:

  $$f_2(x) = f(f(x)) < f(f(y)) = f_2(y).$$

  Cứ như thế:

  $$f_{2016}(x) < f_{2016}(y) \Rightarrow f_{2017}(x) > f_{2017}(y) \overset{\text{do (1)}}{\Rightarrow} x > y \text{ (mâu thuẫn)}.$$

  Vậy trường hợp f giảm sự không thể xảy ra.

Kết luận: có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.241 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2004). *Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(xf(y)) = yf(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$.* (1)

Giải. Trong (1) lấy $x = y = 0$ ta được $f(0) = 0$. Hơn nữa từ (1) ta có

$$f(yf(x)) = xf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

và $f(yf(x)) = f(f(xf(y))) = f(1f(xf(y))) = xf(y)f(1), \forall x, y \in \mathbb{R}$. (3)

Từ (2) và (3) ta có $xf(y)[f(1) - 1] = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$. (4)

Dễ thấy rằng $f(x) \equiv 0$ là một hàm số thỏa mãn đề bài. Tiếp theo ta giả sử tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Trong (4) lấy $x = 1$ và $y = x_0$ ta được $f(1) = 1$. Giả sử $f(y_1) = f(y_2)$. Khi đó

$$y_1 f(x_0) = f(x_0 f(y_1)) = f(x_0 f(y_2)) = y_2 f(x_0) \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Vậy f là đơn ánh, kết hợp giả thiết f liên tục suy ra f đơn điệu thực sự. Từ $f(0) = 0 < 1 = f(1)$ suy ra f là hàm tăng thực sự. Trong (1) cho $x = 1$ được

$$f(f(y)) = y, \forall y \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Nếu $f(y) < y$ thì do f tăng thực sự nên $f(f(y)) < f(y) \Rightarrow y < f(y)$, mâu thuẫn. Nếu $f(y) > y$ thì $y = f(f(y)) > f(y)$, mâu thuẫn. Vậy

$$f(y) = y, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Thử lại thấy thỏa mãn. Ta kết luận: có hai hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.242. *Cho hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f(2010) = 2009$ và*

$$f(x).f_4(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

trong đó kí hiệu $f_4(x) = f(f(f(f(x))))$. Hãy tính $f(2008)$.

Giải. Kí hiệu $f_2(x) = f(f(x))$, $f_3(x) = f(f_2(x))$. Gọi T là tập giá trị của hàm f. Theo giả thiết thì $2009 \in T$. Từ (1) suy ra:

$$f_4(2010) = \frac{1}{2009} \in T;\ xf_3(x) = 1, \forall x \in T.$$

Do f liên tục trên $D = \left(\frac{1}{2009}; 2009\right) \subset T$ nên: $f_3(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in D.$ (2)

Từ (2) suy ra với mọi x, y thuộc D ta có: nếu $f(x) = f(y)$ thì

$$f_2(x) = f_2(y) \Rightarrow f_3(x) = f_3(y) \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow x = y.$$

Hay f là đơn ánh trên D và do f là hàm liên tục trên D nên f là hàm đơn điệu thực sự trên D.

Trường hợp 1: f là hàm giảm thực sự trên D. Giả sử tồn tại $x_0 \in D$ sao cho

$$f(x_0) > \frac{1}{x_0} \Rightarrow f_2(x_0) < f\left(\frac{1}{x_0}\right). \quad (3)$$

Lại có $\frac{1}{x_0} = f_3(x_0) = f(f_2(x_0)) > f\left(f\left(\frac{1}{x_0}\right)\right) = f_2\left(\frac{1}{x_0}\right)$. Suy ra:

$$f\left(\frac{1}{x_0}\right) < f_3\left(\frac{1}{x_0}\right) = x_0. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$x_0 > f_2(x_0) \Rightarrow f(x_0) < f_3(x_0) = \frac{1}{x_0} \left(\text{mâu thuẫn với } f(x_0) > \frac{1}{x_0}\right).$$

Vậy không tồn tại $x_0 \in D$ để $f(x_0) > \frac{1}{x_0}$. Lập luận tương tự, ta cũng chứng minh được không tồn tại $x_0 \in D$ để $f(x_0) < \frac{1}{x_0}$. Vậy nên

$$f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in D. \quad (5)$$

Lại do $2008 \in D$ nên từ (5) suy ra $f(2008) = \frac{1}{2008}$.

Trường hợp 2: f là hàm tăng thực sự trên D. Giả sử tồn tại $x_0 \in D$ sao cho

$$f(x_0) > \frac{1}{x_0} \Rightarrow f_2(x_0) > f\left(\frac{1}{x_0}\right). \quad (3)$$

Lại có $\frac{1}{x_0} = f_3(x_0) = f(f_2(x_0)) > f\left(f\left(\frac{1}{x_0}\right)\right) = f_2\left(\frac{1}{x_0}\right)$. Suy ra:

$$f\left(\frac{1}{x_0}\right) > f_3\left(\frac{1}{x_0}\right) = x_0. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$x_0 < f_2(x_0) \Rightarrow f(x_0) < f_3(x_0) = \frac{1}{x_0} \left(\text{mâu thuẫn với } f(x_0) > \frac{1}{x_0}\right).$$

Vậy không tồn tại $x_0 \in D$ để $f(x_0) > \frac{1}{x_0}$. Lập luận tương tự, ta cũng chứng minh được không tồn tại $x_0 \in D$ để $f(x_0) < \frac{1}{x_0}$. Vậy nên

$$f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in D. \quad (5)$$

Lại do $2008 \in D$ nên từ (5) suy ra $f(2008) = \frac{1}{2008}$.

2.7.7 Suy luận dựa vào đồ thị của hàm liên tục

Ta biết rằng đồ thị của hàm liên tục là một đường nét liền. Vận dụng điều này giúp ta đưa ra được những lập luận chính xác về giá trị cũng như tập giá trị của hàm số liên tục.

Bài toán 2.243 (OLYMPIC toán Sinh viên toàn quốc-2003). *Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(x + 2002)\left[f(x) + \sqrt{2003}\right] = -2004, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Khi đó $f(x) \neq 0$ và $f(x) \neq -\sqrt{2003}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Gọi T là tập giá trị của hàm số f. Do f liên tục nên chỉ có thể xảy ra một trong ba trường hợp sau:

Trường hợp 1: $T \subset \left(-\infty; -\sqrt{2003}\right)$. Khi đó

$$f(x + 2002)\left[f(x) + \sqrt{2003}\right] > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Điều này mâu thuẫn với (1).

Trường hợp 2: $T \subset (0; +\infty)$. Khi đó

$$f(x + 2002)\left[f(x) + \sqrt{2003}\right] > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Điều này mâu thuẫn với (1).

Trường hợp 3: $T \subset \left(-\sqrt{2003}; 0\right)$. Khi đó với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$-\sqrt{2003} < f(x+2002) < 0,\ 0 < f(x) + \sqrt{2003} < \sqrt{2003}.$$

Vậy: $\left|f(x+2002)\left[f(x)+\sqrt{2003}\right]\right| < 2003, \forall x \in \mathbb{R}$. Điều này cũng mâu thuẫn với (1). Vậy không tồn tại hàm số $f(x)$.

Lưu ý. Do ta giả thiết hàm f liên tục nên nếu hàm f nhận một giá trị trong khoảng $(0; +\infty)$ và nhận một giá trị khác trong khoảng $(-\sqrt{2003}; 0)$ thì do đồ thị hàm liên tục là một đường nét liền nên nó phải cắt trục hoành, do đó hàm f nhận giá trị 0, điều này mâu thuẫn với $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Như vậy tập giá trị T của hàm f chỉ có thể là: $T \subset \left(-\infty; -\sqrt{2003}\right)$ hoặc $T \subset (0; +\infty)$ hoặc $T \subset \left(-\sqrt{2003}; 0\right)$.

Bài toán 2.244. *Tìm tất cả các hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$[f(x)]^3 - \left(x^2+3\right)[f(x)]^2 + \left(x^2+3\right)f(x) + x^4 - 1 = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Đặt $y = f(x)$, $t = x^2$. Thay vào (1) được

$$\begin{aligned} & y^3 - (t+3)y^2 + (t+3)y + t^2 - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & t^2 - \left(y^2 - y\right)t + y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Vì $\Delta = \left(y^2-y\right)^2 - 4(y-1)^3 = (y-1)^2(y-2)^2 = \left(y^2-3y+2\right)^2$ nên

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{y^2-y+y^2-3y+2}{2} \\ t = \dfrac{y^2-y-\left(y^2-3y+2\right)}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = (y-1)^2 \\ t = y-1. \end{array}\right.$$

Từ đó: $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = x^2+1 \\ [f(x)-1]^2 = x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow f(x) \in \left\{x^2+1, x+1, -x+1\right\}.$ (3)

Đồ thị các hàm số $f_1(x) = x+1$ và $f_2(x) = -x+1$ có điểm chung là $A(0;1)$. Đồ thị các hàm số $f_1(x) = x+1$ và $f_3(x) = x^2+1$ có điểm hai điểm chung là $A(0;1)$ và $B(1;2)$. Đồ thị các hàm số $f_2(x) = -x+1$ và $f_3(x) = x^2+1$ có điểm hai điểm chung là $A(0;1)$ và $C(-1;2)$. Do hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} f_i(x) & \text{khi } x \in (-\infty; -1) \\ f_j(x) & \text{khi } x \in [-1; 0] \\ f_k(x) & \text{khi } x \in (0; 1) \\ f_l(x) & \text{khi } x \in [1; +\infty), \end{array}\right.$$

với i, j, k, l được chọn tùy ý trong $\{1, 2, 3\}$. Vậy có tất cả $3^4 = 81$ hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài và được xác định như trên.

2.7.8 Phương trình với nhiều ẩn hàm

- Các kĩ thuật giải ở trước vẫn được áp dụng thành công trong phần này. Kết quả của bài toán 2.214 ở trang 278 tiếp tục được sử dụng nhiều.
- Đối với phương trình hàm chứa cặp biến tự do x, y và chứa nhiều ẩn hàm, chẳng hạn hai ẩn hàm f và g, ta thường phân li biến số hoặc cho y (hoặc x) bằng một số nào đó để biểu diễn hàm f theo g, sau đó thay vào phương trình hàm đã cho để đưa về còn một ẩn hàm. Bạn đọc có thể tìm hiểu thêm việc giải phương trình hàm với nhiều ẩn hàm trong bài 2.9 (ở trang 337): Phương trình hàm trong lớp hàm lượng giác.

Bài toán 2.245. *Tìm tất cả các hàm số f xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$; g xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) lấy $y = 0$ ta được

$$g(x) = f(x) - b, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } b = g(0)). \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - 2b, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Đặt $f(x) - 2b = h(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào (3) ta được

$$h(x+y) = h(x) + h(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Vì f là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên h là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, do đó từ (4) và sử dụng kết quả bài toán 2.214 ở trang 278 suy ra $h(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$. Bởi vậy

$$f(x) = ax + 2b, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } g(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Lưu ý. Phép đặt $f(x) - 2b = h(x), \forall x \in \mathbb{R}$ được tìm ra là do ta đã vận dụng nhận xét 4 ở trang 43. Cụ thể là từ (3) ta tưởng tượng rằng

$$c = c + c - 2b \Leftrightarrow c = 2b.$$

Vậy ta phải đặt $f(x) - 2b = h(x)$ để khử $-2b$.

Bài toán 2.246. *Tìm tất cả các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn phương trình hàm:*

$$f(x+y) = g(x) + h(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) lấy $y = 0$ ta được

$$g(x) = f(x) - a, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } a = h(0)). \tag{2}$$

Trong (1) lấy $x = 0$ ta được

$$h(y) = f(y) - b, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } b = g(0)). \tag{3}$$

Thay (2) và (3) vào (1) ta được

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - (a+b), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Đặt $f(x) - (a+b) = k(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào (4) ta được

$$k(x+y) = k(x) + k(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Vì f là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên k là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, do đó từ (5) và sử dụng kết quả bài toán 2.214 ở trang 278 suy ra $k(x) = cx, \forall x \in \mathbb{R}$. Bởi vậy

$f(x) = cx + a + b, \forall x \in \mathbb{R}$ và $g(x) = cx + b, \forall x \in \mathbb{R}$ và $h(x) = cx + a, \forall x \in \mathbb{R}$.

Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.247. *Tìm tất cả các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và thỏa mãn*

$$f(xy) = g(x) + h(y), \forall x, y \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \tag{1}$$

Giải. Trong (1) lấy $y = 1$ ta được

$$g(x) = f(x) - a, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ (với } a = h(1)). \tag{2}$$

Trong (1) lấy $x = 1$ ta được

$$h(y) = f(y) - b, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ (với } b = g(1)). \tag{3}$$

Thay (2) và (3) vào (1) ta được

$$f(xy) = f(x) + f(y) - (a+b), \forall x, y \in r\setminus\{0\}. \tag{4}$$

Đặt $f(x) - (a+b) = k(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào (4) ta được

$$k(xy) = k(x) + k(y), \forall x, y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{5}$$

Vì f là hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ nên k là hàm liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, do đó từ (5) và sử dụng kết quả bài toán 2.217 ở trang 280 suy ra

$$k(x) = c\ln|x|, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Bởi vậy với mọi $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ta có

$$f(x) = c\ln|x| + a + b;\ g(x) = c\ln|x| + b;\ h(x) = c\ln|x| + a.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.248. *Tìm các hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$; g, h xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y) = g(x).h(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Trong (1) lấy $x = 0$ ta được

$$f(y) = ah(y), \forall y \in \mathbb{R} \text{ (với } a = g(0)). \tag{2}$$

Trong (1) lấy $y = 0$ ta được

$$f(x) = bg(x), \forall y \in \mathbb{R} \text{ (với } b = h(0)). \tag{3}$$

Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì từ (2) và (3) ta có

$$g(x) = \frac{f(x)}{b}, \forall x \in \mathbb{R};\ h(x) = \frac{f(x)}{a}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay vào (1) ta được

$$f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{ab}, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \phi(x+y) = \phi(x)\phi(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \left(\text{với } \phi(x) = \frac{f(x)}{ab}, \forall x \in \mathbb{R}\right). \tag{4}$$

Vì f liên tục nên ϕ liên tục, do đó từ (4), sử dụng kết quả bài toán 2.216 ở trang 280 suy ra $\phi(x) \equiv 0$ hoặc $\phi(x) \equiv c^x$ (c là hằng số dương). Nếu $\phi(x) \equiv 0$ thì $f(x) \equiv 0$, suy ra $g(x) \equiv 0$ mâu thuẫn với trường hợp ta đang xét $a \neq 0$. Vậy $\phi(x) \equiv a^x$. Do đó

$$f(x) \equiv ab.c^x,\ g(x) \equiv a.c^x,\ h(x) \equiv b.c^x.$$

Thử lại thấy thỏa mãn. Xét $a = 0$. Khi đó $f(x) \equiv 0$. Nếu $g(x) \equiv 0$ thì h tùy ý, còn nếu tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x_0) \neq 0$ thì từ (1) có

$$0 = f(x_0 + y) = g(x_0)h(y),\ \forall y \in \mathbb{R},$$

suy ra $h(x) \equiv 0$. Thử lại thấy

$$f(x) \equiv 0,\ h(x) \equiv 0,\ g \text{ là hàm số tùy ý không đồng nhất } 0$$

thỏa mãn (1). Xét $b = 0$. Khi đó $f(x) \equiv 0$. Nếu $h(x) \equiv 0$ thì g tùy ý, còn nếu tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $h(x_0) \neq 0$ thì từ (1) có

$$0 = f(x + x_0) = g(x)h(x_0),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

suy ra $g(x) \equiv 0$. Thử lại thấy

$$f(x) \equiv 0,\ g(x) \equiv 0,\ h \text{ là hàm số tùy ý không đồng nhất } 0$$

thỏa mãn (1). Mặt khác dễ thấy

$$f(x) \equiv 0,\ g(x) \equiv 0,\ h(x) \equiv 0$$

cũng thỏa mãn (1). Vậy tất cả các trường hợp thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$f(x) \equiv ab.c^x,\ g(x) \equiv a.c^x,\ h(x) \equiv b.c^x$;
$f(x) \equiv 0,\ h(x) \equiv 0,\ g$ là hàm số tùy ý xác định trên $\mathbb{R}$;
$f(x) \equiv 0,\ g(x) \equiv 0,\ h$ là hàm số tùy ý xác định trên $\mathbb{R}$.

Bài toán 2.249. *Tìm các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên $(0:+\infty)$ thỏa mãn điều kiện: $f(xy) = g(x).h(y),\ \forall x, y \in (0:+\infty)$.*

Đáp số.

$f(x) \equiv 0,\ g(x) \equiv 0,\ h$ là hàm số xác định và liên tục trên $(0:+\infty)$, tùy ý;
$f(x) \equiv 0,\ h(x) \equiv 0,\ g$ là hàm số xác định và liên tục trên $(0:+\infty)$, tùy ý;
$f(x) \equiv abx^c,\ g(x) \equiv ax^c,\ h(x) \equiv bx^c$.

Sau đây ta sẽ xét một vài bài toán phương trình hàm được giải bằng cách sử dụng các bài toán 2.245, 2.263.

Bài toán 2.250. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện: Nếu $A + B + C = \pi$ thì $f(A) + f(B) + f(C) = \pi$.*

Giải. Giả sử hàm f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Với mọi số thực A, B, C sao cho $A + B + C = \pi$, ta có

$$f(A) + f(B) + f(C) = \pi \Leftrightarrow f(\pi - (B + C)) = \pi - f(B) - f(C). \quad (1)$$

Với mọi số thực x, y, đặt $z = \pi - (x + y)$. Theo (1) ta có

$$f(\pi - (x + y)) = \pi - f(x) - f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Đặt $F(x) = f(\pi - x),\ G(x) = \dfrac{\pi}{2} - f(x)$, khi đó F, G là những hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và do (2) nên

$$F(x + y) = G(x) + G(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Từ (3), sử dụng bài toán 2.245 ở trang 303 ta được

$$F(x) = ax + 2b, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } G(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R},$$

với a, b là các hằng số tùy ý. Do đó

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - ax - b,\ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Giả sử hàm f xác định bởi (4). Giả sử $x + y + z = \pi$, khi đó điều kiện để $f(x) + f(y) + f(z) = \pi$ là

$$a(\pi - x) + 2b + a(\pi - y) + 2b + a(\pi - z) + 2b = \pi$$
$$\Leftrightarrow 3a\pi - a(x + y + z) + 6b = \pi \Leftrightarrow 2a\pi + 6b = \pi \Leftrightarrow b = \frac{(1 - 2a)\,\pi}{6}.$$

Vậy $f(x) = -ax + \dfrac{\pi}{3}(a + 1),\ \forall x \in \mathbb{R}$ (với a là hằng số tùy ý). Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.251. *Tìm tất cả các hàm số $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện: Nếu $A + B + C = \pi$ thì $f(A) + g(B) + h(C) = \pi$.*

Giải. Giả sử các hàm f, g, h thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Với mọi số thực A, B, C sao cho $A + B + C = \pi$, ta có

$$f(A) + g(B) + h(C) = \pi \Leftrightarrow f(\pi - (B + C)) = \pi - g(B) - h(C). \quad (1)$$

Với mọi số thực x, y, đặt $z = \pi - (x + y)$. Theo (1) ta có

$$f(\pi - (x + y)) = \pi - g(x) - h(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Đặt $F(x) = f(\pi - x),\ G(x) = \dfrac{\pi}{2} - g(x),\ H(x) = \dfrac{\pi}{2} - h(x)$, khi đó F, G, H là những hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và do (2) nên

$$F(x + y) = G(x) + H(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Từ (3), sử dụng bài toán 2.263 ở trang 320 ta được

$$F(x) = cx + a + b, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } G(x) = cx + b, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } H(x) = cx + a, \forall x \in \mathbb{R}.$$

với a, b, c là các hằng số tùy ý. Vậy với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì

$$f(x) = c(\pi - x) + a + b,\ g(x) = \frac{\pi}{2} - cx - b,\ h(x) = \frac{\pi}{2} - cx - a.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

2.7.9 Phương trình hàm Cauchy (Côsi) trên một đoạn

Việc giải phương trình hàm Côsi trên $\mathbb{R}$ hoặc trên các nửa khoảng $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$ đã được đề cập trong nhiều tài liệu. Tuy nhiên việc giải phương trình hàm Côsi trên một đoạn thì chưa được đề cập hoặc có đề cập nhưng còn tản mạn và chưa giải quyết triệt để. Vì vậy ta dành riêng ra một mục để giải quyết trọn vẹn bài toán giải phương trình hàm Côsi trên một đoạn bất kì.

Bài toán 2.252. *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y,x+y\in[0;1]. \tag{1}$$

Giải. Từ (1) cho $x=y=0$, ta được $f(0)=0$. Đặt $f(1)=c$. Giả sử $n\in\mathbb{N}^*$, khi đó $0<\dfrac{1}{n}\le 1$, sử dụng (1) nhiều lần, ta được:

$$f(1)=f\left(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{\text{tổng có } n \text{ số hạng}}\right)=nf\left(\frac{1}{n}\right)\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{c}{n},\ \forall n=1,2,\ldots \tag{2}$$

Với $m\in\mathbb{N},n\in\mathbb{N}^*$ và $m\le n$ ta có: $0\le\dfrac{1}{n},\dfrac{m}{n}\le 1$. Do đó:

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{\text{tổng có } m \text{ số hạng}}\right)=mf\left(\frac{1}{n}\right)\overset{\text{do (2)}}{=}m\cdot\frac{c}{n}=c.\frac{m}{n}. \tag{3}$$

Như vậy, với mọi số hữu tỉ $r\in[0;1]$, sử dụng (3), ta được: $f(r)=cr$. (4)
Giả sử $x\in[0;1]$, khi đó tồn tại dãy số hữu tỉ $(r_n)\subset[0;1]$ sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty}r_n=x$.

Vì f là hàm số liên tục trên $[0;1]$ nên:

$$f(x)=f\left(\lim_{n\to+\infty}r_n\right)=\lim_{n\to+\infty}f(r_n)\overset{\text{do (4)}}{=}\lim_{n\to+\infty}cr_n=c\lim_{n\to+\infty}r_n=cx.$$

Các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là: $f(x)=cx,\forall x\in[0;1]$ (c là hằng số).
Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.253. *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2},\ \forall x,y\in[0;1]. \tag{1}$$

Giải. Trong (1) lấy $y=0$ ta được:

$$f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{f(x)+a}{2},\ \forall x\in[0;1]\ \left(\text{với } a=f(0)\right). \tag{2}$$

Từ (2) và (1) ta có:

$$\frac{f(x+y)+a}{2}=\frac{f(x)+f(y)}{2},\ \forall x,y\in[0;1]$$

$$\Leftrightarrow f(x+y)+a=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in[0;1]. \tag{3}$$

Xét hàm số $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ như sau: $g(x)=f(x)-a,\forall x\in\mathbb{R}$. Vì f liên tục trên $[0;1]$ nên g liên tục trên $[0;1]$. Thay vào (3) ta được:

$$\begin{aligned}&g(x+y)+2a=g(x)+a+g(y)+a,\ \forall x,y\in[0;1]\\ \Leftrightarrow\ &g(x+y)=g(x)+g(y),\ \forall x,y\in[0;1].\end{aligned} \tag{4}$$

Do $\{(x;y)|x,y,x+y\in[0;1]\}\subset\{(x;y)|x,y\in[0;1]\}$ nên từ (4), sử dụng kết quả bài toán 2.252 ở trang 308, ta được:

$$g(x)\equiv bx\Rightarrow f(x)\equiv bx+a.$$

Thử lại thấy hàm số

$$f(x)=bx+a,\forall x\in\mathbb{R}\ (a,b \text{ là các hằng số})$$

thỏa mãn các yêu cầu đề bài, vậy đó là đáp số cần tìm.

Bài toán 2.254. *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2},\ \forall x,y\in[a;b]. \tag{1}$$

Giải. Giả sử hàm f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Xét hàm số $\varphi:[0;1]\to[a;b]$ như sau: $\varphi(t)=(1-t)a+tb,\ \forall t\in[0;1]$. Khi đó: $g=f\circ\varphi:[0;1]\to\mathbb{R}$ là hàm số liên tục trên đoạn $[0;1]$. Với mọi x,y thuộc đoạn $[0;1]$, ta có:

$$\begin{aligned}\frac{g(x)+g(y)}{2}&=\frac{(1-x)a+xb+(1-y)a+yb}{2}\\ &=\left(1-\frac{x+y}{2}\right)a+\frac{x+y}{2}b=g\left(\frac{x+y}{2}\right)\end{aligned} \tag{2}$$

Từ (2), sử dụng bài toán 2.254 ở trang 309, ta được:

$$g(x)=mx+n,\ \forall x\in[0;1]\ (m,n \text{ là hằng số}).$$

Theo bài toán 1.5 (ở trang 6), ta có φ là song ánh và:

$$\varphi^{-1}(t)=\frac{t-a}{b-a},\ \forall t\in[a;b].$$

Vậy $g=f\circ\varphi\Rightarrow g\circ\varphi^{-1}$. Với mọi $x\in[a;b]$, ta có:

$$f(x)=g\left(\varphi^{-1}(x)\right)=g\left(\frac{x-a}{b-a}\right)=m\frac{x-a}{b-a}+n=Ax+B,$$

với $A=\dfrac{m}{b-a}$, $B=n-\dfrac{ma}{b-a}$ là những hằng số.
Thử lại thấy hàm số $f(x)=Ax+B,\ \forall x\in[a;b]$ (với A, B là những hằng số) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 2.255. *Tìm tất cả các hàm số liên tục* $f : [\alpha;\beta] \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn:*

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y, x+y \in [\alpha;\beta]. \quad (1)$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Dễ thấy rằng nếu $x, y \in [\alpha;\beta]$ thì $x+y \in [2\alpha; 2\beta]$. Bài toán này rất khó, ta cần phải chia ra nhiều trường hợp.

Trường hợp 1: $[\alpha;\beta] \cap [2\alpha;2\beta] = \emptyset$ (chẳng hạn $\left[2;\frac{5}{2}\right] \cap [4;5] = \emptyset$). Khi đó với mọi $x, y \in [\alpha;\beta]$, ta có $x+y \notin [\alpha;\beta]$ nên f là hàm số tùy ý, xác định và liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$.

Trường hợp 2: $[\alpha;\beta] \cap [2\alpha;2\beta] \neq \emptyset$, $[\alpha;\beta] \cap [2\alpha;2\beta] = [\alpha_1;\beta_1]$ (chẳng hạn $[1;6] \cap [2;12] = [2;6]$). Với mọi $x \in [\alpha_1;\beta_1]$, ta có $\frac{x}{2} \in [\alpha;\beta]$, do đó:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right) = 2f\left(\frac{x}{2}\right).$$

Như vậy: $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x), \forall x \in [\alpha_1;\beta_1]$. Với mọi $x, y \in [\alpha_1;\beta_1]$, ta có $\frac{x+y}{2} \in [\alpha;\beta]$, do đó:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{y}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Sử dụng bài toán 2.254 (ở trang 309), ta được:

$$f(x) = ax + b,\ \forall x \in [\alpha_1;\beta_1] \text{ với } a, b \text{ là hằng số.}$$

Trường hợp 2a: $\alpha > 0$. Khi đó:

$$2\alpha \le \beta,\ \alpha_1 = 2\alpha,\ \beta_1 = \beta.$$

Do đó: $a(2\alpha) + b = f(2\alpha) = f(\alpha) + f(\alpha) = 2f(\alpha)$.

Vậy: $f(\alpha) = a\alpha + \frac{b}{2}$. Với mọi $x \in [\alpha;\beta-\alpha]$, ta có:

$$x + \alpha \in [2\alpha;\beta] = [\alpha_1;\beta_1].$$

Do đó:

$$a(x+\alpha) + b = f(x+\alpha) = f(x) + f(\alpha) = f(x) + a\alpha + \frac{b}{2}.$$

Vậy: $f(x) = ax + \frac{b}{2}, \forall x \in [\alpha;\beta-\alpha]$.

* Nếu $\beta - \alpha \ge 2\alpha \Leftrightarrow \alpha \le \frac{\beta}{3}$ thì $2\alpha \in [\alpha;\beta-\alpha]$. Ta có:

$$a(2\alpha) + b = f(2\alpha) = a(2\alpha) + \frac{b}{2} \Rightarrow b = 0.$$

Vậy: $f(x) = ax, \forall x \in [\alpha;\beta]$.

* Nếu $\beta - \alpha < 2\alpha$ thì $f(x)$ xác định bởi:

$$f(x) = \begin{cases} ax + \frac{b}{2} & \text{khi } x \in [\alpha;\beta-\alpha] \\ g(x) & \text{khi } x \in [\beta-\alpha;2\alpha] \\ ax + b & \text{khi } x \in [2\alpha;\beta] \end{cases} \quad (2)$$

trong đó $g(x)$ là hàm số liên tục trên $[\beta-\alpha;2\alpha]$ và thỏa mãn:

$$g(\beta-\alpha) = a(\beta-\alpha) + \frac{b}{2},\ g(2\alpha) = 2a\alpha + b.$$

Ta chứng minh hàm số f xác định bởi (2) thỏa mãn (1): Giả sử x và y thuộc đoạn $[\alpha;\beta]$ sao cho $x+y \in [\alpha;\beta]$. Khi đó nếu $x \notin [\alpha;\beta-\alpha]$ hoặc $y \notin [\alpha;\beta-\alpha]$ thì

$$x + y > \beta \Rightarrow x + y \notin [\alpha;\beta] \text{ (mâu thuẫn)}.$$

Vậy cả x và y cùng thuộc $[\alpha;\beta-\alpha]$, do đó $x+y \in [2\alpha;\beta]$, dẫn đến:

$$f(x) + f(y) = ax + \frac{b}{2} + ay + \frac{b}{2} = a(x+y) + b = f(x+y).$$

Vậy hàm số f xác định bởi (2) thỏa mãn (1).

Trường hợp 2b: $\beta < 0$ (chẳng hạn: $[-4;-1] \cap [-8;-2] = [-4;-2]$). Khi đó: $\alpha \le 2\beta$, $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = 2\beta$. Do đó:

$$a(2\beta) + b = f(2\beta) = f(\beta) + f(\beta) = 2f(\beta).$$

Vậy: $f(\beta) = a\beta + \frac{b}{2}$.

Với mọi $x \in [\alpha-\beta;\beta] \Rightarrow x + \beta \in [\alpha;2\beta] = [\alpha_1;\beta_1]$, do đó:

$$a(x+\beta) + b = f(x+\beta) = f(x) + f(\beta) = f(x) + a\beta + \frac{b}{2}.$$

Vậy: $f(x) = ax + \frac{b}{2}, \forall x \in [\alpha-\beta;\beta]$.

* Nếu $\alpha - \beta \le 2\beta$ thì $2\beta \in [\alpha-\beta;\beta]$. Do đó:

$$a(2\beta) + b = f(2\beta) = a(2\beta) + \frac{b}{2} \Rightarrow b = 0.$$

Vậy: $f(x) = ax, \forall x \in [\alpha;\beta]$.

* Nếu $\alpha - \beta \geq 2\beta$ thì $f(x)$ xác định bởi:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{khi } x \in [\alpha; 2\beta] \\ h(x) & \text{khi } x \in [2\beta; \alpha - \beta] \\ ax + \dfrac{b}{2} & \text{khi } x \in [\alpha - \beta; \beta] \end{cases} \quad (3)$$

trong đó h là hàm số liên tục trên $[2\beta; \alpha - \beta]$ và

$$h(2\beta) = 2a\beta + b,\ h(\alpha - \beta) = a(\alpha - \beta) + \frac{b}{2}.$$

Ta chứng minh hàm số f xác định bởi (3) thỏa mãn (1): Giả sử x và y thuộc đoạn $[\alpha; \beta]$ sao cho $x + y \in [\alpha; \beta]$. Khi đó nếu $x \notin [\alpha - \beta; \beta]$ hoặc $y \notin [\alpha - \beta; \beta]$ thì

$$x + y < \alpha \Rightarrow x + y \notin [\alpha; \beta] \text{ (mâu thuẫn)}.$$

Vậy cả x và y cùng thuộc $[\alpha - \beta; \beta]$, do đó $x + y \in [\alpha; 2\beta]$, dẫn đến:

$$f(x) + f(y) = ax + \frac{b}{2} + ay + \frac{b}{2} = a(x + y) + b = f(x + y).$$

Vậy hàm số f xác định bởi (3) thỏa mãn (1).

Trường hợp 2c: $\alpha \leq 0 \leq \beta$. Khi đó: $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$.
Vì $0 \in [\alpha; \beta] = [\alpha_1; \beta_1]$ nên:

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow b = 0.$$

Vậy $f(x) = ax$, $\forall x \in [\alpha; \beta]$.

Kết luận:

- Nếu $[\alpha; \beta] \cap [2\alpha; 2\beta] = \emptyset$ thì f là hàm số tùy ý, xác định và liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$.
- Nếu $0 < \alpha \leq \dfrac{1}{3}\beta$ hoặc $\alpha \leq 3\beta < 0$ hoặc $\alpha \leq 0 \leq \beta$ thì

$$f(x) = ax,\ \forall x \in [\alpha; \beta] \text{ (với } a \text{ là hằng số tùy ý)}.$$

- Nếu $\dfrac{1}{3}\beta < \alpha \leq \dfrac{1}{2}\beta$ thì hàm f xác định bởi (2).
- Nếu $3\beta < \alpha < 2\beta$ thì hàm f xác định bởi (3).

2.7.10 Các bài toán tổng hợp

Bài toán 2.256. *Có thể tồn tại hay không một hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện: Với mọi số thực x, ta có $f(x)$ là số hữu tỉ khi và chỉ khi $f(x + 1)$ là số vô tỉ.*

Giải. Giả sử tồn tại hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$\forall x \in \mathbb{R} :\ f(x) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow f(x + 1) \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \quad (*)$$

Xét các hàm số: $g(x) = f(x + 1) - f(x)$, $h(x) = f(x + 1) + f(x)$. Khi đó g và h là những hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có g và h không thể đồng thời là hàm hằng. Thật vậy, giả sử $g(x) \equiv C_1$, $h(x) \equiv C_2$. Lúc đó

$$2f(x) \equiv C_2 - C_1 \Leftrightarrow f(x) \equiv C \ \left(C \text{ là hằng số}\right).$$

Vì thế với $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $f(\alpha) = f(\alpha + 1) = C$, điều này mâu thuẫn với (*). Bây giờ giả sử h không phải là hàm hằng (không mất tính tổng quát), khi đó tồn tại x_1, x_2, $x_1 \neq x_2$ sao cho $h(x_1) < h(x_2)$. Lúc này có số hữu tỉ $r \in [h(x_1); h(x_2)]$. Ta có $[h(x_1) - r]\,[h(x_2) - r] \leq 0$, mà $k(x) = h(x) - r$, $\forall x \in \mathbb{R}$ là hàm liên tục nên từ đây suy ra phương trình $h(x) - r = 0$ có nghiệm, tức là tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $h(x_0) = r$, từ đó $f(x_0 + 1) + f(x_0) = r$. Mà $r \in \mathbb{Q}$ nên $f(x_0 + 1)$ và $f(x_0)$ hoặc đồng thời là số hữu tỉ hoặc đồng thời là số vô tỉ. Điều này mâu thuẫn với (*). Vậy không tồn tại hàm số như đề bài đòi hỏi.

Bài toán 2.257. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện: Với mọi số thực x, y sao cho $x - y \in \mathbb{Q}$, ta có $f(x) - f(y) \in \mathbb{Q}$.*

Giải. Đặt $g(x) = f(x) - f(0)$, khi đó g là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $g(0) = 0$ và $g(x) - g(y)$ hữu tỉ nếu $x - y$ hữu tỉ. Xét $r \in \mathbb{Q}$. Đặt

$$h(x) = g(x + r) - g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó hàm h liên tục trên $\mathbb{R}$, $h(0) = g(r)$ và $h(x) \in \mathbb{Q}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta sẽ chứng minh $h(x) = g(r)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Nếu tồn tại số thực α sao cho $h(\alpha) \neq g(r)$. Do tính chất liên tục của hàm h nên với số vô tỉ

$$\beta \in (\min\{h(\alpha), g(r)\}; \max\{h(\alpha), g(r)\})$$

cho trước, đều tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $h(x_0) = \beta$, điều này mâu thuẫn với $h(x) \in \mathbb{Q}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy $h(x) = g(r)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Từ đó

$$g(x + r) = g(x) + g(r),\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall r \in \mathbb{Q}$$
$$\Rightarrow g(x + y) = g(x) + g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $g(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$, dẫn đến $f(x) = ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Lại có

$$f(1) - f(0) = a \in \mathbb{Q}.$$

Như vậy $f(x) = ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$, trong đó a, b là hằng số, $a \in \mathbb{Q}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Lưu ý. Trong lời giải bài toán 2.257, ta đã sử dụng một kết quả rất hay về hàm số liên tục, đó là: Nếu f và g là những hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$f(x) = g(x),\ \forall x \in \mathbb{Q}$$

thì $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.258. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện: Với mọi số thực x, y sao cho $x+y \in \mathbb{Q}$, ta có $f(x)+f(y) \in \mathbb{Q}$.*

Bài toán 2.259. *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x)f(1-x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Đặt $x - \frac{1}{2} = t$, thay vào (1) ta được

$$f\left(t+\frac{1}{2}\right) f\left(-t+\frac{1}{2}\right) = 1,\ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow g(t)g(-t) = 1,\ \forall t \in \mathbb{R}\ \left(\text{với } g(t) = f\left(t+\frac{1}{2}\right),\ \forall t \in \mathbb{R}\right). \tag{2}$$

Do f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm g cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Từ (2) suy ra với mọi x thì $g(x) \neq 0$, do g liên tục nên $g(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $g(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

• **Trường hợp 1**: $g(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$(2) \Leftrightarrow g(t) = \frac{1}{g(-t)},\ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow g(t) = \sqrt{\frac{g(t)}{g(-t)}},\ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow g(t) = \sqrt{\frac{h(t)}{h(-t)}},\ \forall t \in \mathbb{R},$$

với h là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $h(t) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

• **Trường hợp 2**: $g(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$(2) \Leftrightarrow g(t) = \frac{1}{g(-t)},\ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow g(t) = -\sqrt{\frac{g(t)}{g(-t)}},\ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow g(t) = -\sqrt{\frac{k(t)}{k(-t)}},\ \forall t \in \mathbb{R},$$

với k là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $k(t) < 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Sau khi thử lại ta có kết luận: các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x) = \sqrt{\frac{h(x-\frac{1}{2})}{h(\frac{1}{2}-x)}},\ \forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f(x) = -\sqrt{\frac{k(x-\frac{1}{2})}{k(\frac{1}{2}-x)}},\ \forall x \in \mathbb{R},$$

trong đó h là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $h(t) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ còn k là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $k(t) < 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.260. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$x\,[f(x+1) - f(x)] = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Giải. Từ (1) ta có

$$f(x+1) = \left(1+\frac{1}{x}\right) f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

$$\Leftrightarrow f(x+1) = \frac{x+1}{x} f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x+1)}{x+1} = \frac{f(x)}{x},\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}$$

$$\Rightarrow p(x+1) = p(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}\ \left(\text{với } p(x) = \frac{f(x)}{x}\right). \tag{3}$$

Ta có $f(x) = xp(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}$. Tiếp theo ta sẽ sử dụng (2) để chứng minh kết quả $f(x) = xp(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Theo (2) ta có

$$\lim_{x\to y}[f(x) - f(y)] = 0 \Rightarrow \lim_{x\to y} f(x) = f(y),$$

suy ra hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$. Với u, v là hai số thực và $n \in \mathbb{Z}$, trong (2) lấy $x = u + n + 1$, $y = v + n$ và sử dụng (3) ta được

$$|(u+n+1)p(u) - (v+n)p(v)| \leq |(u+n+1) - (v+n)|$$

$$\Rightarrow |(u+1)p(u) - vp(v) + n[p(u) - p(v)]| \leq |u+1-v|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{(u+1)p(u)-vp(v)}{n}+p(u)-p(v)\right| \le \left|\frac{u+1-v}{n}\right|, \forall n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}. \quad (4)$$

Từ (4) cho $n \to +\infty$ và sử dụng tính liên tục của hàm trị tuyệt đối ta được $p(u) = p(v)$, suy ra p là hàm hằng, do đó $f(x) = cx$, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$. Do f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(cx) = 0,\ f(-1) = \lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}(cx) = -c.$$

Vậy $f(x) = cx$, $\forall x \in \mathbb{R}$, thay vào (1) thấy thỏa mãn, còn thay vào (2) ta được $|c| \le 1$. Tất cả các hàm số cần tìm là $f(x) = cx$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (c là hằng số bất kì trong $[-1;1]$).

Bài toán 2.261. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện:* $f(xy) + f(x+y) = f(xy+x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. (1)

Giải. Ta có: (1) $\Leftrightarrow f(xy+x) - f(xy) = f(x+y) - f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. (2)
Trong (2) thay y bởi xy ta được

$$f\left(x^2y+x\right) - f\left(x^2y\right) = f(x+xy) - f(xy), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta có

$$f\left(x^2y+x\right) - f\left(x^2y\right) = f(x+y) - f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Trong (4) lại thay y bởi xy ta được

$$f\left(x^3y+x\right) - f\left(x^3y\right) = f(x+xy) - f(xy), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Từ (5) và (2) ta có

$$f\left(x^3y+x\right) - f\left(x^3y\right) = f(x+y) - f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Quy nạp theo n, suy ra: Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, ta có

$$f(x^ny+x) - f(x^ny) = f(x+y) - f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Giả sử $0 \ne |x| < 1$. Vì hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên từ (7) ta có

$$f(x+y) - f(y) = \lim_{n\to+\infty}[f(x+y) - f(y)] = \lim_{n\to+\infty}[f(x^ny+x) - f(x^ny)]$$
$$= f\left(\lim_{n\to+\infty}(x^ny+x)\right) - f\left(\lim_{n\to+\infty}(x^ny)\right) = f(x) - f(0).$$

Vậy

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - f(0), \forall y \in \mathbb{R},\ 0 \ne |x| < 1. \quad (8)$$

Giả sử $|x| > 1$. Vì hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên từ (7) ta có

$$f(x+y) - f(y) = \lim_{n\to-\infty}[f(x+y) - f(y)] = \lim_{n\to-\infty}[f(x^ny+x) - f(x^ny)]$$
$$= f\left(\lim_{n\to-\infty}(x^ny+x)\right) - f\left(\lim_{n\to-\infty}(x^ny)\right) = f(x) - f(0).$$

Do đó

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - f(0), \forall y \in \mathbb{R},\ |x| > 1. \quad (9)$$

Từ (8) và (9) ta có

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - f(0), \forall y \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1,-1\}. \quad (10)$$

Từ (10) suy ra

$$\lim_{x\to 1} f(x+y) = \lim_{x\to 1}[f(x) + f(y) - f(0)]$$
$$\Rightarrow f(1+y) = f(1) + f(y) - f(0), \forall y \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Tương tự, trong (10) cho $x \to -1$ và sử dụng tính liên tục của hàm f ta được

$$f(-1+y) = f(-1) + f(y) - f(0), \forall y \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Từ (10), (11), (12) suy ra

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - f(0), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (13)$$

Xét hàm số $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, như sau: $g(x) = f(x) - f(0)$. Khi đó hàm g liên tục trên $\mathbb{R}$ và từ (13) ta có

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

Từ (14), sử dụng kết quả bài toán 2.214 ở trang 278 ta được

$$g(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R},$$

với a là hằng số thực tùy ý nào đó. Vậy $f(x) = ax + b$, với a, b là các hằng số. Thử lại thấy thỏa mãn. Hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài có dạng

$$f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } a, b \text{ là các hằng số tùy ý).}$$

Bài toán 2.262. *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x) + f(y) + f(z) + f(x+y+z)$$
$$= f(x+y) + f(y+z) + f(z+x),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Kí hiệu $P(u,v,w)$ chỉ việc thay bộ $(x;y;z)$ bởi bộ $(u;v;w)$ vào (1).

$$P(x,y,y) \Rightarrow f(x)+2f(y)+f(x+2y)=2f(x+y)+f(2y)$$
$$\Rightarrow f(x+2y)-f(x+y)=f(x+y)-f(x)+[f(2y)-2f(y)].$$

Thực hiện $P(x+y,y,y)$ ta được

$$f(x+y)+2f(y)+f(x+3y)=f(x+2y)+f(2y)+f(x+2y)$$
$$\Rightarrow f(x+3y)-f(x+2y)=f(x+2y)-f(x+y)+[f(2y)-2f(y)].$$

Thực hiện liên tiếp ta được dãy phương trình hàm sau:

$$f(x+2y)-f(x+y)=f(x+y)-f(x)+[f(2y)-2f(y)]$$
$$f(x+3y)-f(x+2y)=f(x+2y)-f(x+y)+[f(2y)-2f(y)]$$
$$f(x+4y)-f(x+3y)=f(x+3y)-f(x+2y)+[f(2y)-2f(y)]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(x+(n+1)y)-f(x+ny)=f(x+ny)-f(x+(n-1)y)+[f(2y)-2f(y)]$$

Cộng lại ta được

$$f(x+(n+1)y)-f(x+y)=f(x+ny)-f(x)+n[f(2y)-2f(y)]$$
$$\Rightarrow [f(x+(n+1)y)-f(x+ny)]=f(x+y)-f(x)+n[f(2y)-2f(y)]$$
$$\Rightarrow [f(x+ny)-f(x+(n-1)y)]=f(x+y)-f(x)+(n-1)[f(2y)-2f(y)]$$
$$\Rightarrow f(x+ny)-f(x)=n[f(x+y)-f(x)]+\frac{n(n-1)}{2}[f(2y)-2f(y)].$$

Từ đây cho $x=0$ ta được

$$f(ny)-f(0)=n[f(y)-f(0)]+\frac{n(n-1)}{2}[f(2y)-2f(y)]$$
$$\Rightarrow f(ny)=\frac{f(2y)-2f(y)}{2}n^2+\frac{4f(y)-f(2y)-2f(0)}{2}n$$
$$\Rightarrow f(nx)=\frac{f(2x)-2f(x)}{2}n^2+\frac{4f(x)-f(2x)-2f(0)}{2}n,\ \forall x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Với p,q là các số nguyên dương ta có

$$f\left(q.\frac{p}{q}\right)=\frac{f(\frac{2p}{q})-2f(\frac{p}{q})}{2}q^2+\frac{4f(\frac{p}{q})-f(\frac{2p}{q})-2f(0)}{2}q.$$
$$f\left(q.\frac{p}{q}\right)=f(p)=\frac{f(2)-2f(1)}{2}p^2+\frac{4f(1)-f(2)-2f(0)}{2}p.$$

Suy ra

$$\frac{f(\frac{2p}{q})-2f(\frac{p}{q})}{2}q^2+\frac{4f(\frac{p}{q})-f(\frac{2p}{q})-2f(0)}{2}q$$

$$=\frac{f(2)-2f(1)}{2}p^2+\frac{4f(1)-f(2)-2f(0)}{2}p.$$

Từ đây thay p bởi pn và q bởi qn $(n=1,2,\ldots)$ ta được

$$\frac{f(\frac{2p}{q})-2f(\frac{p}{q})}{2}q^2n^2+\frac{4f(\frac{p}{q})-f(\frac{2p}{q})-2f(0)}{2}qn$$
$$=\frac{f(2)-2f(1)}{2}p^2n^2+\frac{4f(1)-f(2)-2f(0)}{2}pn.$$

Do đó

$$\left[\frac{f(\frac{2p}{q})-2f(\frac{p}{q})}{2}q^2-\frac{f(2)-2f(1)}{2}p^2\right]n^2$$
$$+\left[\frac{4f(\frac{p}{q})-f(\frac{2p}{q})-2f(0)}{2}q-\frac{4f(1)-f(2)-2f(0)}{2}p\right]n=0. \quad (2)$$

Do (2) đúng với mọi $n=1,2\ldots$ nên

$$\left[f(\frac{2p}{q})-2f(\frac{p}{q})\right]q^2-[f(2)-2f(1)]p^2=0, \quad (3)$$
$$\left[4f(\frac{p}{q})-f(\frac{2p}{q})-2f(0)\right]q-[4f(1)-f(2)-2f(0)]p=0. \quad (4)$$

Từ (3) rút $f(\frac{2p}{q})$ thay vào (4) ta được

$$\left[6f(\frac{p}{q})-[f(2)-2f(1)]\frac{p^2}{q^2}-2f(0)\right]q=[4f(1)-f(2)-2f(0)]p$$
$$\Rightarrow 6f(\frac{p}{q})-[f(2)-2f(1)]\frac{p^2}{q^2}-2f(0)=[4f(1)-f(2)-2f(0)]\frac{p}{q}$$
$$\Rightarrow f(\frac{p}{q})=\frac{[f(2)-2f(1)]}{6}\frac{p^2}{q^2}+\frac{[4f(1)-f(2)-2f(0)]}{6}\frac{p}{q}+\frac{f(0)}{3}$$
$$\Rightarrow f(r)=ar^2+br+c,\ \forall r\in\mathbb{Q},\ r>0. \quad (5)$$

Do hàm f liên tục nên từ (5) suy ra $f(x)=ax^2+bx+c,\ \forall x>0$. Từ (1) cho $x=y=z=0$ ta được $f(0)=0$. Với $x>0$, thực hiện $P(-x,x,x)$ ta được

$$f(-x)+2f(x)+f(x)=f(2x)\Leftrightarrow f(-x)+3f(x)=f(2x). \quad (6)$$

Do với $x>0$ thì $2x>0$ nên từ (6) ta có

$$f(-x)+3ax^2+3bx+3c=4ax^2+2bx+c\Leftrightarrow f(-x)=ax^2-bx-2c.$$

Vậy $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & \text{khi } x>0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \\ ax^2-bx-2c & \text{khi } x<0. \end{cases}$ Do f liên tục tại 0 nên

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)\Rightarrow 0=c=-2c\Leftrightarrow c=0.$$

Tóm lại $f(x)=ax^2+bx,\ \forall x\in\mathbb{R}$, với a, b là những hằng số tùy ý. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.263. *Tìm tất cả các hàm số f,g,h xác định và liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn phương trình hàm:*

$$f(x+y)=g(x)+h(y),\forall x,y,x+y\in[0;1]. \tag{1}$$

Giải. Trong (1) lấy $y=0$ ta được:

$$g(x)=f(x)-a,\forall x\in[0;1]\ \text{(với } a=h(0)). \tag{2}$$

Trong (1) lấy $x=0$ ta được:

$$h(y)=f(y)-b,\forall x\in[0;1]\ \text{(với } b=g(0)). \tag{3}$$

Thay (2) và (3) vào (1) ta được:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)-(a+b),\forall x,y,x+y\in[0;1]. \tag{4}$$

Đặt $f(x)-(a+b)=k(x),\forall x,y,x+y\in[0;1]$. Thay vào (4) ta được

$$k(x+y)=k(x)+k(y),\forall x,y,x+y\in[0;1]. \tag{5}$$

Vì f là hàm liên tục trên $[0;1]$ nên k là hàm liên tục trên $[0;1]$, do đó từ (5) và sử dụng kết quả bài toán 2.252 ở trang 308 suy ra: $k(x)=cx,\forall x\in[0;1]$. Vậy, các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là: $f(x)=cx+a+b,\forall x\in[0;1]$ và

$$g(x)=cx+b,\forall x\in[0;1]\ \text{ và }\ h(x)=cx+a,\forall x\in[0;1].$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

2.8 Phương trình hàm dạng $f(G(x,y))=F(f(x),f(y))$

Trong bài này ta sẽ xét một số phương trình hàm với cặp biến tự do và hàm cần tìm là liên tục. Cách giải chung là:

- *Thiết lập công thức cho hàm trong $\mathbb{N}$.*
- *Thiết lập công thức cho hàm trong $\mathbb{Z}$.*
- *Thiết lập công thức cho hàm trong $\mathbb{Q}$.*

Từ đó chuyển qua giới hạn để thiết lập công thức tương tự cho hàm trong tập số thực $\mathbb{R}$. Chú ý rằng tính liên tục không có tác dụng đối với các phương trình hàm trên tập các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$. Tuy nhiên nếu biết chắc chắn là hàm liên tục, ta có thể thiết lập công thức cho hàm trong $\mathbb{Q}$ và suy ra công thức tương tự trong $\mathbb{R}$.

2.8.1 Phương trình hàm $f(x+y)=F(f(x),f(y))$

Xét phương trình hàm dạng

$$f(x+y)=F(f(x),f(y)), \tag{1}$$

trong đó f là hàm số liên tục.

Cách giải. Trong (1), cho $y=x$, ta được

$$f(2x)=F(f(x),f(x)):=F_2(f(x)),$$
$$f(3x)=f(2x+x)=F(f(2x),f(x))=F(F_2(f(x)),f(x)):=F_3(f(x)).$$

Một cách tổng quát, ta có

$$f(nx)=f((n-1)x+x)=F(f(n-1)x,f(x))=F(F_{n-1}(f(x)),f(x))$$

Hay

$$f(nx):=F_n(f(x)),\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \text{với}\ F_n(z)=F(F_{n-1}(z),z),F_1(z):=z \tag{2}$$

Đặt $f(1)=c$, khi đó, từ (2), ta tính $f\left(\frac{m}{n}\right)$ (với $m,n=1,2,\ldots$) như sau

$$f(n)=f(n.1)=F_n(f(1))=F_n(c),$$
$$\Rightarrow f(m)=f\left(n.\frac{m}{n}\right)=F_n\left(f\left(\frac{m}{n}\right)\right)=F_m(c)$$
$$\Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right)\in F_n^{-1}(\{F_m(c)\}).$$

Vậy ta tìm được $f\left(\frac{m}{n}\right)$ (với $m,n=1,2,\ldots$), vì f liên tục nên từ đây, chuyển qua giới hạn ta tìm được $f(x),\forall x>0$. Mặt khác, từ (1) cho $x=y=0$, ta có thể tìm được $f(0)$. Sau đó tìm được $f(x),\forall x<0$.

Bài toán 2.264. *Tìm tất cả các hàm số liên tục f thỏa mãn*

$$f(x+y)=f(x)+f(y)-f(x)f(y),\forall x,y\in\mathbb{R} \tag{1}$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn đề bài, khi đó ta có (1). Trong (1), lấy $y=x$, ta được

$$f(2x)=2f(x)-[f(x)]^2=1-[1-f(x)]^2,\forall x\in\mathbb{R} \tag{2}$$

(F_2 ở đây là $F_2(x)=2x-x^2=1-(1-x)^2$). Vậy

$$\begin{aligned} f(3x)&=f(2x+x)=f(2x)+f(x)-f(2x)f(x)\\ &=2f(x)-[f(x)]^2+f(x)-\left[2f(x)-[f(x)]^2\right]f(x)\\ &=3f(x)-3[f(x)]^2+[f(x)]^3=1-[1-f(x)]^3,\forall x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

(F_3 ở đây là $F_3(x) = 3x - 3x^2 + x^3 = 1 - (1-x)^3$). Giả sử

$$f(nx) = 1 - [1 - f(x)]^n, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$\begin{aligned} f((n+1)x) &= f(nx + x) = f(nx) + f(x) - f(nx)f(x) \\ &= 1 - [1 - f(x)]^n + f(x) - [1 - [1 - f(x)]^n] f(x) \\ &= 1 - [1 - f(x)]^n + [1 - f(x)]^n f(x) = 1 - [1 - f(x)]^{n+1}. \end{aligned}$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp toán học, suy ra

$$f(nx) = 1 - [1 - f(x)]^n, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n = 1, 2, \ldots \quad (3)$$

Trong (2), thay x bởi $\frac{x}{2}$, ta được $f(x) = 1 - \left[1 - f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Với $n, m = 1, 2, \ldots$, theo (3), ta có

$$\begin{aligned} &f(n) = f(n.1) = 1 - [1 - f(1)]^n \\ \Rightarrow &f(m) = f\left(n.\frac{m}{n}\right) = 1 - \left[1 - f\left(\frac{m}{n}\right)\right]^n = 1 - [1 - f(1)]^m \\ \Rightarrow &\left[1 - f\left(\frac{m}{n}\right)\right]^n = [1 - f(1)]^m \overset{\text{do } f(1) \leq 1}{\Rightarrow} f\left(\frac{m}{n}\right) = 1 - \sqrt[n]{[1 - f(1)]^m}. \end{aligned} \quad (4)$$

- Nếu $f(1) = 1$ thì từ (1) suy ra

$$f(x) = f(1 + (x-1)) = 1 + f(x-1) - f(x-1) = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Nếu $f(1) \neq 1$ thì $f(1) < 1$. Gọi $c = \ln(1 - f(1))$, khi đó theo (4) ta có

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = 1 - e^{\frac{cm}{n}}, \forall n, m = 1, 2, \ldots$$

Nghĩa là

$$f(r) = 1 - e^{c.r}, \forall r \in \mathbb{Q}, r > 0.$$

Với mọi $x \in \mathbb{R}, x > 0$, khi đó tồn tại dãy số hữu tỉ dương $\{r_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = x$. Vì f liên tục nên

$$f(x) = f\left(\lim_{n \to +\infty} r_n\right) = \lim_{n \to +\infty} f(r_n) = \lim_{n \to +\infty} (1 - e^{c.r_n}) = 1 - e^{cx}.$$

Vậy

$$f(x) = 1 - e^{cx}, \forall x \in \mathbb{R}, x > 0. \quad (5)$$

Trong (1), cho $x = y = 0$, ta được

$$f(0) - [f(0)]^2 = 0 \Leftrightarrow f(0)[1 - f(0)] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(0) = 1. \end{array}\right. \quad (6)$$

Nếu $f(0) = 1$, thì trong (1), lấy $x = 1$, $y = 0$, ta được

$$f(1) = f(1+0) = f(1) + 1 - f(1) \Rightarrow f(1) = 1,$$

điều này mâu thuẫn với $f(1) \neq 1$, vậy $f(0) \neq 1$, do đó từ (6) ta có $f(0) = 0$. Với mọi $x \in \mathbb{R}, x < 0$, trong (1), lấy $y = -x$, ta được

$$\begin{aligned} &0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x) - f(x)f(-x), \forall x < 0 \\ \Rightarrow &f(x) = \frac{-f(-x)}{1 - f(-x)} = \frac{e^{-cx} - 1}{e^{-cx}} = 1 - e^{cx}, \forall x < 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Từ (5), (7), và $f(0) = 0$, suy ra $f(x) = 1 - e^{cx}, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy các hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(x) = 1 - e^{cx}, \forall x \in \mathbb{R} \ (c \text{ là hằng số tùy ý})$$

Chú ý 6. *Trong bài toán trên, nếu đặt $g(x) = 1 - f(x)$ thì ta được phương trình hàm Cauchy $g(x+y) = g(x)g(y)$.*

Bài toán 2.265. *Tìm tất cả các hàm số liên tục f thỏa mãn*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Hướng dẫn. Ngoài cách làm tương tự như bài toán 2.264, ta còn có thể làm nhanh hơn như sau: Phương trình hàm (1) khiến ta liên tưởng đến các phương trình hàm Cauchy. Vậy ta sẽ tìm cách đặt ẩn phụ (đổi biến) để đưa về các phương trình hàm Cauchy. Trước hết ta tìm một nghiệm riêng của (1), tốt nhất là tìm nghiệm riêng là hàm hằng, muốn vậy xét phương trình

$$C = C + C + C.C \Leftrightarrow C^2 + C = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C = 0 \\ C = -1. \end{array}\right.$$

Ta xét $C = -1$. Nghiệm tổng quát của (1) sẽ có dạng $f(x) = g(x) + (-1)$. Vậy ta sẽ đặt $f(x) = g(x) - 1$. Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned} &g(x+y) - 1 = g(x) - 1 + g(y) - 1 + [g(x) - 1][g(y) - 1] \\ \Leftrightarrow &g(x+y) = g(x) + g(y) - 1 + g(x)g(y) - g(x) - g(y) + 1 \\ \Leftrightarrow &g(x+y) = g(x).g(y). \end{aligned}$$

Sau đó sử dụng kết quả bài toán 2.216 ở trang 280 ta được kết quả: Các hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x) = -1, \forall x \in \mathbb{R}; \ f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(x) = c^x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

(c là hằng số dương khác 1, tùy ý).

Bài toán 2.266. *Tìm các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(x+y)=af(x)f(y)+bf(x)+bf(y)+\frac{b^2-b}{a},\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Hướng dẫn. Từ (1) ta thấy rằng cần đặt $f(x)=\alpha g(x)+\beta$, thay vào (1) được

$$\alpha g(x+y)+\beta=a\left[\alpha g(x)+\beta\right]\left[\alpha g(y)+\beta\right]+b\left[\alpha g(x)+\beta+\alpha g(y)+\beta\right]+\frac{b^2-b}{a},\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Hệ số của $g(x)g(y)$, $g(x)$, $g(y)$ ở vế phải của (2) lần lượt là $a\alpha^2$, $a\alpha\beta+b\alpha$, $a\alpha\beta+b\alpha$. Vậy ta cần chọn α và β sao cho

$$\begin{cases} a\alpha^2=\alpha \\ a\alpha\beta+b\alpha=0 \\ \beta=a\beta^2+2b\beta+\dfrac{b^2-b}{a} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a\alpha=1 \\ a\beta+b=0 \end{cases}\Rightarrow(\alpha;\beta)=\left(\frac{1}{a};-\frac{b}{a}\right).$$

Do đó ta đặt $f(x)=\dfrac{g(x)-b}{a}$, thay vào (1) sẽ được

$$g(x+y)=g(x)g(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Đến đây ta sử dụng bài toán 2.216 ở trang 280.

Bài toán 2.267. *Tìm các hàm số f xác định và liên tục trên tập xác định, thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)+2f(x)f(y)}{1-f(x)f(y)},\ f(x)f(y)\neq 1. \tag{1}$$

Giải. Đặt $\alpha=f(0)$. Trong (1) cho $x=y=0$ ta được

$$\alpha=\frac{2\alpha+2\alpha^2}{1-\alpha^2}\Leftrightarrow\alpha-\alpha^3=2\alpha+2\alpha^2\Leftrightarrow\alpha^3+2\alpha^2+\alpha=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=0\\ \alpha=-1.\end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $f(0)=-1$. Khi đó, cho $y=0$ phương trình (1) trở thành

$$f(x)=\frac{f(x)-1-2f(x)}{1+f(x)},\ f(x)\neq -1.$$

Ta thu được $f(x)\equiv -1$ (loại).

Trường hợp 2: $f(0)=0$. Cho $y=x$ ta thu được

$$f(2x)=\frac{2f(x)+2[f(x)]^2}{1-[f(x)]^2}=\frac{2f(x)}{1-f(x)},\ f(x)\neq 1.$$

Cho $y=2x$, ta được

$$f(3x)=\frac{f(x)+f(2x)+2f(x)f(2x)}{1-f(x)f(2x)}=\frac{f(x)+\dfrac{2f(x)}{1-f(x)}+2f(x)\dfrac{2f(x)}{1-f(x)}}{1-f(x)\dfrac{2f(x)}{1-f(x)}}$$

$$=\frac{f(x)-[f(x)]^2+2f(x)+4[f(x)]^2}{1-f(x)-2[f(x)]^2}=\frac{3f(x)+3[f(x)]^2}{[1+f(x)]\,[1-2f(x)]}.$$

Suy ra

$$f(3x)=\frac{3f(x)}{1-2f(x)},\ f(x)\neq\frac{1}{2}.$$

Giả sử ta có

$$f(nx)=\frac{nf(x)}{1-(n-1)f(x)},\ f(x)\neq\frac{1}{n-1},\ n\geq 1.$$

Khi đó

$$f((n+1)x)=f(nx+x)=\frac{f(nx)+f(x)+2f(nx)f(x)}{1-f(nx)f(x)}$$

$$=\frac{\dfrac{nf(x)}{1-(n-1)f(x)}+f(x)+\dfrac{2n[f(x)]^2}{1-(n-1)f(x)}}{1-\dfrac{n[f(x)]^2}{1-(n-1)f(x)}}$$

$$=\frac{nf(x)+f(x)-(n-1)[f(x)]^2+2n[f(x)]^2}{1-(n-1)f(x)-n[f(x)]^2}$$

$$=\frac{nf(x)+f(x)+(n+1)[f(x)]^2}{[1-nf(x)]\,[1+f(x)]}$$

$$=\frac{(n+1)f(x)[1+f(x)]}{[1-nf(x)][1+f(x)]}=\frac{(n+1)f(x)}{1-nf(x)},\ f(x)\neq\frac{1}{n},\forall x\in\mathbb{R}.$$

Theo nguyên lý quy nạp, ta có

$$f(nx)=\frac{nf(x)}{1-(n-1)f(x)},\ f(x)\neq\frac{1}{n-1},\ n\in\mathbb{N}^*. \tag{2}$$

Trong (2) lần lượt cho $x=1, x=\dfrac{m}{n},\forall m,n\in\mathbb{N}^*$ ta được

$$f(n)=\frac{nf(1)}{1-(n-1)f(1)},\ f(m)=\frac{nf(\frac{m}{n})}{1-(n-1)f(\frac{m}{n})},\ f(\frac{m}{n})\neq\frac{1}{n-1}.$$

Do đó

$$\frac{mf(1)}{1-(m-1)f(1)} = f(m) = \frac{nf(\frac{m}{n})}{1-(n-1)f(\frac{m}{n})}, f(\frac{m}{n}) \neq \frac{1}{n-1}.$$

Suy ra

$$mf(1) - m(n-1)f(1)f\left(\frac{m}{n}\right) = nf\left(\frac{m}{n}\right) - n(m-1)f(1)f\left(\frac{m}{n}\right)$$

$$\Rightarrow mf(1) + mf(1)f\left(\frac{m}{n}\right) = nf\left(\frac{m}{n}\right) + nf(1)f\left(\frac{m}{n}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right)[nf(1) + n - mf(1)] = mf(1) \Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{mf(1)}{nf(1) + n - mf(1)}.$$

Suy ra

$$f(\frac{m}{n}) = \frac{\frac{m}{n}f(1)}{1 + f(1) - \frac{m}{n}f(1)}.$$

Do f liên tục nên bằng cách lấy giới hạn, ta được

$$f(x) = \frac{bx}{1+b-bx}, \forall x > 0, x \neq \frac{1+b}{b}, b = f(1) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{ax}{1-ax}, \forall x > 0, x \neq \frac{1}{a}, a \in \mathbb{R} \text{ (với } a = \frac{b}{1+b}).$$

Với $x < 0$, trong (1) ta cho $y = -x$. Khi đó

$$0 = f(0) = \frac{f(x) + f(-x) + 2f(x)f(-x)}{1 - f(x)f(-x)}$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) + 2f(x)f(-x) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-f(-x)}{1+2f(-x)} = \frac{\frac{ax}{1+ax}}{1 + \frac{-2ax}{1+ax}} = \frac{ax}{1-ax}, \forall x < 0, x \neq \frac{1}{a}.$$

Như vậy ta có

$$f(x) = \frac{ax}{1-ax}, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{1}{a}.$$

Sau khi thử lại (để ý rằng $f(x)f(y) \neq 1$ khi $x + y \neq \frac{1}{a}$), ta được nghiệm

$$f(x) = \frac{ax}{1-ax}, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{1}{a}, a \in \mathbb{R}^*.$$

2.8.2 Phương trình hàm $f(x+y) = F(f(x-y), f(x), f(y), x, y)$

Xét phương trình hàm

$$f(x+y) = F(f(x-y), f(x), f(y), x, y) \quad (1)$$

trong đó f là hàm số liên tục.

Cách giải. Trong (1), cho $y = x$, ta được

$$f(2x) = F(a, f(x), f(x), x, x) \text{ (với } a = f(0)).$$

Trong (1), thay x bởi $2x$ và thay y bởi x, ta được

$$f(3x) = F(f(x), f(2x), f(x), 2x, x).$$

Một cách tổng quát, ta có

$$f(nx) = f((n-1)x + x)$$
$$= F(f((n-2)x), f((n-1)x), f(x), (n-1)x, x) := F_n(f(x), x) \quad (2)$$

Từ (2), ta tìm $f\left(\frac{m}{n}\right)$, với $m, n = 1, 2, \ldots$ Vì f liên tục nên từ đây, chuyển qua giới hạn ta tìm được $f(x), \forall x > 0$. Sau đó tìm được $f(x), \forall x < 0$.

Bài toán 2.268 (Olympic toán Sinh viên toàn quốc-2010). *Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = 2010$ và*

$$f(x+y) = 2010^x f(y) + 2010^y f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Trong (1) lấy $y = x$ được

$$f(2x) = 2.2010^x f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Trong (1) lấy $y = 2x$ và sử dụng (2) ta được

$$f(3x) = f(2x + x) = 2010^{2x} f(x) + 2010^x f(2x)$$
$$= 2010^{2x} f(x) + 2.2010^{2x} f(x) = 3.2010^{2x} f(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Giả sử $f(nx) = n.2010^{(n-1)x} f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = 2010^{nx} f(x) + 2010^x f(nx)$$
$$= 2010^{nx} f(x) + n.2010^{nx} f(x) = (n+1)2010^{nx} f(x).$$

Theo nguyên lí quy nạp suy ra

$$f(nx) = n.2010^{(n-1)x} f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n = 1, 2, \ldots. \quad (4)$$

Vậy

$$f(n) = f(n.1) = n.2010^{n-1} f(1) = n.2010^n, \ \forall n = 1, 2, \ldots. \quad (5)$$

Với $n = 1, 2, \ldots$ và $m = 1, 2, \ldots$, theo (4) và (5) ta có

$$f(n) = f\left(m.\frac{n}{m}\right) = m.2010^{(m-1)\frac{n}{m}} f\left(\frac{n}{m}\right) = n.2010^n$$

Suy ra $m.2010^{n-\frac{n}{m}} f\left(\frac{n}{m}\right) = n.2010^n \Rightarrow f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m}2010^{\frac{n}{m}}$. Vậy

$$f(r) = r.2010^r, \forall r \in \mathbb{Q}, r > 0. \quad (6)$$

Với mọi $x \in \mathbb{R}, x > 0$, khi đó tồn tại dãy số hữu tỉ dương $\{r_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = x$. Vì f liên tục nên

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to+\infty} r_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(r_n) = \lim_{n\to+\infty} (r_n.2010^{r_n}) = x.2010^x.$$

Vậy

$$f(x) = x.2010^x, \forall x \in \mathbb{R}, x > 0. \quad (7)$$

Trong (2) lấy $x = 0$ ta được $f(0) = 0$. Do đó trong (1), xét $x < 0$, từ (1) và (7) ta được

$$\begin{aligned} 0 = f(x - x) &= 2010^x f(-x) + 2010^{-x} f(x) \\ &= 2010^x(-x).2010^{-x} + 2010^{-x}.f(x) = -x + 2010^{-x}.f(x). \end{aligned}$$

Suy ra $f(x) = x.2010^x, \forall x < 0$. Kết hợp với (7) và $f(0) = 0$, suy ra

$$f(x) = x.2010^x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại đúng.

Cách khác. Đặt $f(x) = 2010^x g(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó hàm số g liên tục trên $\mathbb{R}$. Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned} &2010^{x+y} g(x+y) = 2010^{x+y} g(y) + 2010^{x+y} g(x), \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &g(x+y) = g(y) + g(x), \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Theo bài toán 2.214 ở trang 278 suy ra $g(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$. Vì $g(1) = \frac{f(1)}{2010} = 1$ nên $a = 1$. Vậy $g(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $f(x) = x.2010^x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại đúng. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x) = x.2010^x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.269. *Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(1) = 2$ và*

$$f(x+y) = 2^y f(x) + 2^x f(y) + 2^{x+y+1}.xy, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Bài toán 2.270. *Tìm các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(x+y) = a^{xy} f(x) f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Hướng dẫn. Từ (1) ta thấy rằng cần đặt $f(x) = a^{\alpha x^2} g(x)$, thay vào (1) được

$$a^{\alpha(x+y)^2} g(x+y) = a^{\alpha(x^2+y^2)+xy} g(x) g(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Cần chọn α sao cho $\alpha(x+y)^2 = \alpha(x^2+y^2) + xy, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$, tức là $\alpha = \frac{1}{2}$. Do đó ta đặt $f(x) = a^{\frac{x^2}{2}} g(x)$, thay vào (1) sẽ được

$$g(x+y) = g(x) g(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đến đây ta sử dụng bài toán 2.216 ở trang 280.

Bài toán 2.271. *Tìm các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(x+y) = 2015^{x^2y+xy^2} f(x) f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Hướng dẫn. Từ (1) thấy rằng cần đặt $f(x) = 2015^{\alpha x^3} g(x)$, thay vào (1) được

$$2015^{\alpha(x+y)^3} f(x+y) = 2015^{\alpha(x^3+y^3)+x^2y+xy^2} f(x) f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ta cần chọn α sao cho $\alpha(x+y)^3 = \alpha(x^3+y^3) + x^2y + xy^2, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$, hay $3\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3}$. Do đó ta đặt $f(x) = 2015^{\frac{x^3}{3}} g(x)$, thay vào (1) sẽ được

$$g(x+y) = g(x) g(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đến đây ta sử dụng bài toán 2.216 ở trang 280.

Bài toán 2.272 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2011). *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to [0; +\infty)$ sao cho*

$$f^2(x+y) - f^2(x-y) = 4f(x) f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.273. *Tìm các hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2\left[f(x) + f(y)\right], \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn đề bài, khi đó ta có (1). Trong (1) ta lấy $x = y = 0$, ta được $f(0) = 0$. Trong (1) lấy $x = 0$, ta được

$$\begin{aligned} &f(y) + f(-y) = 2f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &f(-y) = f(y), \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Trong (1) lấy $y = x$, ta được $f(2x) = 4f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Trong (1) lấy $x = 2y$, ta được

$$\begin{aligned} & f(3y) + f(y) = 2\left[f(2y) + f(y)\right], \forall y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & f(3y) + f(y) = 2\left[4f(y) + f(y)\right], \forall y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & f(3y) = 9f(y), \forall y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & f(3x) = 9f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Giả sử $f((n-1)x) = (n-1)^2 f(x), \forall x \in \mathbb{R}$; $f(nx) = n^2 f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned} f((n+1)x) &= f(nx + x) = -f(nx - x) + 2\left[f(nx) + f(x)\right] \\ &= -(n-1)^2 f(x) + 2\left[n^2 f(x) + f(x)\right] \\ &= (-n^2 + 2n - 1 + 2n^2 + 2)f(x) = (n+1)^2 f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Theo nguyên lí quy nạp toán học suy ra

$$f(nx) = n^2 f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Trong (2) lấy $x = 1$, ta được $f(n) = n^2 f(1)$. Suy ra

$$f(1) = f\left(n.\frac{1}{n}\right) = n^2 f\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{f(1)}{n^2}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Lấy $x = \dfrac{m}{n}, \forall m, n = 1, 2, \ldots$, ta được

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m.\frac{1}{n}\right) = m^2 f\left(\frac{1}{n}\right) = m^2 \frac{f(1)}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 f(1).$$

Vậy $f(r) = ar^2, \forall r \in \mathbb{Q}, r > 0$ (với $a = f(1)$).

• Với mọi $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, khi đó tồn tại dãy số hữu tỉ dương $\{r_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = x$. Vì f liên tục nên

$$f(x) = f\left(\lim_{n \to +\infty} r_n\right) = \lim_{n \to +\infty} f(r_n) = \lim_{n \to +\infty} \left(ar_n^2\right) = ax^2.$$

Vậy $f(x) = ax^2, \forall x > 0$ (với $a = f(1)$).

• Với $x < 0$, vì $f(-y) = f(y), \forall y \in \mathbb{R}$ nên suy ra

$$f(x) = f(-x) = a(-x)^2 = ax^2, \forall x < 0.$$

Vậy $f(x) = ax^2, \forall x \in \mathbb{R}$ (với a là hằng số). Thử lại đúng.

Lưu ý. Phương trình hàm (1) liên quan quan đến đẳng thức hình bình hành:

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 2\left(|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2\right).$$

Bản chất của lời giải là chứng minh nếu hàm f liên tục và thỏa mãn đẳng thức hình bình hành thì phải có dạng $f(x) = f(1)x^2$.

Bài toán 2.274. *Tìm các hàm số f liên tục và thỏa mãn điều kiện*

$$f(x + y) - f(x - y) = 2f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Trong (1) cho $x = y = 0$ ta được $f(0) = 0$. Cho $x = 0$ ta được

$$f(-y) = -f(y), \forall y \in \mathbb{R}.$$

Cho $y = x$, ta được

$$f(2x) = 2f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cho $x = 2y$ ta được $f(3y) - f(y) = 2f(y), \forall y \in \mathbb{R}$, hay

$$f(3x) = 3f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta sẽ chứng minh với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì

$$f(nx) = nf(x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Hiển nhiên (2) đúng khi $n = 1$. Giả sử (2) đúng tới $n = k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, tức là

$$f(kx) = kf(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó

$$f[(k+1)x] = f(kx + x) = f[(k-1)x] + 2f(x) = (k+1)f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy (2) cũng đúng khi $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp suy ra (2) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Trong (2) lần lượt cho $x = 1, x = \dfrac{m}{n}, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$, ta được

$$f(n) = nf(1), f(m) = nf(\frac{m}{n}).$$

suy ra $f(\frac{m}{n}) = (\frac{m}{n})f(1)$. Do f liên tục nên bằng cách lấy giới hạn, ta được

$$f(x) = ax, \forall x > 0, a = f(1) \in \mathbb{R}.$$

Với $x < 0$, ta có $f(x) = -f(-x) = -a(-x) = ax$. Lại do $f(0) = 0$ nên

$$f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R} \ (a \text{ là hằng số})$$

hàm này thỏa mãn điều kiện bài toán. Vậy nghiệm của bài toán là:

$$f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R} \ (a \text{ là hằng số}).$$

Lưu ý. Có thể đặt $u = x + y$, $v = x - y$ để giải bài toán này.

Bài toán 2.275. *Tìm các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$[f(x)f(y)]^2 = f(x + y)f(x - y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Dễ thấy hàm $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Tiếp theo giả sử $f(x) \neq 0$, tức là tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Kí hiệu $P(u, v)$ chỉ việc thay x bởi u, thay y bởi v vào (1).

$$P(x_0, 0) \Rightarrow [f(x_0)f(0)]^2 = [f(x_0)]^2 \Rightarrow f^2(0) = 1 \Rightarrow f(0) = \pm 1. \quad (2)$$

Nhận xét rằng nếu hàm $f(x)$ thỏa mãn (1) thì $-f(x)$ cũng thỏa (1) nên từ (2) ta có thể giả sử $f(0) = 1$. Nếu tồn tại $t \neq 0$ sao cho $f(t) = 0$ thì

$$P\left(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right) \Rightarrow f^4\left(\frac{t}{2}\right) = f(t) \Rightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{t}{2^n}\right) = 0, \ \forall n = 1, 2, \ldots$$

Do f liên tục nên $0 = \lim\limits_{n \to +\infty} f\left(\frac{t}{2^n}\right) = f\left(\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{t}{2^n}\right) = f(0)$, mâu thuẫn. Vì thế nên $f(t) \neq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$. Ta có thể giả sử $f(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Từ (1) suy ra

$$\begin{aligned}
&\ln (f(x)f(y))^2 = \ln (f(x+y)f(x-y)), \ \forall x, y \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow &2\left[\ln (f(x)) + \ln (f(y))\right] = \ln (f(x+y)) + \ln (f(x-y)), \ \forall x, y \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow &g(x+y) + g(x-y) = 2\left[g(x) + g(y)\right], \ \forall x, y \in \mathbb{R} \ \Big(g(x) = \ln (f(x))\Big).
\end{aligned}$$

Do hàm g liên tục nên đến đây, sử dụng bài toán 2.273 ở trang 329 ta được $g(x) = ax^2, \forall x \in \mathbb{R}$ (với a là hằng số). Do đó $f(x) = e^{g(x)} = e^{ax^2}$. Sau khi thử lại ta kết luận: Các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x) \equiv 0$, $f(x) = e^{ax^2}$, $f(x) = -e^{bx^2}$, với a và b là những hằng số tùy ý.

2.8.3 Phương trình hàm $f(ax + by + c) = Af(x) + Bf(y) + C$

Định lý 10. *Nếu f không phải là hàm hằng và thỏa mãn*

$$f(ax + by + c) = Af(x) + Bf(y) + C, abAB \neq 0, \forall x, y \in \mathbb{R},$$

thì hàm $g(x) = f(x) - f(0), \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa phương trình hàm Cauchy

$$g(x + y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh. Trong phương trình đã cho lấy $x = \frac{u}{a}, y = \frac{v - c}{b}$ ta được

$$f(u + v) = Af(\tfrac{u}{a}) + Bf(\tfrac{v - c}{b}) + C.$$

- Cho $x = \frac{u}{a}, y = -\frac{c}{b}$, ta được $f(u) = Af(\frac{u}{a}) + Bf(-\frac{c}{b}) + C$.
- Cho $x = 0, y = \frac{v - c}{b}$, ta được $f(v) = Af(0) + Bf(\frac{v - c}{b}) + C$.

- Cho $x = 0, y = -\frac{c}{b}$, ta được $f(0) = Af(0) + Bf(-\frac{c}{b}) + C$.

Suy ra

$$\begin{aligned}
&f(u + v) = f(u) + f(v) - f(0), \forall u, v \in \mathbb{R}. \\
\Leftrightarrow &f(x + y) - f(0) = f(x) - f(0) + f(y) - f(0), \forall x, y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Từ đây ta có $g(x + y) = g(x) + g(y)$, với $g(x) = f(x) - f(0), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Định lý đã được chứng minh.

Bài toán 2.276. *Tìm tất cả các hàm f xác định trên $\mathbb{R}$ và liên tục tại một điểm và thỏa mãn*

$$f(ax + by + c) = Af(x) + Bf(y) + M, abAB \neq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Hướng dẫn.

Trường hợp 1. Khi (1) có nghiệm hằng $f(x) = k, \forall x \in \mathbb{R}$. Thay nghiệm $f(x) = k$ vào (1) ta được

$$k = (A + B)k + M \Leftrightarrow (1 - A - B)k = M.$$

Nếu $(1 - A - B) \neq 0$ thì $k = \dfrac{M}{1 - A - B}$. Khi đó, $f(x) \equiv \dfrac{M}{1 - A - B}$. Nếu $(1 - A - B) = 0$ và $M = 0$ thì $\forall k \in \mathbb{R}$, hàm $f(x) = k$ là nghiệm. Nếu $(1 - A - B) = 0$ và $M \neq 0$ thì bài toán không có nghiệm hằng.

Trường hợp 2. Phương trình (1) có nghiệm không hằng $f(x)$ liên tục tại một điểm. Khi đó ta đặt $g(x) = f(x) - f(0), \forall x \in \mathbb{R}$. Theo định lý trên thì $g(x)$ là nghiệm của phương trình hàm Cauchy $g(x + y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Do $f(x)$ liên tục tại một điểm nên $g(x)$ liên tục tại một điểm. Hơn nữa, $g(x)$ thỏa mãn phương trình hàm Cauchy nên ta có thể chứng minh được $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và ta còn có $g(x) = \alpha x, \forall x \in \mathbb{R}, \alpha$ tùy ý, suy ra dạng của $f(x)$ là

$$f(x) = \alpha x + \gamma, \forall x \in \mathbb{R}, \gamma = f(0) \in \mathbb{R}.$$

(Để ý rằng vì $f(x)$ không hằng nên $\alpha \neq 0$.) Bây giờ ta thử lại:

$$\begin{aligned}
&f(ax + by + c) = Af(x) + Bf(y) + M, \forall x, y \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow &\alpha(ax + by + c) + \gamma = A(\alpha x + \gamma) + B(\alpha y + \gamma) + M, \forall x, y \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow &(a\alpha - A\alpha)x + (b\alpha - B\alpha)y = A\gamma + B\gamma + M - c\alpha - \gamma, \forall x, y \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} (a - A)\alpha = 0 \\ (b - B)\alpha = 0 \\ A\gamma + B\gamma + M - c\alpha - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = A \\ b = B \\ (A + B - 1)\gamma = c\alpha - M \end{cases}
\end{aligned}$$

Ta có kết luận:

- Nếu $a = A, b = B, A + B - 1 \neq 0$ thì bài toán có nghiệm không hằng liên tục là

$$f(x) = \alpha x + \frac{c\alpha - M}{A + B - 1}, \forall x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

• Nếu $a = A, b = B, A + B = 1, c = M = 0$ thì bài toán có nghiệm không hằng liên tục là

$$f(x) = \alpha x + \gamma, \forall x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^*, \gamma \text{ tùy ý.}$$

• Nếu $a = A, b = B, A + B = 1, c \neq 0, M \neq 0$ thì bài toán có nghiệm không hằng liên tục là

$$f(x) = \frac{M}{c}x + \gamma, \forall x \in \mathbb{R}, \gamma \text{ tùy ý.}$$

• Ngoài ba khả năng này thì bài toán không có nghiệm liên tục không hằng tại một điểm. Bài toán được giải hoàn toàn.

Sau đây là một số áp dụng của bài toán 2.276.

Bài toán 2.277. *Tìm các hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}, ab \neq 0$$

Hướng dẫn.

Nếu $a + b \neq 1$ thì $f(x) = \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Nếu $a + b = 1$ thì $f(x) = \alpha x + \gamma, \alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Bài toán 2.278. *Tìm các hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(ax + by) = af(x) - bf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}, ab \neq 0$$

Hướng dẫn.

Nếu $a - b \neq 1$ thì $f(x) \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nếu $a - b = 1$ thì $f(x) = \gamma, \gamma \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Bài toán 2.279. *Cho $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tìm các hàm $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ xác định, liên tục trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn điều kiện*

$$f(x^a y^b) = [f(x)]^a [f(y)]^b, \forall x, y \in (0; +\infty).$$

Hướng dẫn.

Nếu $a + b \neq 1$ thì $f(x) = e^{\alpha \ln x}, \alpha \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Nếu $a + b = 1$ thì $f(x) = e^{\alpha \ln x + \gamma}; \alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Bài toán 2.280. *Cho $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tìm các hàm $f : (0 : +\infty) \to (0 : +\infty)$ xác định, liên tục trên $(0 : +\infty)$ và thỏa mãn điều kiện*

$$f(ax + by) = [f(x)]^a [f(y)]^b, \forall x, y \in (0 : +\infty).$$

Hướng dẫn. $f(x) \equiv 0; f(x) = \gamma \alpha^x, \alpha > 0, \gamma$ tùy ý.

2.8.4 Phương trình hàm $f(ax + by + c) = F(f(x), f(y))$

Xét phương trình hàm

$$f(ax + by + c) = F(f(x), f(y)), ab \neq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Cách giải. Ta đưa phương trình (1) về dạng đã biết $f(x+y) = F(f(x), f(y))$.

Trường hợp 1. Nếu $a + b = 0$ thì $b = -a$. Từ (1) ta có

$$f((a(x - y) + c) = F(f(x), f(y)).$$

Trong (1) cho $y = 0$ ta được $f(ax + c) = F(f(x), f(0))$, đặt $e = f(0)$ và thay x bởi $x - y$ ta có $f(a(x - y) + c) = F(f(x - y), e)$. Do đó

$$F(f(x - y), e) = F(f(x), f(y)). \quad (2)$$

Giả sử $f(x - y)$ biểu diễn được theo $f(x), f(y)$ là $f(x - y) = G(f(x), f(y))$. Khi đó từ đây, lần lượt cho $x = 0, y = -z$, ta được $f(-y) = G(e, f(y))$ và

$$f(x + z) = f(x - (-z)) = G(f(x), f(-z)) = G(f(x), G(e, f(z))).$$

Đặt $H(f(x), f(z)) = G(f(x), G(e, f(z)))$. Khi đó $f(x + y) = H(f(x), f(y))$.

Trường hợp 2. $a + b \neq 0$. Khi đó trong (1) ta thay

$$x = y = \frac{a\overline{x} + b\overline{y}}{a + b} = p\overline{x} + q\overline{y}, p + q = 1$$

ta được

$$f(a\overline{x} + b\overline{y} + c) = F(f(p\overline{x} + q\overline{y}), f(p\overline{x} + q\overline{y})) = F_2(f(p\overline{x} + q\overline{y})),$$

suy ra $F_2(f(px + qy)) = F(f(x), f(y))$, suy ra

$$f(px + qy) = {F_2}^{-1}\{F(f(x), f(y))\}, \text{ (nếu tồn tại } {F_2}^{-1})$$

$$= G(f(x), f(y)), G = {F_2}^{-1}F. \quad (3)$$

• Trong (3) cho $x = \frac{u}{p}, y = \frac{v}{q}$, ta được $f(u + v) = G[f(\frac{u}{p}), f(\frac{v}{q})]$.

• Trong (3) cho $x = \frac{u}{p}, y = 0$ ta được $f(u) = G[f(\frac{u}{p}), f(0)]$.

• Trong (3) cho $x = 0, y = \frac{v}{q}$, ta được $f(v) = G[f(0), f(\frac{v}{q})]$.

Giả sử từ các phương trình này, hàm $f(\frac{u}{p})$ có thể biểu diễn được theo $f(u)$, và hàm $f(\frac{v}{q})$ cũng biểu diễn được theo $f(v)$, khi đó ta được

$$f(u + v) = H[f(u), f(v)].$$

Như vậy trong hai trường hợp, ta đã chuyển bài toán về dạng đã biết.

Sau đây ta xét các bài toán áp dụng.

Bài toán 2.281. *Cho a là hằng số. Tìm các hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn*

$$2f(x-y+a) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) cho $y = 0$, ta được

$$2f(x+a) = f(x) + f(0), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Trong (2) thay x bởi $x - y$, ta được

$$2f(x-y+a) = f(x-y) + f(0), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Từ (1) và (3), ta có

$$f(x-y) = f(x) + f(y) - f(0), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Trong (4) cho $x = 0$ được $f(-y) = f(y), \forall y \in \mathbb{R}$. (5)

Từ (4) cho $y = -z$ và sử dụng (5) ta được:

$$f(x+z) = f(x) + f(z) - f(0), \forall x, z \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f(x+z) - f(0) = f(x) - f(0) + f(z) - f(0), \forall x, z \in \mathbb{R}.$$

Đặt $g(x) = f(x) - f(0)$, $g(x)$ liên tục và $g(0) = 0$, ta được

$$g(x+z) = g(x) + g(z), \forall x, z \in \mathbb{R}.$$

Do đó, $g(x) = \alpha x$, nên $f(x) = \alpha x + \gamma, \forall x \in \mathbb{R}$, α và γ là hằng số. Thử lại ta thấy $f(x)$ chỉ thỏa mãn (1) với $\alpha = 0$. Vậy $f(x) = \gamma$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (γ là hằng số).

Bài toán 2.282. *Tìm các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(x+2y+1) = f(x) + 2f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) thay $x = y = \frac{1}{3}\overline{x} + \frac{2}{3}\overline{y}$, ta được

$$f(\overline{x} + 2\overline{y} + 1) = 3f(\frac{1}{3}\overline{x} + \frac{2}{3}\overline{y}), \ \forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$f(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y) = \frac{1}{3}f(x) + \frac{2}{3}f(y), \ \forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}.$$

Theo kết quả bài toán 2.277 ở trang 334, ta được

$$f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R} \ (a \text{ và } b \text{ là hằng số}).$$

Thay vào (1) ta được $a(x+2y+1) + b = ax + b + 2(ay + b) \Longrightarrow b = \frac{1}{2}a$. Vậy nghiệm của bài toán là $f(x) = a(x + \frac{1}{2}), \forall x \in \mathbb{R}$, với a là hằng số.

2.9 Phương trình hàm trong lớp hàm lượng giác

Để giải được các bài toán dạng này ta cần phát hiện ra các đặc trưng hàm lượng giác được che dấu trong phương trình hàm, từ đó mới đưa ra những phép thế giá trị phù hợp. Có những bài toán chỉ cần một vài phép thế là đi đến kết quả, nhưng cũng có nhiều bài toán khó, phải trải qua nhiều phép thế mới tìm ra lời giải. Đặc biệt những phương trình hàm mà có thêm giả thiết liên tục thường là những bài toán khó. Dựa trên các công thức lượng giác:

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$$
$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x \sin y$$
$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y$$
$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x \sin y,$$

bằng việc thay hàm $\sin x$, $\cos x$, $\sin y$, $\cos y$ ở bên vế phải bởi các ẩn hàm f và g ta đề xuất và giải được các bài toán sau.

Bài toán 2.283. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(y)\cos x, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Đặt $f(0) = C$. Trong (1) cho $y = 0$ ta được

$$f(x) = C.\cos x, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Thử lại: Thay (2) vào (1) ta được

$$C[\cos(x+y) + \cos(x-y)] = 2C.\cos x.\cos y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Vậy (2) thỏa mãn (1), do đó hàm số cần tìm có dạng

$$f(x) = C.\cos x, \ \forall x \in \mathbb{R} \ (C \text{ là hằng số bất kì}).$$

Bài toán 2.284 (Đề nghị thi Olympic 30/04/1999). *Tìm tất cả các hàm $f(x)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và thỏa*

$$\begin{cases} f(0) = 1999, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2000 \\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y, \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1)$$

Giải. Trong (1) thay $x = t - \frac{\pi}{2}$ và $y = \frac{\pi}{2}$ ta được

$$f(t) + f(t-\pi) = 2f(t-\frac{\pi}{2}).\cos\frac{\pi}{2} = 0, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Trong (1) thay $x = \frac{\pi}{2}$ và $y = t - \frac{\pi}{2}$ ta được

$$f(t) + f(\pi - t) = 2f(\frac{\pi}{2}).\cos(t-\frac{\pi}{2}) = 2.2000\sin t, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Trong (1) thay $x = 0$ và $y = t - \pi$ ta được

$$f(t-\pi) + f(\pi - t) = 2f(0).\cos(t-\pi) = -2.1999\cos t, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Cộng (2) và (3) ta được

$$2f(t) + f(t-\pi) + f(\pi - t) = 2.2000\sin t, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với (4) ta được

$$2f(t) - 2.1999\cos t = 2.2000\sin t, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vậy $f(t) = 1999\cos t + 2000\sin t, \forall t \in \mathbb{R}$. Hay

$$f(x) = 1999\cos x + 2000\sin x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại thấy $f(x)$ thỏa mãn đề bài.

Bài toán 2.285 (Đề thi HSG Thành Phố HCM, năm học 2002-2003). *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$\begin{cases} f(0) = 2002, \quad f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2003 \\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y, \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Bài toán 2.286 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2004). *Tìm tất cả các hàm $f(x)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$\begin{cases} f(0) = 2003, \quad f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2004 \\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y, \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Bài toán 2.287 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2007). *Tìm tất cả các hàm $f(x)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$\begin{cases} f(0) = 30^4, \quad f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2007 \\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y, \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Bài toán 2.288. *Tìm tất cả các hàm $f(x)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos by, \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ (với } b \neq 0). \quad (1)$$

Giải. Đặt $f(0) = C, f(\frac{\pi}{2b}) = B$. Trong (1) cho $x = 0$ và $y = t$ ta được

$$f(t) + f(-t) = 2C\cos bt, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Trong (1) cho $x = \dfrac{\pi}{2b} + t$ và $y = \dfrac{\pi}{2b}$ ta được

$$f(\frac{\pi}{b} + t) + f(t) = 2f(\frac{\pi}{2b} + t)\cos(\frac{\pi}{2}) = 0, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Trong (1) cho $x = \dfrac{\pi}{2b}$ và $y = \dfrac{\pi}{2b} + t$ ta được

$$f(\frac{\pi}{b} + t) + f(-t) = 2f(\frac{\pi}{2b})\cos(\frac{\pi}{2} + bt) = -2B.\sin bt, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Cộng (2) và (3) ta được

$$2f(t) + f(\frac{\pi}{b} + t) + f(-t) = 2C\cos bt, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Lấy (5) trừ (4) ta được

$$2f(t) = 2C.\cos bt + 2B.\sin bt, \forall t \in \mathbb{R}.$$
$$\Leftrightarrow f(x) = C.\cos bx + B.\sin bx, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại thấy hàm số $f(x) = C\cos bx + B.\sin bx, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn đề bài. Vậy tất cả các hàm số cần tìm là

$f(x) = C.\cos bx + B.\sin bx, \forall x \in \mathbb{R}$ (với A, B là các hằng số bất kì).

Bài toán 2.289. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+y) - f(x-y) = 2f(y)\cos 2x, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) cho $x = 0$ ta được

$$f(-y) = -f(y), \forall y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Trong (1) cho $x = \dfrac{\pi}{4}$ và $y = \dfrac{\pi}{4} - t$ ta được

$$f(\frac{\pi}{2} - t) - f(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Trong (1) cho $x = \dfrac{\pi}{4} - t$ và $y = \dfrac{\pi}{4}$ và sử dụng (2) ta được

$$f(\frac{\pi}{2} - t) + f(t) = 2C\sin 2t, \forall t \in \mathbb{R} \text{ (với } C = f(\frac{\pi}{4})). \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có $f(t) = C\sin 2t, \forall t \in \mathbb{R}$ hay $f(x) = C\sin 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy hàm số $f(x) = C\sin 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn đề bài. Vậy tất cả các hàm số cần tìm là

$f(x) = C.\sin 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ (với C là các hằng số bất kì).

Bài toán 2.290. *Tìm các hàm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm*

$$f(x+y) - g(x-y) = 2\sin x \sin y, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow f(x+y) - g(x-y) = \cos(x-y) - \cos(x+y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f(x+y) + \cos(x+y) = g(x-y) + \cos(x-y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Đặt $u = x+y,\ v = x-y$. Từ (2) ta được

$$f(u) + \cos u = g(v) + \cos v,\ \forall u, v \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(u) + \cos u = c, \forall u \in \mathbb{R} \\ g(v) + \cos v = c, \forall v \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = c - \cos x, \forall x \in \mathbb{R} \\ g(x) = c - \cos x, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(c là hằng số). Sau khi thử lại ta kết luận $f(x) = c - \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $g(x) = c - \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$, trong đó c là hằng số tùy ý.

Bài toán 2.291. *Tìm các hàm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm*

$$f(x+y) + g(x-y) = 2\sin x \sin y,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow f(x+y) + g(x-y) = \cos(x-y) - \cos(x+y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f(x+y) + \cos(x+y) = \cos(x-y) - g(x-y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Đặt $u = x+y,\ v = x-y$. Từ (2) ta được

$$f(u) + \cos u = \cos v - g(v),\ \forall u, v \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Từ (3) lấy $v = 0$ ta được $f(u) + \cos u = 1 - g(0), \forall u \in \mathbb{R}$, từ đó dẫn tới

$$\cos v - g(v) = 1 - g(0), \forall v \in \mathbb{R}.$$

Vậy $f(x) = -\cos x + c, \forall x \in \mathbb{R}$ và $g(x) = \cos x - c, \forall x \in \mathbb{R}$, trong đó c là hằng số tùy ý. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.292. *Tìm các hàm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm*

$$f(x+y) + g(x-y) = 2\sin x \cos y,\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.293. *Tìm các hàm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm*

$$f(x-y) - f(x+y) = 2g(x)\sin y,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) lấy $x = 0$ và đặt $g(0) = d$ ta được

$$f(-y) - f(y) = 2d\sin y,\ \forall y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Dổi vai trò của x và y trong (1) ta được

$$f(y-x) - f(x+y) = 2g(y)\sin x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Lấy (1) trừ (3) ta được

$$f(x-y) - f(y-x) = 2g(x)\sin y - 2g(y)\sin x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Sử dụng (2) thì (4) trở thành

$$2d\sin(y-x) = 2g(x)\sin y - 2g(y)\sin x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow 2d(\sin y\cos x - \cos y\sin x) = 2g(x)\sin y - 2g(y)\sin x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow [g(x) - d\cos x]\sin y = [g(y) - d\cos y]\sin x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Từ (5) lấy $y = \dfrac{\pi}{2}$ và đặt $a = g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, ta được

$$g(x) - d\cos x = a\sin x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay $g(x) = a\sin x + d\cos x$ vào (1) ta được

$$f(x-y) - f(x+y)$$
$$= 2(a\sin x + d\cos x)\sin y = 2a\sin x\sin y + 2d\cos x\sin y$$
$$= a[\cos(x-y) - \cos(x+y)] + d[\sin(x+y) - \sin(x-y)],\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ta viết lại theo kiểu phân li biến số: Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ ta có

$$f(x-y) - a\cos(x-y) + d\sin(x-y) = f(x+y) - a\cos(x+y) + d\sin(x+y).$$

Đặt $u = x+y,\ v = x-y$, ta được

$$f(v) - a\cos v + d\sin v = f(u) - a\cos u + d\sin u,\ \forall u, v \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f(u) - a\cos u + d\sin u = c,\ \forall u \in \mathbb{R}\ (c \text{ là hằng số}).$$

Thử lại thấy các hàm số sau thỏa mãn các yêu cầu đề bài

$$f(x) = a\cos x - d\sin x + c,\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } g(x) = a\sin x + d\cos x,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

với a, c, d là các hằng số tùy ý.

Bài toán 2.294. *Tìm các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm*

$$\sin(x+y) = f(x)\sin y + f(y)\sin x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Cho $y = \dfrac{\pi}{2}$ vào (1) ta được

$$\cos x = f(x) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x,\ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Từ (2) cho $x = \dfrac{\pi}{2}$, được $2f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. Vậy $f(x) = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.295. *Tìm các hàm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm*

$$\sin(x+y) = f(x)\sin y + g(y)\sin x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Cho $y = \dfrac{\pi}{2}$ vào (1) ta được

$$\cos x = f(x) + g\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Suy ra $f(x) = \cos x + b\sin x,\ \forall x \in \mathbb{R}$, $b = -g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ là hằng số. Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned} &\sin(x+y) = (\cos x + b\sin x)\sin y + g(y)\sin x,\ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ &\sin x\cos y = b\sin x\sin y + g(y)\sin x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3}$$

Trong (3) lấy $x = \dfrac{\pi}{2}$, ta được $\cos y = b\sin y + g(y),\ \forall y \in \mathbb{R}$, hay

$$g(x) = \cos x - b\sin x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sau khi thử lại ta kết luận: Các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x) = \cos x + b\sin x,\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } g(x) = \cos x - b\sin x,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

còn b là hằng số tùy ý.

Bài toán 2.296. *Tìm tất cả các hàm số $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y) = g(x)\sin y + g(y)\sin x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Trong (1) cho $y = 0$ ta được $f(x) = a\sin x,\ \forall x \in \mathbb{R}$, $a = g(0)$ là hằng số. Thay vào (1) được

$$a\sin(x+y) = g(x)\sin y + g(y)\sin x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Trong (2) cho $y = \dfrac{\pi}{2}$, ta được

$$a\cos x = g(x) + g\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Trong (3) cho $x = \dfrac{\pi}{2}$, ta được $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. Vậy $g(x) = a\cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại ta được các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x) = a\sin x,\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } g(x) = a\cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}\ (a \text{ là hằng số tùy ý}).$$

Từ công thức $\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$, nếu thay hàm sin ở vế trái bởi ẩn hàm $f(x)$, ta đề xuất và giải được bài toán sau.

Bài toán 2.297. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y)f(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} \sin(x+y)\sin(x-y) &= \sin^2 x\cos^2 y - \cos^2 x\sin^2 y \\ &= \sin^2 x\left(1 - \sin^2 y\right) - \left(1 - \sin^2 x\right)\sin^2 y = \sin^2 x - \sin^2 y. \end{aligned}$$

Vì vậy

$$(1) \Leftrightarrow f(x+y)f(x-y) = \sin(x+y)\sin(x-y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Đặt $u = x+y$, $v = x-y$. Khi đó (2) tương đương với

$$f(u)f(v) = \sin u\sin v,\ \forall u, v \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Dễ thấy hàm $f(x) \equiv 0$ không thỏa (1). Xét $f(x) \not\equiv 0$. Khi đó tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Trong (3) lấy $v = x_0$ ta được $f(u) = \dfrac{\sin x_0}{f(x_0)}\sin u,\ \forall u \in \mathbb{R}$.

Đặt $a = \dfrac{\sin x_0}{f(x_0)}$, khi đó

$$f(x) = a\sin x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay vào (3) ta được $a^2 = 1$ hay $a = \pm 1$. Thử lại ta được các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x) = \sin x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = -\sin x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.298. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(2016x) = f(\sin(5x+2y)) + f(\sin(5x-2y)),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Trong (1) lấy $x = \dfrac{\pi}{10}$ và đặt $C = f\left(\dfrac{2016\pi}{10}\right)$, ta được

$$\begin{aligned} &f(\cos 2y) = \frac{1}{2}C,\ \forall y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow\ &f(t) = \frac{1}{2}C,\ \forall t \in [-1;1] \end{aligned} \tag{2}$$

Do $\sin(5x \pm 2y) \in [-1;1]$ nên từ (1) và (2) suy ra $f(2016x) = C,\ \forall x \in \mathbb{R}$, hay $f(x) \equiv C$. Thay vào (1) ta được $C = 0$. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.299 (Phương trình hàm D'Alembert). *Tìm tất cả các hàm $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Trong (1) cho $y = 0$, được $2f(x) = 2f(x)f(0), \forall x \in \mathbb{R}$. Rõ ràng, $f(x) \equiv 0$ là một nghiệm. Ta giả sử $f(x) \neq 0$, khi đó $f(0) = 1$. Trong (1) cho $x = 0$, được $f(-y) = f(y), \forall y \in \mathbb{R}$, nên hàm f chẵn. Ta xét hai trường hợp.

Trường hợp 1. $\exists x_0 \neq 0 : |f(x_0)| \leq 1$. Vì $f(0) = 1$ và $f(x)$ liên tục nên

$$\exists \epsilon > 0 : \forall x \in (-\epsilon, \epsilon) \Longrightarrow f(x) > 0. \tag{2}$$

Với $n_0 \in \mathbb{N}^*$ đủ lớn, $\frac{x_0}{2^{n_0}} \in (-\epsilon, \epsilon)$, ta có $f(\frac{x_0}{2^{n_0}}) > 0$. Nhận xét rằng

$$f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

vì nếu tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f\left(\frac{x_0}{2^{n_0}}\right) > 1$ thì từ (1) suy ra

$$f(\frac{x_0}{2^{n_0-1}}) = 2[f(\frac{x_0}{2^{n_0}})]^2 - 1 > 1, \ f(\frac{x_0}{2^{n_0-2}}) = 2[f(\frac{x_0}{2^{n_0-1}})]^2 - 1 > 1.$$

Tiếp tục quá trình này, ta được $f(x_0) = 2[f(\frac{x_0}{2})]^2 - 1 > 1$, mâu thuẫn với $|f(x_0)| \leq 1$. Suy ra tồn tại $x_1 \neq 0$ (chỉ cần lấy $x_1 = \frac{x_0}{2^{n_0}}$) sao cho $0 < f(x_1) \leq 1$ và $f(x) > 0, \forall x \in (-|x_1|; |x_1|)$. Đặt $f(x_1) = \cos\alpha, 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$. Từ (1) suy ra

$$f(2x_1) = 2[f(x_1)]^2 - 1 = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha.$$

Giả sử $f(kx_1) = \cos k\alpha, \forall k \geq 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} f[(k+1)x_1] &= f(kx_1 + x_1) = 2f(kx_1)f(x_1) - f[(k-1)x_1] \\ &= 2\cos k\alpha.\cos\alpha - \cos(k-1)\alpha = \cos(k+1)\alpha. \end{aligned}$$

Theo nguyên lí quy nạp suy ra $f(kx_1) = \cos k\alpha, \forall k \in \mathbb{N}^*$. Mặt khác, f là hàm chẵn và $f(0) = 1$, nên

$$f(kx_1) = \cos k\alpha, \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Trong (1) cho $x = y = \frac{x_1}{2}$ ta được

$$f(x_1) = 2f^2\left(\frac{x_1}{2}\right) - 1 \Leftrightarrow [f(\frac{x_1}{2})]^2 = \frac{1+f(x_1)}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Do $\frac{x_1}{2} \in (-|x_1|; |x_1|)$ nên $f(\frac{x_1}{2}) > 0$, vậy ta có $f(\frac{x_1}{2}) = \cos\frac{\alpha}{2}$. Giả sử

$$f(\frac{x_1}{2^k}) = \cos\frac{\alpha}{2^k}, \forall k \geq 1.$$

Khi đó, từ (1) cho $x = y = \frac{x_1}{2^{k+1}}$ ta được

$$[f(\frac{x_1}{2^{k+1}})]^2 = \frac{1}{2}[1 + f(\frac{x_1}{2^k})] = \frac{1}{2}(1 + \cos\frac{x_1}{2^k}) = \cos^2\frac{x_1}{2^{k+1}}.$$

Do $\frac{x_1}{2^{k+1}} \in (-|x_1|; |x_1|)$ nên $f(\frac{x_1}{2^{k+1}}) > 0$, ta suy ra

$$f(\frac{x_1}{2^{k+1}}) = \cos\frac{\alpha}{2^{k+1}}, \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Như vậy, theo nguyên lí quy nạp suy ra $f(\frac{x_1}{2^n}) = \cos\frac{\alpha}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. (3)

Từ (2) và (3) ta suy ra $f(\frac{m}{2^n}x_1) = \cos\frac{m}{2^n}\alpha, \forall m, n \in \mathbb{Z}, n > 0$. Do $f(x)$ và $\cos x$ là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, và

$$f(x) = \cos ax, \forall x \in A = \{\frac{m}{2^n}x_1 | m, n \in \mathbb{Z}, n > 0\}, a = \frac{\alpha}{x_1},$$

hơn nữa tập A là tập trù mật trong $\mathbb{R}$, nên $f(x) = \cos ax, \forall x \in \mathbb{R}, a = \frac{\alpha}{x_1}$.

Thử lại ta thấy $f(x) = \cos ax, \forall x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện bài toán. Lập luận tương tự, ta xét trường hợp còn lại.

Trường hợp 2. $|f(x_0)| > 1, \forall x_0 \neq 0$. Nếu $f(x) < -1$ thì tồn tại $x_2 \neq 0$ sao cho $f(x_2) = 0 < 1$ (vì $f(0) = 1, f(x) < -1$ và f liên tục). Khi đó, theo trường hợp 1, ta có

$$|f(x)| = |\cos ax| \leq 1 \ \text{(vô lý)}.$$

Vậy $f(x) > 1, \forall x \neq 0$. Lấy $x_1 \neq 0$ cố định, đặt $f(x_1) = \cosh\alpha, \alpha > 0$. Từ (1) ta suy ra

$$f(2x_1) = 2[f(x_1)]^2 - 1 = 2\cosh^2\alpha - 1 = \cosh 2\alpha.$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $f(kx_1) = \cosh k\alpha, \forall k \in \mathbb{N}$. Mặt khác, f là hàm chẵn, nên

$$f(kx_1) = \cosh k\alpha, \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Trong (1) cho $x = y = \frac{x_1}{2}$ ta được

$$[f(\frac{x_1}{2})]^2 = \frac{1+f(x_1)}{2} = \frac{1+\cosh\alpha}{2} = \cosh^2\frac{\alpha}{2} \Longrightarrow f(\frac{x_1}{2}) = \cosh\frac{\alpha}{2}.$$

Bằng quy nạp, chúng ta chứng minh được

$$f(\frac{x_1}{2^n}) = \cosh\frac{\alpha}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Từ (4) và (5) ta suy ra $f(\frac{m}{2^n}x_1) = \cosh\frac{m}{2^n}\alpha, \forall m, n \in \mathbb{Z}, n > 0$. Do $f(x)$ và $\cosh x$ là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, và

$$f(ax_1) = \cosh a\alpha, \forall a \in A = \{\frac{m}{2^n}x_1; m, n \in \mathbb{Z}, n > 0\},$$

hơn nữa A là tập trù mật trong $\mathbb{R}$, nên $f(xx_1) = \cosh x\alpha, \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra

$$f(x) = \cosh ax, \forall x \in \mathbb{R}, a = \frac{\alpha}{x_1}.$$

Thử lại ta thấy $f(x) = \cosh ax, \forall x \in \mathbb{R}, a \neq 0$ thỏa mãn điều kiện bài toán.
Tóm lại ta có nghiệm của bài toán là:

$f(x) \equiv 0; f(x) \equiv 1, f(x) = \cos ax, \forall x \in \mathbb{R}; f(x) = \cosh ax, \forall x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, a \neq 0.$

2.10 Phương trình hàm có sử dụng đạo hàm

Trong bài này ta sẽ giải một số phương trình hàm bằng cách sử dụng đạo hàm. Lưu ý rằng trong một số bài toán, khi hàm số cần tìm chưa có đạo hàm, trước hết phải chứng minh nó có đạo hàm trên tập tương ứng. Ta thường sử dụng các kĩ thuật sau:

- Đạo hàm hai vế từng biến. Xác lập những giới hạn để tạo thành đạo hàm.
- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$. Khi đó giới hạn hữu hạn (nếu có) của tỉ số $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ khi x dần đến x_0 gọi là đạo hàm của hàm số đã cho tại x_0, kí hiệu là $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$, nghĩa là

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.}$$

Vậy nếu $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ tồn tại, hữu hạn thì

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

- Hàm số đa thức luôn có đạo hàm tại mọi điểm (được vận dụng ở bài toán 3.29 ở trang 403).
- Từ định lí Lagrange, ta suy ra hai kết quả sau:
  - ◇ Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên $(a; b)$. Khi đó

$$f'(x) = 0, \forall x \in (a; b) \Leftrightarrow f(x) = C \text{ (hàm hằng)}, \forall x \in [a; b].$$

  - ◇ Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên $(a; b)$. Khi đó

$$f'(x) = k, \forall x \in (a; b) \Leftrightarrow f(x) = kx + C, \forall x \in [a; b] \ (k, C \text{ là hằng số}).$$

- Mọi hàm số liên tục trên K (ở đây K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng nào đó) đều có nguyên hàm trên K.
- Nếu hàm số $f(x)$ có nguyên hàm thì $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

Bài toán 2.300. *Tìm hàm số f xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$[f(x) - f(y)]^2 \leq |x - y|^{2017}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Giải. Với mọi $x \neq y$ ta có

$$\frac{[f(x) - f(y)]^2}{|x - y|^2} \leq |x - y|^{2015} \Rightarrow \left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leq \sqrt{|x - y|^{2015}}$$
$$\Rightarrow \lim_{y \to x} \left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = 0 \Rightarrow f'(x) = 0.$$

Vậy hàm f có đạo hàm tại mọi điểm và $f'(x) = 0, \forall x$. Suy ra $f(x) \equiv C$, với C là hằng số, thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.301 (Olympic Toán Sinh Viên toàn quốc năm 1999). *Xác định các hàm $f(x)$, thỏa mãn điều kiện*

$$|f(x+h) - f(x-h)| < h^2, \forall x \in \mathbb{R}, \forall h > 0.$$

Giải. Từ giả thiết ta có

$$|f(x+2h) - f(x)| < h^2, \forall x \in \mathbb{R}, \forall h > 0$$
$$\Rightarrow -\frac{h}{2} < \frac{f(x+2h) - f(x)}{2h} < \frac{h}{2}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall h > 0$$
$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h) - f(x)}{2h} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy $f(x) \equiv C$, với C là hằng số tùy ý. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.302 (India ISI Entrance Examination 2013). *Cho hàm số: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$|f(x+y) - f(x-y) - y| \leq y^2, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Chứng minh rằng $f(x) = \dfrac{x}{2} + C, \ \forall x \in \mathbb{R}$, với C là hằng số tùy ý.

Giải. Đặt $f(x) - \dfrac{x}{2} = g(x)$, thay vào (1) ta được

$$\left|g(x+y) + \frac{x+y}{2} - g(x-y) - \frac{x-y}{2} - y\right| \leq y^2, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow |g(x+y) - g(x-y)| \leq y^2, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow |g(x+y) - g(x-y)| \leq y^2, \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0. \tag{2}$$

Từ (2), sử dụng bài toán 2.301, ta được $g(x) \equiv C$, với C là hằng số tùy ý. Từ đây, ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 2.303 (Đề nghị thi Olympic 30/03/2010). *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn điều kiện* $f\left(\frac{30}{4}\right)=2010$ *và*

$$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=8xy\left(x^4-y^4\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Giải. Từ giả thiết, với $x\neq y$ và $x\neq -y$, ta có

$$\frac{f(x+y)}{x+y}-\frac{f(x-y)}{x-y}=8xy\left(x^2+y^2\right). \tag{1}$$

Đặt $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, thay vào (1) ta được

$$g(x+y)-g(x-y)=8xy\left(x^2+y^2\right),\ \forall x\neq y,\ x\neq -y. \tag{2}$$

Chọn $x=a+\dfrac{h}{2}$, $y=\dfrac{h}{2}$. Từ (2) ta có

$$g(a+h)-g(a)=8\left(a+\frac{h}{2}\right)\frac{h}{2}\left[\left(a+\frac{h}{2}\right)^2+\frac{h^2}{4}\right]$$

$$\Rightarrow\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=4\left(a+\frac{h}{2}\right)\left[\left(a+\frac{h}{2}\right)^2+\frac{h^2}{4}\right]$$

$$\Rightarrow\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=4a^3\Rightarrow g'(a)=4a^3.$$

Vậy hàm g có đạo hàm tại mọi điểm $x\neq 0$ và $g'(x)=4x^3$, $\forall x\neq 0$. Do đó

$$g(x)=x^4+C,\ \forall x\neq 0\ \ (C\text{ là hằng số})$$
$$\Rightarrow f(x)=x^5+Cx,\ \forall x\neq 0.$$

Thay $x=y=1$ vào giả thiết ta được $f(0)=0$. Vậy

$$f(x)=x^5+Cx,\ \forall x\in\mathbb{R}\text{ (thử lại thấy thỏa mãn).}$$

Vì $f\left(\dfrac{30}{4}\right)=2010$ nên

$$\left(\frac{30}{4}\right)^5+C\left(\frac{30}{4}\right)=2010\Leftrightarrow C=\frac{2}{15}\left[2010-\left(\frac{30}{4}\right)^5\right].$$

Có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x)=x^5+\frac{2}{15}\left[2010-\left(\frac{30}{4}\right)^5\right]x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Lưu ý. Bài toán 2.303 còn được giải tương tự như bài toán 2.45 ở trang 114.

Bài toán 2.304 (Olympic Toán Sinh Viên toàn quốc năm 2000). *Tìm tất cả các hàm số* $f(x)$ *có đạo hàm trên* $\mathbb{R}$ *và thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy,\ \forall x,\ y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Trong (1) lấy $x=y=0$ ta được $f(0)=0$. Từ (1) ta có

$$f'(x)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)+2xy}{y}$$
$$=\lim_{y\to 0}\left(\frac{f(y)-f(0)}{y-0}+2x\right)=f'(0)+2x=2x+a,$$

với $a=f'(0)$. Vậy nên $f(x)=x^2+ax+b$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Vì $f(0)=0$ nên $b=0$. Thử lại thấy hàm số $f(x)=x^2+ax$, $\forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Lưu ý. Có thể thay giả thiết hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ bởi giả thiết yếu hơn đó là hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thậm chí không cần những giả thiết đó ta vẫn giải được phương trình hàm (1).

Bài toán 2.305 (Olympic Toán Sinh Viên toàn quốc năm 1995). *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *thỏa mãn điều kiện* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ *và*

$$f(x+y)\leq f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử hàm f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Từ (1) ta có

$$f(x)\leq f(x+y)+f(-y)\Rightarrow -f(-y)\leq f(x+y)-f(x)\leq f(y). \tag{2}$$

Từ (2) suy ra nếu $y>0$ thì

$$\frac{f(-y)}{-y}\leq\frac{f(x+y)-f(x)}{y}\leq\frac{f(y)}{y}. \tag{3}$$

Do $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ nên $\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{f(y)}{y}=1$, $\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{f(y)}{y}=1$. Vậy từ (3) cho $y\to 0^+$ và sử dụng nguyên lí kẹp ta được

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=1. \tag{4}$$

Từ (2) suy ra nếu $y<0$ thì

$$\frac{f(-y)}{-y}\geq\frac{f(x+y)-f(x)}{y}\geq\frac{f(y)}{y}. \tag{3}$$

Do $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ nên $\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{f(y)}{y}=1$, $\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{f(y)}{y}=1$. Vậy từ (3) cho $y\to 0^-$ và sử dụng nguyên lí kẹp ta được

$$\lim_{y\to 0^-}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=1. \tag{5}$$

Từ (4) và (5) suy ra $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(x+y)-f(x)}{y}=1$, hay $f'(x)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra

$$f(x)=x+c,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Do điều kiện $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ nên $c=0$. Vậy $f(x)\equiv x$ là hàm số cần tìm (thử lại thấy thỏa mãn).

Bài toán 2.306. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện*

$$f(5x+4)=5f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử hàm f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Lấy đạo hàm hai vế của (1) theo biến x ta được

$$\begin{aligned}&(5x+4)'f'(5x+4)=5f'(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow\ &f'(5x+4)=f'(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{2}$$

Trong (2) thay x bởi $\dfrac{x-4}{5}$, ta được

$$\begin{aligned}f'(x)&=f'\left(\frac{x-4}{5}\right)=f'\left(\frac{\frac{x-4}{5}-4}{5}\right)=f'\left(\frac{x-24}{25}\right)\\ &=f'\left(\frac{x-5^2+1}{5^2}\right)=f'\left(\frac{\frac{x-5^2+1}{5^2}-4}{5}\right)\\ &=f'\left(\frac{x-5^3+1}{5^3}\right)=\cdots=f'\left(\frac{x-5^n+1}{5^n}\right).\end{aligned}$$

Do f' liên tục trên $\mathbb{R}$ nên

$$f'(x)=\lim_{n\to+\infty}f'(x)=\lim_{n\to+\infty}f'\left(\frac{x-5^n+1}{5^n}\right)$$

$$=f'\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{x-5^n+1}{5^n}\right)=f'\left(\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{x}{5^n}-1+\frac{1}{5^n}\right]\right)=f'(-1).$$

Vậy $f'(x)=a$, $\forall x\in\mathbb{R}$, với $a=f'(-1)$. Do đó $f(x)=ax+b$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Trong (1) lấy $x=-1$ ta được $f(-1)=0$, suy ra $0=-a+b\Leftrightarrow b=a$. Vậy

$$f(x)=a(x+1),\ \forall x\in\mathbb{R}\ (a\text{ là hằng số}).$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Lưu ý. Phép thay x bởi $\dfrac{x-4}{5}$ được tìm ra từ việc tìm hàm ngược của hàm số $y=5x+4$ là hàm số $y=\dfrac{x-4}{5}$.

Bài toán 2.307. *Tìm các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ có đạo hàm tại 0 và thỏa mãn*

$$f(2x)=2f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Từ (1) cho $x=0$ được $f(0)=0$. Xét hàm số $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ như sau:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ f'(0) & \text{khi } x=0.\end{cases}$$

Với mọi $x\neq 0$, theo (1) ta có

$$\frac{f(2x)}{2x}=\frac{f(x)}{x}\Leftrightarrow g(2x)=g(x). \tag{2}$$

Mặt khác

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\overset{\text{do } f(0)=0}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=g(0).$$

Vậy hàm g liên tục tại 0. Từ (2) ta có

$$g(x)=g\left(\frac{x}{2}\right)=\cdots=g\left(\frac{x}{2^n}\right),\ \forall x\neq 0,\ \forall n=1,2,\ldots \tag{3}$$

Do hàm g liên tục tại 0 và $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x}{2^n}=0$, $\forall x\neq 0$ nên từ (3) suy ra

$$g(x)=\lim_{n\to+\infty}g(x)=\lim_{n\to+\infty}g\left(\frac{x}{2^n}\right)=g\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{2^n}\right)=g(0),\ \forall x\neq 0.$$

Vì thế $g(x)=f'(0)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, hay g là hàm hằng. Do đó $f(x)=cx$, $\forall x\neq 0$. Lại do $f(0)=0$ nên $f(x)=cx$, $\forall x\in\mathbb{R}$ (c là hằng số). Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.308. *Tìm tất cả các hàm số f xác định và liên tục trên đoạn $[0;1]$, có đạo hàm trên khoảng $(0;1)$ và thỏa mãn hai điều kiện sau:*
a) $20f'(x)+11f(x)+2009\le 0, \forall x\in(0;1)$;
b) $f(0)=f(1)=-\dfrac{2009}{11}$.

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn các điều kiện bài ra. Xét hàm số

$$g(x)=e^{\frac{11x}{20}}\left[f(x)+\frac{2009}{11}\right],\ \forall x\in[0;1].$$

Vì hàm f liên tục trên đoạn $[0;1]$, có đạo hàm trên khoảng $(0;1)$ nên hàm g liên tục trên đoạn $[0;1]$, có đạo hàm trên khoảng $(0;1)$. Ta có

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{11}{20}e^{\frac{11x}{20}}\left[f(x)+\frac{2009}{11}\right]+e^{\frac{11x}{20}}f'(x)\\&=\frac{1}{20}e^{\frac{11x}{20}}\left[20f'(x)+11f(x)+2009\right].\end{aligned}$$

Theo điều kiện $a)$ suy ra $g'(x)\le 0, \forall x\in(0;1)$. Vậy g là hàm giảm trong khoảng $(0;1)$. Mặt khác, từ giả thiết $b)$ suy ra $g(0)=g(1)=0$. Vậy $g(x)=0$ trên $[0;1]$, do đó

$$f(x)=-\frac{2009}{11},\ \forall x\in[0;1].$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Lưu ý. Việc xét hàm g được tìm ra như sau: Để sử dụng được giả thiết $a)$, ta cần xét hàm số g có dạng

$$g(x)=e^{kx}\left[f(x)+\frac{2009}{11}\right],\ \forall x\in[0;1]\ \text{(với } k \text{ tìm sau)}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}g'(x)&=ke^{kx}\left[f(x)+\frac{2009}{11}\right]+e^{kx}f'(x)\\&=e^{kx}\left[f'(x)+kf(x)+\frac{2009k}{11}\right].\end{aligned}$$

Vậy ta cần tìm k sao cho $20f'(x)+11f(x)+2009$ tỉ lệ với $f'(x)+kf(x)+\dfrac{2009k}{11}$.

Muốn vậy thì

$$\frac{1}{20}=\frac{k}{11}=\frac{2009k}{11.2009}\Rightarrow k=\frac{11}{20}\Rightarrow g(x)=e^{\frac{11x}{20}}\left[f(x)+\frac{2009}{11}\right].$$

Từ đây ta còn rút ra được phương pháp xây dựng các bài toán mới, tương tự như bài toán trên như sau.

Ví dụ 1. *Xét hàm số* $f(x)\equiv\dfrac{2012}{2011}$. *Khi đó*

$$f'(x)=0\Rightarrow 3f'(x)+2011x-2012\ge 0.$$

Ta được bài toán sau.

Bài toán 2.309. *Tìm tất cả các hàm số f xác định và liên tục trên đoạn $[0;2]$, có đạo hàm trên khoảng $(0;2)$ và thỏa mãn hai điều kiện sau:*
a) $3f'(x)+2011f(x)-2012\le 0, \forall x\in(0;2)$;
b) $f(0)=f(2)=\dfrac{2012}{2011}$.

2.11 Giải phương trình hàm bằng phương pháp thêm biến

Đây là một phương pháp mới xuất hiện trong thời gian gần đây. Ý tưởng rất đơn giản như sau: Khi gặp những phương trình hàm với cặp biến tự do x, y, bằng cách thêm biến mới z, ta sẽ tính một biểu thức nào đó chứa x, y, z theo hai cách khác nhau, từ đây ta thu được một phương trình hàm theo ba biến x, y, z, sau đó chọn z bằng những giá trị đặc biệt hoặc biến đổi, rút gọn phương trình hàm theo ba biến x, y, z để thu được những phương trình hàm mới, hướng tới kết quả bài toán. Lời giải của các bài toán sau đây sẽ thể hiện phương pháp này.

Bài toán 2.310. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(x+f(y)\right)=2y+f(x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Ta thêm biến mới z như sau: Với mọi x, y, z thuộc $\mathbb{R}$, sử dụng (1) ta được

$$f\left(x+y+f(z)\right)=2z+f(x+y),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Mặt khác cũng với mọi số thực x, y, z thì

$$f\left(x+y+f(z)\right)=f\left(x+f\left(z+f\left(\frac{y}{2}\right)\right)\right)=2\left[z+f\left(\frac{y}{2}\right)\right]+f(x). \tag{3}$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$\begin{aligned}&2z+f(x+y)=2\left[z+f\left(\frac{y}{2}\right)\right]+f(x),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}\\&\Leftrightarrow f(x+y)=f(x)+2f\left(\frac{y}{2}\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{4}$$

Từ (4) cho $x = y = 0$ ta được $f(0) = 0$. Từ (4) cho $x = 0$ và sử dụng $f(0) = 0$ ta được $f(y) = 2f\left(\frac{y}{2}\right)$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Vậy (4) trở thành

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Từ (5), sử dụng kết quả bài toán 2.214 ở trang 278 ta được $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$, với a là hằng số thực. Thay vào (1) ta được

$$a(x + ay) = 2y + ax,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Từ (6) cho $x = y = 1$ ta được $a(1+a) = 2 + a \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}$. Vậy

$$f(x) = \sqrt{2}x,\ \forall x \in \mathbb{R}\ ; f(x) = -\sqrt{2}x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại thấy hai hàm số này thỏa mãn các yêu cầu bài toán.

Bài toán 2.311. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(f(x) + y) = x + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{Q}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Ta thêm biến mới z như sau: Với mọi x, y, z thuộc $\mathbb{Q}$, sử dụng (1) ta được

$$f(f(x) + y + z) = x + f(y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{Q}. \tag{2}$$

Mặt khác cũng với mọi số hữu tỉ x, y, z thì $f(f(z) + x) = z + f(x)$, do đó

$$f(y + (z + f(x)) = f(y + f(f(z) + x)) = f(z) + x + f(y). \tag{3}$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$f(y + z) = f(y) + f(z),\ \forall y, z \in \mathbb{Q}. \tag{4}$$

Tương tự như bài toán 2.214 ở trang 278, suy ra $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{Q}$. Thay vào (1) ta rút ra $a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$. Thử lại thấy $f(x) \equiv x$ và $f(x) \equiv -x$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 2.312 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2004). *Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(xf(y)) = yf(x), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Trong (1) lấy $x = y = 0$ ta được $f(0) = 0$. Ta thêm biến mới z như sau: Với mọi x, y, z thuộc $\mathbb{R}$, sử dụng (1) ta có $f(xyf(z)) = zf(xy)$, mặt khác

$$f(xyf(z)) = f(xf(zf(y))) = zf(y)f(x).$$

Do đó $zf(xy) = zf(y)f(x)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$. Từ đây cho $z = 1$ ta được

$$f(xy) = f(x)f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ (2) lấy $y = 1$ được

$$f(x)[1 - f(1)] = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Nếu $f(1) \neq 1$ thì từ (3) suy ra $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy hàm $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Tiếp theo xét $f(1) = 1$. Từ (1) cho $x = 1$ được

$$f(f(y)) = y,\ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Từ đây dễ dàng suy ra f là đơn ánh, kết hợp giả thiết f liên tục suy ra f đơn điệu thực sự. Từ $f(0) = 0 < 1 = f(1)$ suy ra f là hàm tăng thực sự. Nếu $f(y) < y$ thì do f tăng thực sự nên $f(f(y)) < f(y) \Rightarrow y < f(y)$, mâu thuẫn. Nếu $f(y) > y$ thì $y = f(f(y)) > f(y)$, mâu thuẫn. Vậy $f(y) = y, \forall y \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Ta kết luận: có hai hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.313 (Đề thi chính thức Olympic 30/04/2011). *Hãy tìm tất cả các hàm số $f : [1; +\infty) \to [1; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(xf(y)) = yf(x),\ \forall x, y \in [1; +\infty). \tag{1}$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Ta thêm biến mới $z \geq 1$ như sau: Với mọi x, y, z thuộc $[1; +\infty)$, sử dụng (1) ta có $f(xyf(z)) = zf(xy)$, mặt khác $f(xyf(z)) = f(xf(zf(y))) = zf(y)f(x)$. Do đó

$$zf(xy) = zf(y)f(x),\ \forall x, y, z \in [1; +\infty).$$

Từ đây cho $z = 1$ ta được

$$f(xy) = f(x)f(y),\ \forall x, y \in [1; +\infty). \tag{2}$$

Trong (2) cho $x = y = 1$ ta được $f(1) = f^2(1) \overset{\text{do } f(1) \geq 1}{\Rightarrow} f(1) = 1$. Trong (1) cho $x = 1$ được

$$f(f(y)) = y,\ \forall y \in [1; +\infty). \tag{3}$$

Vì $f : [1; +\infty) \to [1; +\infty)$ nên nếu $f(y) = 1$ thì

$$y = f(f(y)) = f(1) = 1 \Rightarrow y = 1.$$

Suy ra $f(y) > 1$ với mọi $y > 1$. Cho $x > y \geq 1$ thì từ (2) ta được

$$f(x) = f\left(\frac{x}{y}.y\right) \overset{\text{do (2)}}{\Rightarrow} = f(y).f\left(\frac{x}{y}\right) > f(y),$$

suy ra hàm f đồng biến trên $[1;+\infty)$. Ta sẽ chứng minh

$$f(x)=x, \forall x\in[1;+\infty).$$

Giả sử có $x_0\in[1;+\infty)$ sao cho $f(x_0)\neq x_0$. Nếu $f(x_0)>x_0$ thì

$$f(f(x_0))>f(x_0)\Rightarrow x_0>f(x_0),\ \text{mâu thuẫn với } f(x_0)>x_0.$$

Nếu $f(x_0)<x_0$ thì

$$f(f(x_0))<f(x_0)\Rightarrow x_0<f(x_0),\ \text{mâu thuẫn với } f(x_0)<x_0.$$

Vậy $f(x)=x, \forall x\in[1;+\infty)$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.314. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y)=f(x)\cos y+f(y)\cos x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Ta sẽ thêm biến mới z như sau: Với mọi số thực x, y, z, theo (1) ta có

$$\begin{aligned}f(x+y+z)&=f(x+y)\cos z+f(z)\cos(x+y)\\&=[f(x)\cos y+f(y)\cos x]\cos z+f(z)\cos(x+y)\\&=[f(x)\cos y+f(y)\cos x]\cos z+f(z)(\cos x\cos y-\sin x\sin y).\end{aligned} \tag{2}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}f(x+y+z)&=f(x)\cos(y+z)+f(y+z)\cos x\\&=f(x)\cos(y+z)+[f(y)\cos z+f(z)\cos y]\cos x\\&=f(x)(\cos y\cos z-\sin y\sin z)+[f(y)\cos z+f(z)\cos y]\cos x.\end{aligned} \tag{3}$$

Từ (2) và (3) thu được

$$\begin{aligned}&[f(x)\cos y+f(y)\cos x]\cos z+f(z)(\cos x\cos y-\sin x\sin y)\\=&f(x)(\cos y\cos z-\sin y\sin z)+[f(y)\cos z+f(z)\cos y]\cos x\end{aligned}$$

Dễ dàng rút gọn được

$$f(z)\sin x\sin y=f(x)\sin y\sin z,\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Từ (4) lấy $y=\dfrac{\pi}{2}$ ta được

$$f(z)\sin x=f(x)\sin z,\ \forall x,z\in\mathbb{R} \tag{5}$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)}{\sin x}=\frac{f(z)}{\sin z},\ \forall x\neq m\pi,\ z\neq n\pi\ \ (m,n\in\mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)}{\sin x}\equiv c\Rightarrow f(x)\equiv c\sin x.$$

Vậy $f(x)=c\sin x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (c là hằng số). Thử lại thấy thỏa mãn.

Lưu ý. Đến (5) ta có thể lí luận như sau: Từ (5) lấy $z=\dfrac{\pi}{2}$ ta được

$$f(x)=c\sin x,\ \forall x\in\mathbb{R},\ c=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

và cũng được kết quả tương tự. Từ lời giải bằng phương pháp thêm biến như trên ta suy ra một lời giải khác, rất ngắn gọn như sau: Trong (1) lấy $y=\dfrac{\pi}{2}$, ta được

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Đặt $x+\dfrac{\pi}{2}=t$, thay vào (6) ta được

$$f(t)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin t,\ \forall t\in\mathbb{R}$$

và cũng được kết quả tương tự.

Bài toán 2.315 (Chọn đội tuyển Ấn Độ năm 2004). *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y)=f(x)f(y)-c\sin x\sin y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

trong đó c là hằng số lớn hơn 1.

Giải. Bằng cách thêm biến mới z ta có

$$\begin{aligned}&f(x+y+z)=f(x)f(y+z)-c\sin x\sin(y+z)\\=&f(x)[f(y)f(z)-c\sin y\sin z]-c\sin x(\sin y\cos z+\cos y\sin z)\\=&f(x)f(y)f(z)-cf(x)\sin y\sin z-c\sin x\sin y\cos z-c\sin x\cos y\sin z.\end{aligned}$$

Tương tự, ta có

$$\begin{aligned}&f(y+x+z)\\=&f(x)f(y)f(z)-cf(y)\sin x\sin z-c\sin y\sin x\cos z-c\sin y\cos x\sin z.\end{aligned}$$

Mà $f(x+y+z)=f(y+x+z)$ nên

$$\begin{aligned}&cf(x)\sin y\sin z+c\sin x\sin y\cos z+c\sin x\cos y\sin z\\=&cf(y)\sin x\sin z+c\sin y\sin x\cos z+c\sin y\cos x\sin z.\end{aligned}$$

Suy ra: $\sin z[f(x)\sin y-f(y)\sin x]=\sin z(\sin y\cos x-\cos y\sin x)$.

Thế $z=\dfrac{\pi}{2}$, ta nhận được:

$$f(x)\sin y-f(y)\sin x=\sin y\cos x-\cos y\sin x. \tag{2}$$

Trong (2) lấy $x=\pi$, ta được: $f(\pi)\sin y=-\sin y$. (3)

Trong (3), lấy $y=\frac{\pi}{4}$, ta được: $f(\pi)\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow f(\pi)=-1$.

Trong (1), lấy $x=y=\frac{\pi}{2}$, ta được:

$$f(\pi)=f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)-c\Leftrightarrow f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=c-1\Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pm\sqrt{c-1}.$$

Trong (1), lấy $y=\pi$, ta được

$$f(x+\pi)=f(x)f(\pi)\Rightarrow f(x+\pi)=-f(x). \quad (4)$$

Từ (4) và (1) ta có

$$\begin{aligned}-f(x)&=f(x+\pi)=f\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\\&=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)f\left(\frac{\pi}{2}\right)-c\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}\\&=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)f\left(\frac{\pi}{2}\right)-c\cos x=\left[f(x)f\left(\frac{\pi}{2}\right)-c\sin x\right]f\left(\frac{\pi}{2}\right)-c\cos x.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}&f(x)\left[f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)+1\right]=cf\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x+c\cos x\\&\Rightarrow cf(x)=cf\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x+c\cos x\Rightarrow f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x+\cos x\\&\Rightarrow f(x)=\pm\sqrt{c-1}\sin x+\cos x.\end{aligned}$$

Sau khi thử lại, ta kết luận: Có hai hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$f(x)=\sqrt{c-1}\sin x+\cos x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$; $f(x)=-\sqrt{c-1}\sin x+\cos x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Lưu ý. Nếu hai vế của phương trình hàm đối xứng giữa các biến thì bằng cách tăng số biến, chúng ta có thể sử dụng được tính đối xứng.

Bài toán 2.316 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2009). *Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(x)f(y)-f(x+y)=\sin x\sin y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{1+f(2x)}+\dfrac{1}{1+f(4x)}+\dfrac{1}{1-f(6x)}>2$.

Giải. Ta có (1) $\Leftrightarrow f(x+y)=f(x)f(y)-\sin x\sin y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Tiến hành tương tự như bài toán 2.315 ở trang 357 ta thu được

$$\sin z\,[f(x)\sin y-f(y)\sin x]=\sin z\,(\sin y\cos x-\cos y\sin x),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$$

Thế $z=\frac{\pi}{2}$, ta nhận được

$$\begin{aligned}&f(x)\sin y-f(y)\sin x=\sin y\cos x-\cos y\sin x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\&\Leftrightarrow[f(x)-\cos x]\sin y=[f(y)-\cos y]\sin x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (2)\end{aligned}$$

Trong (2) cho $y=\frac{\pi}{2}$ ta được $f(x)-\cos x=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy $f(x)$ có dạng

$$f(x)=\cos x+a\sin x,\ \forall x\in\mathbb{R}\ \left(\text{với } a=f(\tfrac{\pi}{2})\right).$$

Thay vào (1) ta được:

$$\begin{aligned}&\cos(x+y)+a\sin(x+y)\\&=(\cos x+a\sin x)(\cos y+a\sin y)-\sin x\sin y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (3)\end{aligned}$$

Từ (3) cho $x=y=\frac{\pi}{4}$, ta được

$$a=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)-\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}(a+1)^2-\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=0.$$

Vậy $f(x)=\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}$, thử lại thấy thỏa mãn (1). Ta có

$$\begin{aligned}&1+\cos 2x+1+\cos 4x+1-\cos 6x=3+\cos 4x+\cos 2x-\cos 6x\\&=4-2\sin^2 2x+2\sin 4x\sin 2x\\&=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}(\sin 4x-2\sin 2x)^2-\frac{1}{2}\cos^2 4x\le\frac{9}{2}.\end{aligned}$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1+f(2x)}+\frac{1}{1+f(4x)}+\frac{1}{1-f(6x)}=\frac{1}{1+\cos 2x}+\frac{1}{1+\cos 4x}+\frac{1}{1-\cos 6x}\\&\ge\frac{9}{3+\cos 2x+\cos 4x-\cos 6x}\ge\frac{9}{\frac{9}{2}}=2.\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}1+\cos 2x=1+\cos 4x=1-\cos 6x\\ \sin 4x=2\sin 2x\\ \cos 4x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 2x=\cos 4x=-\cos 6x\\ \sin 4x=2\sin 2x\\ \cos 4x=0.\end{cases}$$

Dễ thấy hệ này vô nghiệm, do đó dấu bằng không xảy ra được, từ đó suy ra

$$\frac{1}{1+f(2x)}+\frac{1}{1+f(4x)}+\frac{1}{1-f(6x)}>2.$$

Lưu ý. Giả thiết hàm số f liên tục trong bài toán này là không cần thiết.

Bài toán 2.317. *Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)\neq 0$ và*

$$f(x+y)f(x-y)=f^2(x)-\sin^2 y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Trong (1) cho $x=y$ ta được

$$f(2x)f(0)=f^2(x)-\sin^2 x,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Đặt $b=f(0)\neq 0$. Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned}f(x+y)f(x-y)&=f(2x)f(0)+\sin^2 x-\sin^2 y\\&=bf(2x)+\sin(x+y)\sin(x-y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{3}$$

Đặt $u=x+y$, $v=x-y$, thay vào (3) ta được

$$\begin{aligned}&f(u)f(v)=bf(u+v)+\sin u\sin v,\ \forall u,v\in\mathbb{R}\\\Leftrightarrow&bf(u+v)=f(u)f(v)-\sin u\sin v,\ \forall u,v\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{4}$$

Với mọi u, v, $w\in\mathbb{R}$, sử dụng (4) ta được

$$\begin{aligned}&bf(u+v+w)=f(u+v)f(w)-\sin(u+v)\sin w\\=&\frac{1}{b}\left[f(u)f(v)-\sin u\sin v\right]f(w)-(\sin u\cos v+\cos u\sin v)\sin w\\=&\frac{1}{b}f(u)f(v)f(w)-\frac{1}{b}f(w)\sin u\sin v-\sin u\cos v\sin w-\cos u\sin v\sin w.\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}&bf(u+v+w)=f(u)f(v+w)-\sin u\sin(v+w)\\=&\frac{1}{b}\left[f(v)f(w)-\sin v\sin w\right]f(u)-(\sin v\cos w+\cos v\sin w)\sin u\\=&\frac{1}{b}f(u)f(v)f(w)-\frac{1}{b}f(u)\sin v\sin w-\sin u\sin v\cos w-\sin u\cos v\sin w.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}&\frac{1}{b}f(w)\sin u\sin v+\cos u\sin v\sin w\\=&\frac{1}{b}f(u)\sin v\sin w+\sin u\sin v\cos w,\ \forall u,v,w\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{5}$$

Từ (5) cho $v=\dfrac{\pi}{2}$ ta được

$$\begin{aligned}&\frac{1}{b}f(w)\sin u+\cos u\sin w=\frac{1}{b}f(u)\sin w+\sin u\cos w,\ \forall u,w\in\mathbb{R}\\\Leftrightarrow&\left[\frac{1}{b}f(w)-\cos w\right]\sin u=\left[\frac{1}{b}f(u)-\cos u\right]\sin w,\ \forall u,w\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{6}$$

Trong (6) cho $u=\dfrac{\pi}{2}$ ta được

$$\frac{1}{b}f(w)-\cos w=\frac{1}{b}f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin w,\ \forall w\in\mathbb{R}.$$

Vậy hàm f có dạng $f(x)=b\cos x+c\sin x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&\left[b\cos(x+y)+c\sin(x+y)\right]\left[b\cos(x-y)+c\sin(x-y)\right]\\=&(b\cos x+c\sin x)^2-\sin^2 y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{7}$$

Trong (7) cho $x=0$, $y=\dfrac{\pi}{2}$ ta được $-c^2=b^2-1\Leftrightarrow b^2+c^2=1$. Thử lại thấy hàm số $f(x)=b\cos x+c\sin x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, với b, c là các hằng số, $b\neq 0$ và $b^2+c^2=1$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 2.318. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$xf(x)-yf(y)=(x-y)f(x+y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Ta thêm biến mới z như sau: Theo (1) ta có

$$xf(x)-zf(z)=(x-z)f(x+z),\ \forall x,z\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

$$\begin{aligned}xf(x)-zf(z)&=[xf(x)-yf(y)]+[yf(y)-zf(z)]\\&=(x-y)f(x+y)+(y-z)f(y+z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{3}$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$(x-z)f(x+z)=(x-y)f(x+y)+(y-z)f(y+z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Với mọi $u\in\mathbb{R}$, xét hệ $\begin{cases}x+z=u\\x+y=1\\y+z=0\end{cases}\Leftrightarrow(x;y;z)=\left(\dfrac{u+1}{2};\dfrac{1-u}{2};\dfrac{u-1}{2}\right)$. Do đó (4) trở thành $f(u)=f(1)u+f(0)(1-u)$, $\forall u\in\mathbb{R}$ hay $f(x)=ax+b$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (1) thấy thỏa mãn.

Bài toán 2.319 (Đề nghị thi Olympic Toán Quốc tế-2005). *Tìm tất cả các hàm số $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x)f(y)=2f\left(x+yf(x)\right),\ \forall x,y>0. \tag{1}$$

Giải. Giả sử hàm f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Ta sẽ thêm biến mới $z>0$ như sau: Với mọi số dương x, y, z, sử dụng (1) nhiều lần ta được

$$\begin{aligned}f(x)f(y)f(z)&=2f(z)f\left(x+yf(x)\right)=4f\left(z+(x+yf(x))f(z)\right)\\&=4f\left(z+xf(z)+yf(z)f(x)\right)\\&=4f\left(z+xf(z)+2yf(z+xf(z))\right)\\&=2f\left(z+xf(z)\right)f(2y)=f(z)f(x)f(2y).\end{aligned} \tag{2}$$

Do $f(x) > 0$, $f(z) > 0$ nên từ (2) thu được

$$f(y) = f(2y),\ \forall y > 0. \tag{3}$$

Nếu tồn tại hai số dương x_1, x_2 sao cho $x_1 > x_2$ mà $f(x_1) < f(x_2)$ thì ta xét số dương $y = \dfrac{x_1 - x_2}{f(x_2) - f(x_1)}$. Khi đó

$$yf(x_2) - yf(x_1) = x_1 - x_2 \Rightarrow yf(x_2) + x_2 = yf(x_1) + x_1$$

$$\Rightarrow f\left(x_2 + yf(x_2)\right) = f\left(x_1 + yf(x_1)\right) \overset{\text{do (1)}}{\Rightarrow} f(x_2)f(y) = f(x_1)f(y).$$

Do $f(y) > 0$ nên suy ra $f(x_2) = f(x_1)$, đến đây ta gặp mâu thuẫn. Do đó với mọi số dương x_1, x_2 sao cho $x_1 > x_2$ ta luôn có $f(x_1) \geq f(x_2)$, kết hợp với (3) ta sẽ chứng minh f là hàm hằng. Giả sử x_1, x_2 là hai phần tử bất kì của khoảng $(0; +\infty)$ và $x_1 < x_2$. Do $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n x_1 = +\infty$ nên tồn tại số tự nhiên n đủ lớn sao cho $2^n x_1 > x_2$. Vì thế, do (3) và do f là hàm tăng trên khoảng $(0; +\infty)$ nên f là hàm hằng trên đoạn $[x_1; 2^n x_1]$, lại do $x_2 \in [x_1; 2^n x_1]$ nên $f(x_1) = f(x_2)$, suy ra suy ra f là hàm hằng trên khoảng $(0; +\infty)$: $f(y) = C, \forall y > 0$. Thay vào (1) được $C = 2$. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x) = 2, \forall x > 0.$$

Bài toán 2.320. *Tìm các hàm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: g là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm f đơn điệu thực sự trên $\mathbb{R}$ và*

$$f(x + y) = f(x)g(y) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử hai hàm f và g thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Ta sẽ thêm biến mới z như sau: Với mọi x, y, z, sử dụng (1) ta được

$$\begin{aligned} f(x + y + z) &= f(x + y)g(z) + f(z) = [f(x)g(y) + f(y)]\, g(z) + f(z) \\ &= f(x)g(y)g(z) + f(y)g(z) + f(z). \end{aligned} \tag{2}$$

Mặt khác cũng theo (1) ta có

$$f(x + y + z) = f(x)g(y + z) + f(y + z) = f(x)g(y + z) + f(y)g(z) + f(z). \tag{3}$$

Từ (2) và (3) suy ra với mọi số thực x, y, z ta có

$$f(x)g(y)g(z) + f(y)g(z) + f(z) = f(x)g(y + z) + f(y)g(z) + f(z).$$

Hay

$$f(x)g(y)g(z) = f(x)g(y + z),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Dễ thấy $f(x) \not\equiv 0$, tức là tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Từ (4) lấy $x = x_0$ ta được

$$g(y + z) = g(y)g(z),\ \forall y, z \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Từ (5), sử dụng kết quả bài toán 2.216 ở trang 280 ta được

$$g(x) \equiv 0,\ g(x) \equiv a^x \text{ (a là hằng số dương).}$$

- Nếu $g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì từ (1) ta được $f(x + y) = f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Từ đây lấy $y = 1$ suy ra f là hàm hằng, gặp mâu thuẫn.
- Nếu $g(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ thì từ (1) ta được

$$f(x + y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Do f đơn điệu thực sự nên từ (6), sử dụng bài toán 2.167 ở trang 217 ta được

$$f(x) = kx,\ \forall x \in \mathbb{R}\ (k \text{ là hằng số khác } 0).$$

- Nếu $g(x) = a^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (với a là hằng số, $0 < a \neq 1$). Thế vào (1) được

$$f(x + y) = f(x)a^y + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{7}$$

$$f(y + x) = f(y)a^x + f(x),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Từ (7) và (8) dẫn đến

$$\begin{aligned} &f(x)a^y + f(y) = f(y)a^x + f(x),\ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &f(x)\left[a^y - 1\right] = f(y)\left[a^x - 1\right],\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{9}$$

Từ (7) lấy $y = 0$ được $f(0) = 0$. Từ (9) suy ra

$$\frac{f(x)}{a^x - 1} = \frac{f(y)}{a^y - 1},\ \forall x \neq 0, y \neq 0.$$

Vậy $\dfrac{f(x)}{a^x - 1}$ là hàm hằng, kết hợp với $f(0) = 0$ ta được

$$f(x) = b\left(a^x - 1\right),\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } b \text{ là hằng số khác không).}$$

Sau khi thử lại ta kết luận: Các cặp hàm f và g thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$g(x) \equiv 1$ và $f(x) = kx$ (k là hằng số)

$g(x) \equiv a^x$ và $f(x) \equiv b\left(a^x - 1\right)$ (a, b là hằng số $0 < a \neq 1, b \neq 0$).

Bài toán 2.321. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x + y) = f(x)f(y)f(xy),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Sử dụng (1), ta thêm biến mới z như sau:

$$\begin{aligned} f(x+y+z) &= f(x)f(y+z)f(xy+xz) \\ &= f(x)f(y)f(z)f(yz)f(xy)f(xz)f(x^2yz), \ \forall x,y,z\in\mathbb{R}. \quad (2) \\ f(x+y+z) &= f(y)f(x+z)f(xy+yz) \\ &= f(x)f(y)f(z)f(xz)f(xy)f(yz)f(xy^2z), \ \forall x,y,z\in\mathbb{R}. \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$f(x^2yz) = f(xy^2z), \ \forall x,y,z\in\mathbb{R}. \quad (4)$$

Với $x\neq 0$, $y\neq 0$, từ (4) lấy $z=\dfrac{1}{xy}$ ta được $f(x)=f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, hay f là hàm hằng trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Giả sử $f(x)=c$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (c là hằng số). Từ (1) lấy $x=y=1$ ta được $c=c^3\Leftrightarrow c\in\{0,1,-1\}$. Từ (1) lấy $y=-x\neq 0$ ta được $f(0)=c^3=c$. Vậy $f(x)\equiv c$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Do đó tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv 1$, $f(x)\equiv -1$.

Bài toán 2.322. *Tìm các hàm số $f,g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn: g là đơn ánh và*

$$f\left(g(x)+y\right)=g\left(f(y)+x\right), \ \forall x,y\in\mathbb{Z}. \quad (1)$$

Giải. Ta thêm biến mới z như sau:

$$\begin{aligned} & f\left(g(x)+y\right)=g\left(f(y)+x\right), \ \forall x,y\in\mathbb{Z}. \\ \Leftrightarrow & f\left(g(x)+y\right)+z=g\left(f(y)+x\right)+z, \ \forall x,y,z\in\mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow & g\left(f\left(g(x)+y\right)+z\right)=g\left(g\left(f(y)+x\right)+z\right), \ \forall x,y,z\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow & f\left(g(z)+g(x)+y\right)=g\left(g\left(f(y)+x\right)+z\right), \ \forall x,y,z\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow & f\left(g(x)+g(z)+y\right)=g\left(g\left(f(y)+x\right)+z\right), \ \forall x,y,z\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow & g\left(f\left(g(z)+y\right)+x\right)=g\left(g\left(f(y)+x\right)+z\right), \ \forall x,y,z\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow & f\left(g(z)+y\right)+x=g\left(f(y)+x\right)+z, \ \forall x,y,z\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow & g\left(f(y)+z\right)+x=g\left(f(y)+x\right)+z, \ \forall x,y,z\in\mathbb{Z}. \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (2) cho $z=-f(y)$ ta được

$$\begin{aligned} & g(0)+x=g\left(f(y)+x\right)-f(y), \ \forall x,y\in\mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow & g(0)+x+f(y)=g\left(f(y)+x\right), \ \forall x,y\in\mathbb{Z}. \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (3) cho $x=-f(y)+t$ ta được $g(0)+t=g(t)$, $\forall t\in\mathbb{Z}$. Vậy

$$g(x)=x+c, \ \forall x\in\mathbb{Z}.$$

Thay vào (1) ta được

$$f\left(x+y+c\right)=f(y)+x+c, \ \forall x,y\in\mathbb{Z}. \quad (4)$$

Từ (4) lấy $x=-y-c$ ta được $f(y)=y+d$, $\forall y\in\mathbb{Z}$ (với $d=f(0)$). Vậy

$$g(x)=x+c, \ \forall x\in\mathbb{Z} \text{ và } f(x)=x+d, \ \forall x\in\mathbb{Z},$$

với c và d là những hằng số nguyên tùy ý. Thử lại thấy đúng.

Bài toán 2.323. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1, \ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Từ (1) cho $x=y=0$ ta được

$$f^2(0)-2f(0)+1=0\Leftrightarrow\left[f(0)-1\right]^2=0\Leftrightarrow f(0)=1.$$

Ta thêm biến mới z như sau: Với mọi số thực x, y, z ta có

$$\begin{aligned} f(xyz) &= f(x)f(yz)-f(x+yz)+1 \\ &= f(x)\left[f(y)f(z)-f(y+z)+1\right]-f(x+yz)+1 \\ &= f(x)f(y)f(z)-f(x)f(y+z)+f(x)-f(x+yz)+1. \quad (2) \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} f(xyz) &= f(z)f(xy)-f(z+xy)+1 \\ &= f(z)\left[f(x)f(y)-f(x+y)+1\right]-f(z+xy)+1 \\ &= f(x)f(y)f(z)-f(z)f(x+y)+f(z)-f(z+xy)+1. \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (2) và (3) suy ra với mọi số thực x,y,z ta có

$$f(x)f(y+z)-f(x)+f(x+yz)=f(z)f(x+y)-f(z)+f(z+xy). \quad (4)$$

Từ (1) cho $x=1$ và $y=-1$ được

$$f(-1)=f(1)f(-1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(-1)=0 \\ f(1)=1. \end{array}\right.$$

• Trường hợp $f(-1)=0$. Từ (4) cho $z=-1$ và $x=1$ được

$$f(1)f(y-1)-f(1)+f(1-y)=f(y-1), \ \forall y\in\mathbb{R}. \quad (5)$$

Từ (5) cho $y=2$ được

$$f^2(1)-f(1)=f(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(1)=0 \\ f(1)=2. \end{array}\right.$$

◦ Xét $f(1)=0$. Khi đó (5) trở thành $f(1-y)=f(y-1)$, $\forall y\in\mathbb{R}$. Từ đây thay y bởi $y+1$ ta được

$$f(-y)=f(y), \ \forall y\in\mathbb{R}. \quad (6)$$

Từ (1) thay y bởi $-y$ và sử dụng (6) được

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x-y) + 1,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Từ (7) và (1) suy ra $f(x+y) = f(x-y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Từ đây cho $x = y$ và lưu ý $f(0) = 1$ được $f(2x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$, từ đây lấy $x = 0,5$ được $f(1) = 1$, mâu thuẫn với $f(1) = 0$.

◦ Xét $f(1) = 2$. Khi đó (5) trở thành

$$\begin{aligned} &2f(y-1) - 2 + f(1-y) = f(y-1),\ \forall y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &f(y-1) = 2 - f(1-y),\ \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{8}$$

Từ (8) thay y bởi $y+1$ được

$$\begin{aligned} &f(y) = 2 - f(-y),\ \forall y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &1 - f(y) = -[1 - f(-y)],\ \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{9}$$

Đặt $1 - f(x) = g(x)$. Từ (9) suy ra hàm số g thỏa mãn $g(-x) = -g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$ và (1) trở thành

$$\begin{aligned} &1 - g(xy) = [1 - g(x)][1 - g(y)] - 1 + g(x+y) + 1,\ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &g(xy) = g(x) + g(y) - g(x)g(y) - g(x+y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{10}$$

Từ (10) thay y bởi $-y$ được

$$-g(xy) = g(x) - g(y) + g(x)g(y) - g(x-y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Cộng (10) và (11) ta được

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Từ (12) cho $y = x$ được $g(2x) = 2g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$ (do $g(0) = 0$), (12) trở thành

$$g(x+y) + g(x-y) = g(2x),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Với mọi số thực u và v, đặt $\dfrac{u+v}{2} = x$, $\dfrac{u-v}{2} = y$. Khi đó theo (13) ta được

$$\begin{aligned} &g(u) + g(v) = g(u+v),\ \forall u, v \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &g(x+y) = g(x) + g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{14}$$

Từ (10) và (14) suy ra

$$g(xy) = -g(x)g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Từ (14), tiến hành tương tự như ở lời giải bài toán 2.214 ở trang 278 ta chứng minh được:

$$g(rx) = rg(x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{Q}. \tag{16}$$

Từ (15) cho $y = x$ ta được $g(x^2) = -[g(x)]^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(x) \le 0,\ \forall x \ge 0$.
Từ (15) và (16) ta được

$$rg(x) = g(rx) = -g(r)g(x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{Q}. \tag{17}$$

Dễ thấy $g(x) \equiv 0$ thỏa mãn (10). Xét $g(x) \not\equiv 0$. Khi đó tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x_0) \ne 0$. Từ (17) cho $x = x_0$, ta được

$$g(r) = -r,\ \forall r \in \mathbb{Q}. \tag{18}$$

Tiếp theo ta chứng minh g là hàm nghịch biến. Giả sử $x < y$. Khi đó $y - x > 0$, suy ra $g(y-x) \le 0$. Sử dụng (14) ta được

$$g(y) = g((y-x)+x) = g(y-x) + g(x) \le g(x) \Rightarrow g(x) \ge g(y).$$

Vậy hàm g nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta chọn hai dãy số hữu tỉ $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho

$$u_n \le x \le v_n, \forall n = 1, 2, \ldots;\quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = x.$$

Vì g là hàm giảm nên kết hợp với (18) ta có

$$g(u_n) \ge g(x) \ge g(v_n) \Rightarrow -u_n \ge g(x) \ge -v_n (\forall n = 1, 2, \ldots).$$

Cho $n \to +\infty$ trong bất đẳng thức trên ta được:

$$-x \ge g(x) \ge -x \Rightarrow g(x) = -x.$$

Do đó: $f(x) \equiv 1 + x$.

• Trường hợp $f(1) = 1$. Từ (4) cho $z = 1$ được

$$\begin{aligned} &f(x)f(y+1) - f(x) + f(x+y) = f(x+y) - 1 + f(1+xy),\ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &f(x)f(y+1) - f(x) = -1 + f(1+xy),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{19}$$

Từ (19) lấy $y = -1$ được $f(1-x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$ hay $f(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Sau khi thử lại ta kết luận: Các hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x) \equiv 1,\ f(x) \equiv x + 1.$$

Lưu ý. Nếu đặt $f(x) - 1 = g(x)$ thì ta thu được

$$\begin{aligned} &1 + g(xy) = [1 + g(x)][1 + g(y)] - 1 - g(x+y) + 1,\ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &g(xy) = g(x) + g(y) + g(x)g(y) - g(x+y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{10}$$

Cũng tương tự như trên ta chứng minh được

$$\begin{cases} g(x+y) = g(x) + g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ g(xy) = g(x)g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Từ đây, sử dụng bài toán 2.169 ở trang 218 ta được $g(x) \equiv 0$ và $g(x) \equiv x$.

Bài toán 2.324. *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+y) - g(xy) = h(x) + h(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử (f, g, h) là một bộ ba hàm thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Từ (1) cho $y = 0$ ta được $f(x) = h(x) + h(0) + g(0),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Vì thế

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow h(x+y) + h(0) + g(0) - g(xy) = h(x) + h(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow h(x+y) = h(x) + h(y) + k(xy),\ \forall x, y \in \mathbb{R},\end{aligned} \tag{2}$$

với k là hàm số: $k(x) = g(x) - g(0) - h(0),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Sử dụng (2), ta thêm biến mới z như sau:

$$\begin{aligned}h(x+y+z) &= h(x+y) + h(z) + k(xz+yz)\\ &= h(x) + h(y) + h(z) + k(xy) + k(yz+zx),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Tương tự ta được:

$$\begin{aligned}h(x+y+z) &= h(x) + h(y) + h(z) + k(yz) + k(zx+xy)\\ &= h(x) + h(y) + h(z) + k(zx) + k(xy+yz).\end{aligned}$$

Như vậy, với mọi số thực x, y, z ta có

$$k(xy) + k(yz+zx) = k(yz) + k(zx+xy) = k(zx) + k(xy+yz). \tag{3}$$

Giả sử a, b là hai số thực bất kì.

• Trường hợp $a > 0$ và $b > 0$. Xét $c > 0$. Chọn $x = \sqrt{\dfrac{bc}{a}}, y = \sqrt{\dfrac{ca}{b}}, z = \sqrt{\dfrac{ab}{c}}$, thay vào (3) được

$$k(a) + k(b+c) = k(b) + k(c+a) = k(c) + k(a+b),\ \forall a, b, c > 0. \tag{4}$$

Vì g liên tục trên $\mathbb{R}$ nên k liên tục trên $\mathbb{R}$, do đó từ (4) cho $c \to 0^+$ ta được

$$k(a) + k(b) = k(a+b) + k(0),\ \forall a > 0, b > 0. \tag{5}$$

• Trường hợp $a < 0$ và $b < 0$. Xét $c > 0$. Chọn $x = \sqrt{\dfrac{bc}{a}}, y = \sqrt{\dfrac{ca}{b}}, z = \sqrt{\dfrac{ab}{c}}$, thay vào (3) được

$$k(a) + k(b+c) = k(b) + k(c+a) = k(c) + k(a+b),\ \forall a < 0, b < 0, c > 0. \tag{6}$$

Vì g liên tục trên $\mathbb{R}$ nên k liên tục trên $\mathbb{R}$, do đó từ (6) cho $c \to 0^+$ ta được

$$k(a) + k(b) = k(a+b) + k(0),\ \forall a < 0, b < 0. \tag{7}$$

• Trường hợp $a < 0$ và $b > 0$. Xét $c < 0$. Chọn $x = \sqrt{\dfrac{bc}{a}}, y = \sqrt{\dfrac{ca}{b}}, z = \sqrt{\dfrac{ab}{c}}$, thay vào (3) được

$$k(a) + k(b+c) = k(b) + k(c+a) = k(c) + k(a+b),\ \forall a < 0, b > 0, c < 0. \tag{8}$$

Vì g liên tục trên $\mathbb{R}$ nên k liên tục trên $\mathbb{R}$, do đó từ (8) cho $c \to 0^-$ ta được

$$k(a) + k(b) = k(a+b) + k(0),\ \forall a < 0, b > 0. \tag{9}$$

• Trường hợp $a > 0$ và $b < 0$, tương tự ta cũng thu được

$$k(a) + k(b) = k(a+b) + k(0),\ \forall a > 0, b < 0. \tag{10}$$

• Nếu ít nhất một trong hai số a, b bằng 0 thì $k(a) + k(b) = k(a+b) + k(0)$ cũng đúng, do đó từ (5), (7), (9), (10) ta có

$$k(a) + k(b) = k(a+b) + k(0),\ \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Xét hàm số $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ như sau: $t(x) = k(x) - k(0),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Từ (11) ta có

$$t(x+y) = t(x) + t(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Do hàm số t liên tục nên từ (12), sử dụng kết quả bài toán 2.214 ở trang 278 ta thu được $t(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$, với a là hằng số thực. Vì thế hàm số k có dạng $k(x) = ax + b,\ \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra hàm g có dạng $g(x) = ax + \alpha,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned}&h(x+y) = h(x) + h(y) + axy + \alpha,\ \forall x, y \in \mathbb{R}\\ \Leftrightarrow &h(x+y) - \frac{a}{2}(x+y)^2 = \left[h(x) - \frac{a}{2}x^2\right] + \left[h(y) - \frac{a}{2}y^2\right] + \alpha = 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}\\ \Rightarrow &h(x) - \frac{a}{2}x^2 = mx + n,\ \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Vậy hàm số h có dạng $h(x) = \dfrac{a}{2}x^2 + mx + n,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Tóm lại:

$$f(x) \equiv \frac{a}{2}x^2 + mx + p, g(x) \equiv ax + b, h(x) \equiv \frac{a}{2}x^2 + mx + m.$$

Thay vào (1) ta được

$$\frac{a}{2}(x+y)^2 + m(x+y) + p - axy - b = \frac{a}{2}x^2 + mx + n + \frac{a}{2}y^2 + my + n, \forall x, y \in \mathbb{R},$$

hay $p - b = 2n$. Vậy các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x) \equiv \frac{a}{2}x^2 + mx + b + 2n,\ g(x) \equiv ax + b,\ h(x) \equiv \frac{a}{2}x^2 + mx + n.$$

Bài toán 2.325. *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+y)+f(xy)=f(x)+f(y)+f(xy+1),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Xét hàm số g như sau:

$$g(x)=f(x+1)-f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Khi đó g liên tục trên $\mathbb{R}$ và (1) trở thành:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+g(xy),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Sử dụng (2), ta thêm biến mới z tương tự như bài toán 2.324, thu được kết quả: Hàm g có dạng $g(x)=2ax+b,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned}&f(x+y)=f(x)+f(y)+2axy+b,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&f(x+y)-a(x+y)^2=\left[h(x)-ax^2\right]+\left[h(y)-ay^2\right]+b=0,\forall x,y\in\mathbb{R}\\ \Rightarrow&f(x)-ax^2=mx+n,\forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Thay $f(x)=ax^2+mx+n,\forall x\in\mathbb{R}$ vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&a(x+y)^2+m(x+y)+n+ax^2y^2+mxy+n\\ =&ax^2+mx+n+ay^2+my+n+a(xy+1)^2+m(xy+1)+n,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Rút gọn ta được $a+m+n=0\Leftrightarrow n=-a-m$. Vậy hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài có dạng $f(x)=ax^2+mx-a-m,\ \forall x\in\mathbb{R}$, với a, m là những hằng số tùy ý.

Bài toán 2.326. *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+y)+f(xy)+1=f(x)+f(y)+f(xy+1),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Hướng dẫn. Xét hàm số $g(x)=f(x+1)-f(x)-1$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$(1)\Leftrightarrow f(x+y)=f(x)+f(y)+g(xy),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Vậy ta thêm biến mới z tương tự như bài toán 2.324, thu được kết quả: Hàm g có dạng $g(x)=2ax+b,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned}&f(x+y)=f(x)+f(y)+2axy+b,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&f(x+y)-a(x+y)^2=\left[h(x)-ax^2\right]+\left[h(y)-ay^2\right]+b=0,\forall x,y\in\mathbb{R}\\ \Rightarrow&f(x)-ax^2=mx+n,\forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Thay $f(x)=ax^2+mx+n,\forall x\in\mathbb{R}$ vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&a(x+y)^2+m(x+y)+n+ax^2y^2+mxy+n+1\\ =&ax^2+mx+n+ay^2+my+n+a(xy+1)^2+m(xy+1)+n,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Rút gọn ta được $a+m+n=1\Leftrightarrow n=1-a-m$. Vậy hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài có dạng $f(x)=ax^2+mx+1-a-m,\ \forall x\in\mathbb{R}$, với a, m là những hằng số tùy ý.

2.12 Phương trình hàm sinh bởi hằng đẳng thức

Đối với những phương trình hàm dạng này thì có thể thấy ngay được hàm số $f(x)=x$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Tuy nhiên việc tìm tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài không phải là dễ dàng, thậm chí là rất khó.

- Từ hằng đẳng thức $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ ta nhận thấy hàm số $f(x)=x$ là nghiệm của các phương trình hàm sau:
  (i) $xf(x)-yf(y)=(x-y)f(x+y)$.
  (ii) $f(x^2)-f(y^2)=[f(x)-f(y)](x+y)$.
- Từ hằng đẳng thức $(x^2-y^2)(x+y)=(x+y)^2(x-y)$ suy ra $f_1(x)=x$ và $f_2(x)=x^2$ thỏa mãn phương trình hàm
  (iii) $(x-y)f(x+y)=(x+y)[f(x)-f(y)]$.
- Hơn nữa ta thấy rằng nếu các hàm f_1 và f_2 là nghiệm của phương trình hàm (iii) thì f_1+f_2 và λf_1 (hay $\alpha f_1+\beta f_2$) cũng là nghiệm của phương trình hàm (iii) (Hay nói theo ngôn ngữ của toán học cao cấp là tập hợp các nghiệm của phương trình hàm (iii) là một không gian véc tơ con), suy ra $h(x)=ax^2+bx$ là nghiệm của phương trình hàm (iii).
- Từ hằng đẳng thức $x^3-y^3=(x^2+xy+y^2)(x-y)$ suy ra $f(x)=x$ là nghiệm của phương trình hàm

$$f(x^3)-f(y^3)=(x^2+xy+y^2)[f(x)-f(y)].$$

Sau đây ta xây dựng phương pháp giải cho một số phương trình hàm sinh bởi hằng đẳng thức.

Bài toán 2.327 (Irish-1995). *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$xf(x)-yf(y)=(x-y)f(x+y),\ \forall x,y\in\mathbb{R} \tag{1}$$

Giải.
Cách 1.
Bước 1: Xây dựng hàm. Gọi $g(x)=f(x)-f(0)$. Khi đó g là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ và $g(0)=0, f(x)=g(x)+f(0),\forall x\in\mathbb{R}$. Thay $g(x)$ vào (1) được

$$\begin{aligned}&x[g(x)+f(0)]-y[g(y)+f(0)]=(x-y)[g(x+y)+f(0)],\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&xg(x)-yg(y)=(x-y)g(x+y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Vậy ta thu được

$$\begin{cases}g(0)=0\\ xg(x)-yg(y)=(x-y)g(x+y),\forall x,y\in\mathbb{R}.\end{cases} \tag{2}$$

Bước 2: Sử dụng đẳng thức $g(0) = 0$. Từ (2) cho $y = -x$ ta thu được

$$xg(x) + xg(-x) = 0 \Rightarrow g(x) = -g(-x), \forall x \neq 0.$$

Do $g(0) = 0$ nên $g(-x) = -g(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Từ (2) thay y bởi $-y$ ta thu được

$$xg(x) + yg(-y) = (x+y)g(x-y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow xg(x) - yg(y) = (x+y)g(x-y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với (2) suy ra

$$(x-y)g(x+y) = (x+y)g(x-y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Với mọi số thực u và v, luôn tồn tại hai số thực x và y sao cho $u = x + y$, $v = x - y$. Do đó từ (3) suy ra

$$vg(u) = ug(v), \ \forall u, v \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \frac{g(u)}{u} = \frac{g(v)}{v}, \ \forall u \neq 0, v \neq 0$$
$$\Rightarrow \frac{g(x)}{x} = C \text{ (hằng số)} \Rightarrow g(x) = Cx, \ \forall x \neq 0.$$

Kết hợp với $g(0) = 0$ ta được $g(x) = Cx, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy $f(x) = ax + b$, thử lại đúng. Do đó hàm số cần tìm có dạng

$$f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R} \ (a \text{ và } b \text{ là các hằng số}).$$

Lưu ý. Việc đặt $g(x) = f(x) - f(0)$ nhằm thu được một phương trình tương tự như (1):

$$xg(x) - yg(y) = (x-y)g(x+y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ngoài ra còn có thêm được kết quả quan trọng: $g(0) = 0$.

Cách 2. Đặt

$$g(x) = f(x) - [f(2) - f(1)]x - 2f(1) + f(2), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Khi đó $g(1) = g(2) = 0$. Trong (1) lấy $y = 1$ ta được

$$xf(x) - 1f(1) = (x-1)f(x+1), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó với mọi $x \neq 1$ và $x \neq 2$ ta có

$$f(x+1) = \frac{x}{x-1}f(x) - \frac{f(1)}{x-1}. \quad (**)$$

Thay (*) vào (**) ta được

$$g(x+1) + [f(2) - f(1)](x+1) + 2f(1) - f(2)$$

$$= \frac{x}{x-1}[g(x) + [f(2) - f(1)]x + 2f(1) - f(2)] - \frac{f(1)}{x-1}.$$

Do đó

$$g(x+1) = \frac{xg(x)}{x-1} + [f(2) - f(1)]\left[\frac{x^2}{x-1} - (x+1)\right]$$
$$+ [2f(1) - f(2)]\left(\frac{x}{x-1} - 1\right) - \frac{f(1)}{x-1}$$
$$= \frac{xg(x)}{x-1} + [f(2) - f(1)].\frac{1}{x-1} + [2f(1) - f(2)]\frac{1}{x-1} - \frac{f(1)}{x-1}$$
$$= \frac{xg(x)}{x-1} + \frac{1}{x-1}[f(2) - f(1) + 2f(1) - f(2) - f(1)] = \frac{xg(x)}{x-1}.$$

Trong (1) lấy $y = 2$ ta được

$$xf(x) - 2f(2) = (x-2)f(x+2), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó với mọi $x \neq 1$ và $x \neq 2$, Ta có $f(x+2) = \frac{x}{x-2}f(x) - \frac{2f(2)}{x-2}$. Do đó

$$g(x+2) + [f(2) - f(1)](x+2) + 2f(1) - f(2)$$
$$= \frac{x}{x-2}[g(x) + [f(2) - f(1)]x + 2f(1) - f(2)] - \frac{2f(2)}{x-2}.$$

Do đó

$$g(x+2) = \frac{xg(x)}{x-2} + [f(2) - f(1)]\left[\frac{x^2}{x-2} - (x+2)\right]$$
$$+ [2f(1) - f(2)]\left(\frac{x}{x-2} - 1\right) - \frac{2f(2)}{x-2}$$
$$= \frac{xg(x)}{x-2} + [f(2) - f(1)].\frac{4}{x-2} + [2f(1) - f(2)]\frac{2}{x-2} - \frac{2f(2)}{x-2}$$
$$= \frac{xg(x)}{x-2} + \frac{[4f(2) - 4f(1) + 4f(1) - 2f(2) - 2f(2)]}{x-2} = \frac{xg(x)}{x-2}.$$

Vậy với mọi $x \neq 1$ và $x \neq 2$, ta có

$$g(x+1) = \frac{xg(x)}{x-1}. \quad (2)$$

$$g(x+2) = \frac{xg(x)}{x-2}. \quad (3)$$

Trong (2) thay x bởi $x+1$ ta được

$$g(x+2) = \frac{(x+1)g(x+1)}{x} = \frac{(x+1)g(x)}{x-1}.$$

Kết hợp với (3), suy ra với mọi $x \neq 1$ và $x \neq 2$ ta có

$$\frac{xg(x)}{x-2} = \frac{(x+1)g(x)}{x-1} \Rightarrow \left(\frac{x}{x-2} - \frac{x+1}{x-1}\right) g(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2g(x)}{(x-2)(x-1)} = 0 \Rightarrow g(x) = 0, \forall x \neq 1, x \neq 2.$$

Kết hợp với $g(1) = g(2) = 0$ suy ra $g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Bởi vậy

$$f(x) = [f(2) - f(1)]x + 2f(1) - f(2), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó $f(x)$ có dạng $f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$, Thử lại thấy thỏa mãn. Tóm lại hàm số cần tìm là

$$f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R} \text{ với } a \text{ và } b \text{ là hằng số bất kì.}$$

Cách 3. Kí hiệu $P(u, v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (1). Với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì

$$P\left(\frac{x-1}{2}, \frac{1-x}{2}\right) \Rightarrow \frac{x-1}{2} f\left(\frac{x-1}{2}\right) - \frac{1-x}{2} f\left(\frac{1-x}{2}\right) = (x-1)f(0).$$

$$P\left(\frac{1-x}{2}, \frac{x+1}{2}\right) \Rightarrow \frac{1-x}{2} f\left(\frac{1-x}{2}\right) - \frac{x+1}{2} f\left(\frac{x+1}{2}\right) = -xf(1).$$

$$P\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) \Rightarrow \frac{x+1}{2} f\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{x-1}{2} f\left(\frac{x-1}{2}\right) = f(x). \quad (2)$$

Cộng hai phương trình trên ta được

$$\frac{x-1}{2} f\left(\frac{x-1}{2}\right) - \frac{x+1}{2} f\left(\frac{x+1}{2}\right) = (x-1)f(0) - xf(1).$$

Thay vào (2) suy ra

$$xf(1) - (x-1)f(0) = f(x) \Rightarrow f(x) = ax + b, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Lưu ý. Bài toán này chính là bài toán 2.318 ở trang 361 (ở bài "Giải phương trình hàm bằng phương pháp thêm biến"). Lời giải bằng phương pháp thêm biến z đó chính là gợi ý để ta đưa ra cách giải 3 ở đây.

Bài toán 2.328 (Đề thi HSG TPHCM năm học 2004-2005; Pan African Olympiad 2003). *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f(x^2) - f(y^2) = (x+y)[f(x) - f(y)], \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải.

Bước 1: Xây dựng hàm. Gọi $g(x) = f(x) - f(0)$. Khi đó g là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ và

$$g(0) = 0, f(x) = g(x) + f(0), \forall x \in \mathbb{R}$$

Thay $g(x)$ vào (1) ta được

$$[g(x^2) + f(0)] - [g(y^2) + f(0)] = (x+y)[g(x) + f(0) - g(y) - f(0)], \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Vậy ta thu được

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x^2) - g(y^2) = (x+y)[g(x) - g(y)], \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2)$$

Bước 2: Tìm cách sử dụng đẳng thức $g(0) = 0$. Từ (2) cho $y = 0$ ta thu được

$$g(x^2) = xg(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy kết hợp với (2) ta có

$$\begin{aligned} & xg(x) - yg(y) = (x+y)[g(x) - g(y)], \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & xg(x) - yg(y) = xg(x) - yg(y) + yg(x) - xg(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & xg(y) = yg(x), \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow & \frac{g(x)}{x} = \frac{g(y)}{y}, \ \forall x \neq 0, y \neq 0. \end{aligned}$$

Từ đây lấy $y = 1$ được $g(x) = ax, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Do $g(0) = 0$ nên

$$g(x) = ax, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó $f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Hàm số cần tìm có dạng

$$f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R} \ (a \text{ và } b \text{ là các hằng số bất kì}).$$

Cách khác. Trong (1) cho $y = 0$ ta được

$$f(x^2) = f(0) + x[f(x) - f(0)], \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Trong (1) Cho $x = 0$ ta được

$$f(y^2) = f(0) + y[f(y) - f(0)], \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Suy ra

$$f(x^2) - f(y^2) = xf(x) - yf(y) - f(0)(x - y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Mặt khác theo (1) ta có

$$f(x^2) - f(y^2) = xf(x) - yf(y) - xf(y) + yf(x), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có

$$xf(y) - yf(x) = f(0)(x-y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ đây cho $y = 1$ ta được

$$xf(1) - f(x) = f(0)(x-1), \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f(x) = [f(1) - f(0)]x + f(0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy $f(x) = ax + b$, với $a = f(1) - f(0)$ và $b = f(0)$. Thử lại thấy hàm số $f(x) = ax + b$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Vậy hàm số cần tìm có dạng

$$f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R} \ (a \text{ và } b \text{ là các hằng số bất kì}).$$

Bài toán 2.329 (MONDOVA-2004 ; Algeria MO-2011). *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f(x^3) - f(y^3) = (x^2 + xy + y^2)[f(x) - f(y)], \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải.
Bước 1: Xây dựng hàm. Gọi $g(x) = f(x) - f(0)$. Khi đó g là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ và $g(0) = 0, f(x) = g(x) + f(0), \forall x \in \mathbb{R}$. Thay $g(x)$ vào (1) được

$$[g(x^3) + f(0)] - [g(y^3) + f(0)]$$
$$= (x^2 + xy + y^2)[g(x) + f(0) - g(y) - f(0)], \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Vậy ta thu được

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x^3) - g(y^3) = (x^2 + xy + y^2)[g(x) - g(y)], \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2)$$

Bước 2: Tìm cách sử dụng $g(0) = 0$. Từ (2) cho $y = 0$ ta thu được

$$g(x^3) = x^2 g(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy kết hợp với (2) ta có

$$x^2 g(x) - y^2 g(y) = (x^2 + xy + y^2)[g(x) - g(y)], \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow 0 = -x^2 g(y) + xyg(x) - xyg(y) + y^2 g(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow g(x)(xy + y^2) = g(y)(x^2 + xy), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (3)$$
$$\Leftrightarrow y(x+y)g(x) = x(x+y)g(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (4)$$
$$\Rightarrow \frac{g(x)}{x} = \frac{g(y)}{y}, \forall x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y.$$

Từ (4) lấy $y = 1$ được

$$g(x) = ax, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}.$$

Do $g(0) = 0$ nên $g(x) = ax, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Từ (3) lấy $x = 2$ và $y = -1$ được

$$-g(2) = 2g(-1) \Leftrightarrow g(-1) = -\frac{1}{2}g(2) \Rightarrow g(-1) = -a.$$

Vì thế $g(x) = ax, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy hàm số cần tìm có dạng

$$f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R} \ (a \text{ và } b \text{ là các hằng số bất kì}).$$

Bài toán 2.330 (Silk Road Mathematical Competition March 2004, Singapore National Mathematical Olympiad 2012). *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$(x+y)[f(x) - f(y)] = (x-y)f(x+y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn đề bài, khi đó ta có (1). Trong (1) cho $x = 1, y = -1$ ta được $f(0) = 0$. Xét hàm số

$$g(x) = f(x) - \frac{4f(1) - f(2)}{2}x - \frac{f(2) - 2f(1)}{2}x^2, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Dễ thấy $f_1(x) = x$ và $f_2(x) = x^2$ thỏa mãn phương trình hàm (1). Hơn nữa ta thấy rằng nếu các hàm f_1 và f_2 là nghiệm (1) thì $f_1 + f_2$ và λf_1 (hay $\alpha f_1 + \beta f_2$) cũng là nghiệm của (1). Vậy $g(x)$ cũng là nghiệm hàm (thỏa mãn) (1) và $g(0) = g(1) = g(2) = 0$. Với mọi $x \notin \{0, 1, 2\}$ ta có

$$(x+1)[f(x) - f(1)] = (x-1)f(x+1) \text{ (do lấy } y = 1 \text{ trong (1))}$$
$$\Leftrightarrow f(x+1) = \frac{x+1}{x-1}[f(x) - f(1)]. \quad (**)$$

Thay (*) vào (**) ta được

$$g(x+1) + \frac{4f(1) - f(2)}{2}(x+1) + \frac{f(2) - 2f(1)}{2}(x+1)^2$$
$$= \frac{x+1}{x-1}\left[g(x) + \frac{4f(1) - f(2)}{2}x + \frac{f(2) - 2f(1)}{2}x^2 - f(1)\right].$$

Do đó

$$g(x+1) = \frac{x+1}{x-1}g(x) + \frac{4f(1) - f(2)}{2}\left[\frac{(x+1)x}{x-1} - (x+1)\right]$$
$$+ \frac{f(2) - 2f(1)}{2}\left[\frac{(x+1)x^2}{x-1} - (x+1)^2\right] - \frac{x+1}{x-1}f(1)$$
$$= \frac{x+1}{x-1}g(x) + \frac{4f(1) - f(2)}{2}\left[\frac{x+1}{x-1}\right]$$

$$+\frac{f(2)-2f(1)}{2}\left[\frac{(x+1)}{x-1}\right]-\frac{x+1}{x-1}f(1)$$
$$=\frac{x+1}{x-1}g(x)+\frac{x+1}{x-1}\left[\frac{4f(1)-f(2)}{2}+\frac{f(2)-2f(1)}{2}-f(1)\right]$$
$$=\frac{x+1}{x-1}g(x)+\frac{x+1}{x-1}.0=\frac{x+1}{x-1}g(x).$$

Tương tự, với mọi $x\notin\{0,1,2\}$ ta có

$$f(x+2)=\frac{x+2}{x-2}[f(x)-f(2)].$$

Suy ra

$$g(x+2)+\frac{4f(1)-f(2)}{2}(x+2)+\frac{f(2)-2f(1)}{2}(x+2)^2$$
$$=\frac{x+2}{x-2}\left[g(x)+\frac{4f(1)-f(2)}{2}x+\frac{f(2)-2f(1)}{2}x^2-f(2)\right].$$

Do đó

$$g(x+2)=\frac{x+2}{x-2}g(x)+\frac{4f(1)-f(2)}{2}\left[\frac{(x+2)x}{x-2}-(x+2)\right]$$
$$+\frac{f(2)-2f(1)}{2}\left[\frac{(x+2)x^2}{x-2}-(x+2)^2\right]-\frac{x+2}{x-2}f(2)$$
$$=\frac{x+2}{x-2}g(x)+\frac{4f(1)-f(2)}{2}\left[\frac{2(x+2)}{x-2}\right]$$
$$+\frac{f(2)-2f(1)}{2}\left[\frac{4(x+2)}{x-2}\right]-\frac{x+2}{x-2}f(2)$$
$$=\frac{x+2}{x-2}g(x)+\frac{x+2}{x-2}\left[\frac{8f(1)-2f(2)}{2}+\frac{4f(2)-8f(1)}{2}-f(2)\right]$$
$$=\frac{x+2}{x-2}g(x)+\frac{x+2}{x-2}.0=\frac{x+2}{x-2}g(x).$$

Tóm lại ta có

$$g(x+1)=\frac{x+1}{x-1}g(x),\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1,2\}. \quad (2)$$

$$g(x+2)=\frac{x+2}{x-2}g(x),\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1,2\}. \quad (3)$$

Từ (2) suy ra

$$g(x+2)=\frac{x+2}{x}g(x+1)=\frac{x+2}{x}.\frac{x+1}{x-1}g(x).$$

Kết hợp với (3) suy ra với mọi $x\notin\{0,1,2\}$ ta có

$$\left[\frac{x+2}{x-2}-\frac{(x+2)(x+1)}{x(x-1)}\right]g(x)=0\Leftrightarrow\frac{2(x+2)g(x)}{x(x-1)(x-2)}=0.$$

Vậy $g(x)=0,\forall x\neq-2$. Thay $x=-2$ vào (2) ta được

$$g(-1)=\frac{1}{3}g(-2)\Rightarrow g(-2)=3g(-1).$$

Thay $x=-1$ vào (3) ta được

$$g(1)=-\frac{1}{3}g(-1)\Rightarrow g(-1)=-3g(1)=0\Rightarrow g(-2)=0.$$

Vậy $g(x)\equiv 0$, tức là $g(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$. Do đó

$$f(x)=ax+bx^2,\forall x\in\mathbb{R}\text{ (với } a \text{ và } b \text{ là hằng số bất kì).}$$

Thử lại thấy thỏa mãn, vậy tất cả các hàm số cần tìm có dạng

$$f(x)=ax+bx^2,\forall x\in\mathbb{R}\text{ (với } a \text{ và } b \text{ là hằng số bất kì).}$$

Nhận xét 7. *Dễ thấy $f_1(x)=x$ và $f_2(x)=x^2$ thỏa mãn phương trình hàm (1). Hơn nữa ta thấy rằng nếu các hàm f_1 và f_2 là nghiệm (1) thì f_1+f_2 và λf_1 (hay $\alpha f_1+\beta f_2$) cũng là nghiệm của (1). Do đó ta dự đoán rằng tất cả các hàm số cần tìm đều có dạng*

$$f(x)=ax+bx^2,\forall x\in\mathbb{R}\text{ (với } a,\ b \text{ là các hằng số).}$$

Để chứng minh điều dự đoán trên ta sẽ chứng minh $f(x)-[ax+bx^2]\equiv 0$, tức là chứng minh $g(x)=f(x)-[ax+bx^2]$ có nhiều hơn hai nghiệm. Để chứng minh $g(x)$ có ba nghiệm là 0, 1, 2 ta đi chứng minh

$$\begin{cases} g(0)=f(0)=0\\ g(1)=f(1)-a-b=0\\ g(2)=f(2)-2a-4b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a+b=f(1)\\ 2a+4b=f(2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b=\dfrac{f(2)-2f(1)}{2}\\ a=\dfrac{4f(1)-f(2)}{2}.\end{cases}$$

Bởi vậy ta mới xét hàm số $g(x)$ như đã xét ở trong lời giải của bài toán 2.330. Dự đoán được $f(x)=ax+bx^2$, là một đa thức bậc hai, do đó trong suy nghĩ, ta cần chứng minh $g(x)$ sẽ có ba nghiệm. Tuy nhiên khi trình bày lời giải, không được phép sử dụng điều này vì ta chưa chứng minh được $f(x)$ là đa thức, vậy ta phải chứng minh $g(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$. Qua đây một lần nữa chúng ta thấy được tầm quan trọng của việc đoán nhận kết quả, nó giúp ta có được một lời giải "rất thiếu tự nhiên".

Bài toán 2.331. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f\left(x+y^2+z^3\right)=f(x)+[f(y)]^2+[f(z)]^3,\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Kí hiệu $P(x,y,z)$ là phép thế $(x;y;z)$ và phương trình hàm (1).

$$P(0,0,0)\Rightarrow f(0)=f(0)+[f(0)]^2+[f(0)]^3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(0)=0\\f(0)=-1.\end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $f(0)=0$.

$$P(0,0,z)\Rightarrow f\left(z^3\right)=[f(z)]^3,\ \forall z\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

$$P(x,0,z)\Rightarrow f\left(x+z^3\right)=f(x)+[f(z)]^3=f(x)+f\left(z^3\right),\ \forall x,z\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

$$P(0,y,0)\Rightarrow f\left(y^2\right)=[f(y)]^2,\ \forall y\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Do tương ứng $z\mapsto z^3$ là song ánh nên từ (3) suy ra:

$$f(x+z)=f(x)+f(z),\ \forall x,z\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Từ (4), (5) và tương tự như bài toán 2.171 (ở trang 221), ta suy ra:

$$f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Trường hợp 2: $f(0)=-1$.

$$P(0,0,z)\Rightarrow f\left(z^3\right)=[f(z)]^3,\ \forall z\in\mathbb{R}.$$

$$P(0,y,0)\Rightarrow f\left(y^2\right)=[f(y)]^2-2,\ \forall y\in\mathbb{R}.$$

Từ đây suy ra:

$$f\left(x^2\right)=[f(x)]^2-2=[f(-x)]^2-2\Rightarrow[f(-x)]^2=[f(x)]^2,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Tiếp theo ta có:

$$\begin{aligned}P(x,0,z)&\Rightarrow f\left(x+z^3\right)=f(x)+[f(z)]^3+1,\ \forall x,z\in\mathbb{R}.\\&\Rightarrow f\left(x+z^3\right)=f(x)+f\left(z^3\right)+1,\ \forall x,z\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{7}$$

Thay $z=-\sqrt[3]{x}$ vào (7) ta được:

$$-1=f(x)+f(-x)+1\Rightarrow f(-x)=-2-f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{8}$$

Thay (8) vào (6) ta được:

$$\begin{aligned}&[-2-f(x)]^2=[f(x)]^2,\ \forall x\in\mathbb{R}\\\Leftrightarrow&4f(x)+4=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\\\Leftrightarrow&f(x)=-1,\ \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Sau khi thử lại ta kết luận: các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=-1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 2.332. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$[f(x+y)]^2=f\left(x^2\right)+2f(xy)+f\left(y^2\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Kí hiệu $f^2(x)=[f(x)]^2$ và $P(x,y)$ là phép thay $(x;y)$ vào (1).

$$P(0;0)\Rightarrow f^2(0)=4f(0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(0)=0\\f(0)=4.\end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $f(0)=4$.

$$\begin{aligned}P(x,0)&\Rightarrow f^2(x)=f\left(x^2\right)+8+4\Rightarrow f^2(x)=f\left(x^2\right)+12,\ \forall x\in\mathbb{R}\\P(-x,0)&\Rightarrow f^2(-x)=f\left(x^2\right)+12,\ \forall x\in\mathbb{R}\\&\Rightarrow f^2(-x)=f^2(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{2}$$

Tiếp theo, ta có:

$$\begin{aligned}P(x,-x)&\Rightarrow 16=f\left(x^2\right)+2f(-x^2)+f\left(x^2\right)\\&\Rightarrow f\left(x^2\right)+f\left(-x^2\right)=8\Rightarrow f(x)+f(-x)=8,\ \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{3}$$

Thay (3) vào (2), ta được:

$$\begin{aligned}&[8-f(x)]^2=f^2(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\\\Leftrightarrow&16f(x)-64=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\\\Leftrightarrow&f(x)=4,\ \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Thử lại thấy hàm số $f(x)=4,\ \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Trường hợp 2: $f(0)=0$. $P(x,0)\Rightarrow f^2(x)=f\left(x^2\right),\ \forall x\in\mathbb{R}.$ (4)

Từ (4) suy ra: $f(x)\geq 0,\ \forall x\geq 0$.

$$\begin{aligned}P(x,-x)&\Rightarrow f^2(0)=f\left(x^2\right)+2f(-x^2)+f\left(x^2\right)\\&\Rightarrow f\left(x^2\right)+f(-x^2)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\\&\Rightarrow f(x)+f(-x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\\&\Rightarrow f(-x)=-f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Như vậy f là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

- Dễ thấy hàm số $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.
- Tiếp theo ta giả sử $f(x)\not\equiv 0$, khi đó ta chứng minh:

$$f(x)=0\Leftrightarrow x=0. \tag{5}$$

Do $f(0)=0$ nên nếu $x=0$ thì $f(x)=0$. Giả sử $f(x_1)=0$, ta cần chứng minh $x_1=0$. Nếu $x_1\neq 0$ thì:

$$P(x_1,x_1)\Rightarrow f^2(2x_1)=4f\left(x_1^2\right)=4f^2(x_1)=0.$$

Vậy nếu $f(x_1) = 0$ thì $f(2x_1) = 0$. Sử dụng kết quả này liên tiếp ta được:

$$f(2^n x_1) = 0, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Do hàm f không đồng nhất 0 nên tồn tại $x_2 \neq 0$ sao cho $f(x_2) \neq 0$. Ta có $x_2 \neq x_1$ vì nếu $x_2 = x_1$ thì $f(x_2) = f(x_1) = 0$, mâu thuẫn. Từ (1) và (4) suy ra:

$$\begin{aligned} &f^2(x+y) \geq f^2(y), \forall x, y > 0 \\ \Rightarrow &f(x) \geq f(y), \forall x > y > 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Do f là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$ nên không mất tính tổng quát, có thể giả sử: $x_1 > 0$ và $x_2 > 0$. Khi đó $f(x_2) > 0$. Do $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n x_1 = +\infty$ nên tồn tại n đủ lớn sao cho: $2^n x_1 > x_2$, khi đó: $0 = f(2^n x_1) \overset{\text{do (6)}}{\geq} f(x_2) > 0$, vô lí. Vậy $x_1 = 0$ và (5) được chứng minh.

– Tiếp theo ta chứng minh:

$$f(nx) = nf(x), \forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Ta có $n = 0$ thỏa mãn (7). Tiếp theo ta chứng minh nếu $k \in \mathbb{N}$ thỏa mãn (7) thì $k+1$ cũng thỏa mãn (7). Thật vậy:

$$\begin{aligned} P(kx, x) &\Rightarrow f^2\left((k+1)x\right) = f^2\left(kx\right) + 2f(kx^2) + f^2\left(x\right), \forall x > 0 \\ &\Rightarrow f^2\left((k+1)x\right) = k^2 f^2\left(x\right) + 2kf(x^2) + f^2\left(x\right), \forall x > 0 \\ &\Rightarrow f^2\left((k+1)x\right) = \left(k^2 + 2k + 1\right) f^2\left(x\right), \forall x > 0 \\ &\Rightarrow f^2\left((k+1)x\right) = (k+1)^2 f^2\left(x\right), \forall x > 0 \\ &\Rightarrow f\left((k+1)x\right) = (k+1) f(x), \forall x > 0. \end{aligned}$$

Như vậy (7) đúng. Do f là hàm lẻ nên từ (7) suy ra:

$$f(nx) = nf(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

– Chứng minh: $f(q) = q, \forall q \in \mathbb{Q}$. Từ (4), ta có:

$$f^2(1) = f(1) \overset{\text{do (5)}}{\Leftrightarrow} f(1) = 1.$$

Kết hợp với (8), ta được: $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}$.
Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$1 = f(1) = f\left(n.\frac{1}{n}\right) \overset{\text{do (8)}}{\Leftrightarrow} nf\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Giả sử $q \in \mathbb{Q}, q > 0$, khi đó $q = \dfrac{m}{n}$, với $m \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$. Sử dụng (8) ta được: $f(q) = f\left(m.\dfrac{1}{n}\right) = mf\left(\dfrac{1}{n}\right) = m.\dfrac{1}{n} = \dfrac{m}{n} = q$.

Như vậy: $f(q) = q, \forall q \in \mathbb{Q}, q > 0$. (9)
Với p là số hữu tỉ âm, ta có:

$$f(p) = f\left(-(-p)\right) = -f(-p) \overset{\text{do (9)}}{=} -(-p) = p. \tag{10}$$

Từ (9), (10) và $f(0) = 0$ suy ra: $f(q) = q, \forall q \in \mathbb{Q}$. (11)

– Chứng minh f là hàm tăng trên $\mathbb{R}$. Từ (6) suy ra hàm f tăng trên $(0; +\infty)$. Với $x, y \in (-\infty; 0)$, $x > y$, khi đó:

$$-x < -y \overset{\text{do (6)}}{\Rightarrow} f(-x) < f(-y) \Rightarrow -f(x) < -f(y) \Rightarrow f(x) > f(y).$$

Như vậy f tăng trên $(-\infty; 0)$. Kết hợp với $f(0) = 0$ và (6) suy ra f tăng trên $\mathbb{R}$.

– Cuối cùng, từ (11) suy ra công thức của hàm f trên $\mathbb{R}$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, khi đó tồn tại hai dãy số hữu tỉ (p_n), (q_n) sao cho:

$$p_n \leq x \leq q_n, \forall n = 1, 2, \ldots; \lim_{n \to +\infty} p_n = \lim_{n \to +\infty} q_n = x.$$

Do f tăng trên $\mathbb{R}$ và do (11) nên:

$$\begin{aligned} &f(p_n) \leq f(x) \leq f(q_n), \forall n = 1, 2, \ldots \\ \Rightarrow &p_n \leq f(x) \leq q_n, \forall n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{12}$$

Từ (12) cho $n \to +\infty$ và sử dụng nguyên lí kẹp, ta được: $f(x) = x$.
Vậy: $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Kết luận: các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R};\ f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R};\ f(x) = 4, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lưu ý. Việc dự đoán hàm thỏa mãn yêu cầu đề bài là khá dễ dàng. Tuy nhiên ở Trường hợp 2, có một điều thú vị là ta không suy ra f cộng tính, nhưng lại có tính chất của hàm cộng tính, đó là $f(nx) = nf(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ và từ đó suy ra kết quả bài toán. Qua đây, cho ta một kinh nghiệm, nếu không suy ra "tính chất" nào đó của hàm f thì hãy thử đi tìm những tính chất khác có mối quan hệ mật thiết với "tính chất" mà mình cần.

Chương 3

Phương trình hàm đa thức

Phương trình hàm đa thức là một dạng toán khó. Để giải được các phương trình hàm loại này, chúng ta cần nắm rõ không những các kỹ thuật giải phương trình hàm mà còn cả các tính chất và các đặc trưng cơ bản của đa thức như nghiệm, hệ số, bậc, tính liên tục, tính hữu hạn nghiệm, tính khả vi... Phương trình hàm đa thức còn được đề cập ở bài 5.4: Sử dụng dãy số trong phương trình hàm đa thức và một số bài toán khác. Bạn đọc hãy xem thêm các bài toán 5.50, 5.52, 5.53, 5.54... ở chương 5.

Quy ước. Trong toàn bộ chương này và các bài toán liên quan đến đa thức ở các chương khác, khi cho đa thức nếu không có giả thiết gì thêm thì ta hiểu đó là đa thức hệ số thực. Bậc của đa thức $P(x)$ được kí hiệu là $\deg(P)$ hoặc $\deg P$

Kí hiệu. Để nói rằng $f(x)$ là đa thức có hệ số thuộc $\mathbb{K}$, ta kí hiệu: $f(x) \in \mathbb{K}[x]$. Vậy ta có quan hệ $\mathbb{N}[x] \subset \mathbb{Z}[x] \subset \mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}[x]$.

3.1 Đa thức xác định bởi phép biến đổi đối số

Trong bài này, các kỹ thuật giải phương trình hàm đã được trình bày ở các chương trước sẽ được sử dụng ở đây. Sau đây là một số kiến thức về đa thức thường dùng.

- Nếu đa thức $P(x)$ thỏa mãn $P(x) = P(x+a), \forall x \in \mathbb{R}$ (với a là một hằng số khác không nào đó) thì $P(x) \equiv c$ (với c là hằng số tùy ý).
- Nếu đa thức $P(x)$ có vô số nghiệm thì $P(x) \equiv 0$, tức là $P(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, nói riêng, nếu số nghiệm của đa thức $P(x)$ lớn hơn $\deg(P)$ thì

$$P(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Kĩ thuật tìm đa thức dựa trên phép biến đổi đối số và biến đổi đa thức đã được đề cập trong các bài toán 1.39 ở trang 24, bài toán 1.75 ở trang 46, bài toán 1.76 ở trang 46, bài toán 1.69 ở trang 42.

Bài toán 3.1. *Hãy tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn:*

$$P(x+2011) = P(x+2009) + 70, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) thay x bởi $x - 2009$ được $P(x+2) = P(x) + 70, \forall x \in \mathbb{R}$. (2)
Đặt $P(x) = 35x + G(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $G(x) \in \mathbb{R}[x]$. Thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned} &35(x+2) + G(x+2) = 35x + G(x) + 70, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &G(x+2) = G(x), \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &G(x) = c, \forall x \in \mathbb{R} \ (c \text{ là hằng số bất kì}). \end{aligned}$$

Vậy $f(x) = 35x + c, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Tất cả các đa thức thỏa mãn đề bài là

$$P(x) = 35x + c, \forall x \in \mathbb{R} \ (c \text{ là hằng số bất kì}).$$

Cách khác. Đặt $P(0) = 2c$. Trong (2) lấy $x = 0, 2, 4, 6, \ldots, 2n$ ta được

$$\begin{cases} P(2) = P(0) + 70 \\ P(4) = P(2) + 70 \\ P(6) = P(4) + 70 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P(2n) = P(2n-2) + 70 \end{cases} \Rightarrow P(2n) = P(0) + 70n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra $P(n) = 35n + c, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Bởi vậy đa thức $P(x) - 35x - c$ có vô số nghiệm. Suy ra $P(x) - 35x - c \equiv 0$. Hay $P(x) = 35x + c, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 3.2. *Tìm tất cả các đa thức thỏa mãn:*

$$P(x+1) = P(x) + 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Đặt $P(x) = G(x) + x^2$. Khi đó $G(x)$ cũng là đa thức hệ số thực. Thay vào (1) ta được $G(x+1) = G(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy $G(x) \equiv c$ (hằng số). Suy ra

$$P(x) = x^2 + c, \forall x \in \mathbb{R} \ (\text{với } c \text{ là hằng số tùy ý}).$$

Thử lại thấy thỏa mãn.
Cách khác. Đặt $P(1) = c$. Trong (1) lần lượt lấy $x = 1, 2, 3, \ldots, m$ ta được

$$\begin{cases} P(2) = P(1) + 3 \\ P(3) = P(2) + 5 \\ \ldots\ldots\ldots \\ P(m+1) = P(m) + 2m + 1 \end{cases} \Rightarrow P(m+1) = P(1) + (3 + 5 + \cdots + 2m + 1).$$

Suy ra $P(m+1) = c + (m+1)^2, \forall m = 1, 2, \ldots$, từ đó $P(x) = c + x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy tất cả các đa thức cần tìm là

$$P(x) = x^2 + c, \forall x \in \mathbb{R} \ (\text{với } c \text{ là hằng số tùy ý}).$$

Bài toán 3.3. *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện*

$$(x-1)P(x-1)-(x+2)P(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) lần lượt lấy $x=1$, $x=2$,..., $x=n$ ($n\in\mathbb{Z}, n>3$), ta được $x=1$, $x=2$,..., $x=n$ là nghiệm của $P(x)$. Vậy $P(x)$ có vô số nghiệm nên $P(x)\equiv 0$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 3.4. *Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn điều kiện*

$$xP(x-4)=(x-2016)P(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) lần lượt thay x bởi 0, 4, 8,..., 2016 ta suy ra 0, 4, 8,..., 2012 là nghiệm của $P(x)$. Đặt $P(x)=x(x-4)(x-8)\ldots(x-2012)Q(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $Q(x)$ cũng là đa thức và thay vào (1) được

$$Q(x-4)=Q(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0,4,8,...,2016\}.$$

Suy ra $Q(x)$ là đa thức hằng, do đó:

$$P(x)=Cx(x-4)(x-8)\ldots(x-2012),\ \forall x\in\mathbb{R}\ (C \text{ là hằng số}).$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 3.5. *Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn điều kiện*

$$xP(x-4)=(x-2015)P(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) lần lượt thay x bởi 2015, 2011,..., $2015-4n$ ta suy ra

$$2011, 2007, ..., 2015-4(n+1)$$

là nghiệm của $P(x)$. Vậy $P(x)$ có vô số nghiệm, suy ra $P(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Lưu ý. Sự khác nhau cơ bản của bài toán 3.4 và bài toán 3.5 là:

$$\frac{2016}{4}\in\mathbb{N}^*, \frac{2015}{4}\notin\mathbb{N}^*.$$

Bài toán 3.6. *Cho số nguyên dương k. Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn điều kiện:* $(x-2015)^kP(x)=(x-2016)^kP(x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. (1)

Giải. Từ (1) lấy $x=2016$ ta được $P(2016)=(2016-2016)^kP(2017)$, suy ra 2016 là nghiệm bội lớn hơn hoặc bằng k của $P(x)$. Đặt

$$P(x)=(x-2016)^kQ(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Khi đó $Q(x)$ là đa thức thỏa mãn

$$(x-2015)^k(x-2016)^kQ(x)=(x-2016)^k(x-2015)^kQ(x+1),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Hay $Q(x)=Q(x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, nghĩa là $Q(x)$ là đa thức hằng số. Thử lại ta thấy đa thức $P(x)\equiv C(x-2016)^k$ (C là hằng số) thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài toán 3.7 (Olympic Moldova-2004). *Tìm đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$, thỏa mãn:*

$$(x^3+3x^2+3x+2)P(x-1)=(x^3-3x^2+3x-2)P(x), \forall x\in\mathbb{R}.$$

Giải. Trước hết ta tìm các nghiệm của đa thức $P(x)$. Từ giả thiết ta có

$$(x+2)(x^2+x+1)P(x-1)=(x-2)(x^2-x+1)P(x), \forall x\in\mathbb{R}.$$

Từ đây chọn $x=-2$ suy ra $P(-2)=0$, chọn $x=-1$ suy ra $P(-1)=0$ (do theo trên ta có $P(-2)=-9P(-1)$), chọn $x=0$ suy ra $P(0)=0$, chọn $x=1$ suy ra $P(1)=0$. Vậy $P(x)=x(x-1)(x+1)(x+2)Q(x)$, với $Q(x)$ là đa thức hệ số thực. Tiếp theo thay $P(x)$ vào đẳng thức ở đề bài ta được

$$\begin{aligned}&[(x+2)(x^2+x+1)](x-1)(x-2)x(x+1)Q(x-1)\\ =&[(x-2)(x^2-x+1)]x(x-1)(x+1)(x+2)Q(x), \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}&(x^2+x+1)Q(x-1)=(x^2-x+1)Q(x), \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1,1,-2,2\}\\ \Leftrightarrow&\frac{Q(x-1)}{x^2-x+1}=\frac{Q(x)}{x^2+x+1}, \forall x\neq 0, x\neq 1, x\neq -1, x\neq 2, x\neq -2\\ \Leftrightarrow&\frac{Q(x-1)}{(x-1)^2+(x-1)+1}=\frac{Q(x)}{x^2+x+1}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1,1,-2,2\}.\end{aligned}$$

Đặt $R(x)=\dfrac{Q(x)}{x^2+x+1}$, ta có

$$R(x)=R(x-1), \forall x\neq 0, x\neq 1, x\neq -1, x\neq 2, x\neq -2.$$

Suy ra $R(x)\equiv C$ (hằng số), vậy $Q(x)\equiv C(x^2+x+1)$. Do đó

$$P(x)=C(x^2+x+1)x(x-1)(x+1)(x+2), \forall x\in\mathbb{R}.$$

Thử lại:

$$\begin{aligned}&(x+2)(x^2+x+1)C(x^2-x+1)(x-1)(x-2)x(x+1)\\ =&(x-2)(x^2-x+1)C(x^2+x+1)x(x-1)(x+1)(x+2) \text{ (thỏa mãn)}.\end{aligned}$$

Lưu ý. Từ cách giải trên ta dễ dàng sáng tác được các bài toán có lời giải tương tự (xem bài 3.6 ở trang 426).

Bài toán 3.8 (Dề nghị thi Olympic 30/4/2010). *Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn:* $(x+4)P(x)+2x=xP(x+2)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. (1)

Hướng dẫn. Đặt $P(x) = Q(x) + ax$, thay vào (1) được

$$(x+4)\,[Q(x)+ax] + 2x = x\,[Q(x+2) + a(x+2)],\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ (2) suy ra cần chọn hằng số a sao cho

$$\begin{aligned}&(x+4)\,ax + 2x = ax\,(x+2),\ \forall x \in \mathbb{R}\\ \Leftrightarrow &ax^2 + (4a+2)x = ax^2 + 2ax,\ \forall x \in \mathbb{R}\\ \Leftrightarrow &4a + 2 = 2a \Leftrightarrow 2a \Rightarrow -2 \Leftrightarrow a = -1.\end{aligned}$$

Vậy nếu đặt $P(x) = Q(x) - x,\ \forall x \in \mathbb{R}$, thay vào (1) được

$$(x+4)\,Q(x) = xQ(x+2),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Đến đây ta làm tương tự như bài toán 3.3 hoặc 3.4 hoặc 3.5.

Bài toán 3.9. *Tìm các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn điều kiện:*

$$P(x)P(x+3) = P(x+1)P(x+2),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Hướng dẫn. Dễ thấy đa thức hằng số thỏa mãn yêu cầu bài toán. Giả sử đa thức $P(x)$ (với $\deg P \geq 1$) thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Đặt S là tập tất cả các nghiệm (kể cả nghiệm phức) của $P(x)$, khi đó S là tập hữu hạn và $S \neq \emptyset$. Giả sử $z \in S$. Do $P(z) = 0$ nên trong (1) lấy $x = z$ ta được

$$P(z+1)P(z+2) = 0.$$

Suy ra $(z+1) \in S$ hoặc $(z+2) \in S$. Lập luận tương tự dẫn đến S là tập vô hạn, vô lí.

Bài toán 3.10. *Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn điều kiện*

$$P(xy) = P(x)P(y),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Dễ thấy đa thức $P(x) \equiv 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Tiếp theo xét $P(x) \not\equiv 0$. Giả sử $\deg(P) = n \geq 0$. Trong (1) cho $x = y = 0$ ta được

$$P(0) = [P(0)]^2 \Leftrightarrow P(0) \in \{0, 1\}.$$

- Nếu $P(0) = 1$ thì từ (1) lấy $y = 0$ ta nhận được $P(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $P(0) = 0$ thì $P(x) = xQ(x)$, với $Q(x)$ là đa thức có bậc nhỏ hơn $\deg(P)$ một đơn vị. Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&xyQ(xy) = xyQ(x)Q(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}\\ \Leftrightarrow &Q(xy) = Q(x)Q(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

(do từ $Q(xy) = Q(x)Q(y),\ \forall x \neq 0, y \neq 0$, suy ra $Q(xy) - Q(x)Q(y) \equiv 0$). Sử dụng kết quả ở trên ta được $Q(x) \equiv 1$ hoặc $Q(x) \equiv xQ_1(x)$, với $Q_1(x)$ là đa thức thỏa mãn $\deg(Q_1) = \deg(Q) - 1$ và

$$Q_1(xy) = Q_1(x)Q_1(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Vì bậc của đa thức khác không, cho trước là hữu hạn nên tiếp tục quá trình trên sau hữu hạn bước ta thu được $P(x) \equiv 1$ hoặc $P(x) \equiv x^n$. Sau khi thử lại ta kết luận: Các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$P(x) \equiv 0,\ P(x) \equiv 1,\ P(x) \equiv x^n\ (n \in \mathbb{N}^*).$$

Bài toán 3.11. *Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn điều kiện*

$$P(u^2 - v^2) = P(u+v)P(u-v),\ \forall u, v \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Hướng dẫn. Đặt $x = u + v$, $y = u - v$. Thay vào phương trình (1) ta được $P(xy) = P(x)P(y),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Sau đó sử dụng bài toán 3.10.

Bài toán 3.12 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2012). *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực và thỏa mãn điều kiện*

$$[P(x)]^2 - 2 = 2P(2x^2 - 1),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử $P(x)$ không phải là đa thức hằng. Đặt $P(1) = a$. Trong (1) lấy $x = 1$ ta được $a^2 - 2a - 2 = 0$. Giả sử $P(x) = (x-1)P_1(x) + a,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&(x-1)^2[P_1(x)]^2 + 2a(x-1)P_1(x) + a^2 - 2 = 2\left[\left(2x^2-2\right)P_1\left(2x^2-1\right) + a\right]\\ \Leftrightarrow &(x-1)^2[P_1(x)]^2 + 2a(x-1)P_1(x) = 2\left[\left(2x^2-2\right)P_1\left(2x^2-1\right)\right]\\ \Rightarrow &(x-1)[P_1(x)]^2 + 2aP_1(x) = 4(x+1)P_1\left(2x^2-1\right),\ \forall x \neq 1. \qquad (2)\end{aligned}$$

Do hàm đa thức $P_1(x)$ liên tục nên từ (2) cho $x \to 1$ ta được

$$2aP_1(1) = 8P_1(1) \Leftrightarrow P_1(1) = 0\ (\text{do } 2a \neq 8).$$

Từ đó $P_1(x) = (x-1)P_2(x)$. Dẫn tới $P(x) = (x-1)^2P_2(x) + a,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&(x-1)^4[P_2(x)]^2 + 2a(x-1)^2P_2(x) = 2\left[\left(2x^2-2\right)^2P_2\left(2x^2-1\right)\right]\\ \Rightarrow &(x-1)^2[P_2(x)]^2 + 2aP_2(x) = 8(x+1)^2P_2\left(2x^2-1\right),\ \forall x \neq 1. \qquad (3)\end{aligned}$$

Do hàm đa thức $P_2(x)$ liên tục nên từ (3) cho $x \to 1$ ta được

$$2aP_2(1) = 32P_2(1) \Leftrightarrow P_2(1) = 0\ (\text{do } 2a \neq 32).$$

Từ đó $P_2(x) = (x-1)P_3(x)$. Dẫn tới $P(x) = (x-1)^3 P_3(x) + a,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Tiếp tục như trên ta được: $P(x) = (x-1)^n Q(x) + a,\ \forall x \in \mathbb{R}\ (Q(1) \neq 0)$.
Thay vào (1) ta được:

$$(x-1)^{2n}[Q(x)]^2 + 2a(x-1)^n Q(x) = 2\left[\left(2x^2-2\right)^n Q\left(2x^2-1\right)\right]$$
$$\Rightarrow (x-1)^n [Q(x)]^2 + 2aQ(x) = 2^{n+1}(x+1)^n Q\left(2x^2-1\right),\ \forall x \neq 1. \quad (4)$$

Do hàm đa thức $Q(x)$ liên tục nên từ (4) cho $x \to 1$ ta được

$$2aQ(1) = 2^{2n+1}Q(1) \Leftrightarrow Q(1) = 0\ \left(\text{do } 2a \neq 2^{2n+1}\right).$$

Đến đây ta gặp mâu thuẫn. Vậy $P(x)$ là đa thức hằng: $P(x) \equiv a$. Thay vào (1) suy ra kết luận: Có hai đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$P(x) = 1 + \sqrt{3},\ \forall x \in \mathbb{R}\ ;\ P(x) = 1 - \sqrt{3},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

3.2 Sử dụng tính chất nghiệm và so sánh bậc

Sau đây là một số lưu ý khi giải toán:

- Đa thức $P(x)$ nhận số a làm nghiệm khi và chỉ khi $P(a) = 0$.
- Đa thức $P(x)$ có $\deg(P) \geq 1$ chỉ có hữu hạn nghiệm.
- Nếu phân số tối giản $\frac{p}{q}$ (tức là $p, q \in \mathbb{Z}, (p,q) = 1$) là nghiệm của đa thức với hệ số nguyên $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ thì q là ước của a_n và p là ước của a_0. Đặc biệt nếu $a_n = \pm 1$ thì nghiệm hữu tỉ đó là nguyên.
- Nếu đa thức $P(x)$ có vô số nghiệm thì $P(x) \equiv 0$, tức là $P(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, nói riêng, nếu số nghiệm của đa thức $P(x)$ lớn hơn $\deg(P)$ thì

$$P(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Mọi đa thức bậc lẻ đều có nghiệm thực.
- Xét đa thức hệ số nguyên $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Nếu a, b là các số nguyên (hoặc hữu tỉ) và $\sqrt{c}$ là số vô tỉ thì $P(a \pm b\sqrt{c})$ có dạng $P(a + b\sqrt{c}) = k + m\sqrt{c}$ và $P(a - b\sqrt{c}) = k - m\sqrt{c}$, trong đó k, m là các số nguyên (hoặc hữu tỉ). Đặc biệt nếu $P(x)$ có nghiệm là $x = a + b\sqrt{c}$ thì nó cũng có cả nghiệm $x = a - b\sqrt{c}$ (cách chứng minh như sau: chứng minh bằng quy nạp rằng nếu $(a + b\sqrt{c})^n = d + e\sqrt{c}$ thì $(a - b\sqrt{c})^n = d - e\sqrt{c}$, trong đó a, b, d, e là các số nguyên (hoặc hữu tỉ), $n \in \mathbb{N}^*$. Sau đó thay vào $P(x)$).

Bài toán 3.13 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2002). *Tìm đa thức không đồng nhất không, bậc nhỏ nhất có hệ số nguyên nhận $1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ làm nghiệm.*

Giải. Từ

$$x = 1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \Rightarrow x\left(1 + \sqrt[3]{2}\right) = 1 + \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 3 \Rightarrow x\sqrt[3]{2} = 3 - x$$
$$\Rightarrow 2x^3 = (3-x)^3 = 27 - 27x + 9x^2 - x^3 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 9x - 9 = 0.$$

Vậy $1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ là nghiệm của đa thức bậc ba hệ số nguyên

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 9.$$

Nếu $f(x)$ có nghiệm hữu tỉ thì $f(x)$ có nghiệm nguyên là ước của 9. Các số ± 1, ± 3, ± 9 không là nghiệm của $f(x)$, do đó $f(x)$ không có nghiệm hữu tỉ và $1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ là số vô tỉ. Dẫn tới $1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ không là nghiệm của đa thức bậc nhất có hệ số nguyên. Giả sử $1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ là nghiệm của đa thức bậc hai $g(x)$ với hệ số nguyên. Chia $f(x)$ cho $g(x)$, giả sử được là

$$f(x) = g(x).q(x) + r(x), \text{với } \deg(r) < 2.$$

Vì $f(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) = 0$ nên $r(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) = 0$, do đó $r(x) \equiv 0$. Bởi vậy $f(x) = g(x).q(x)$, với $q(x)$ là đa thức có bậc 1 và có hệ số hữu tỉ. Suy ra $f(x)$ có nghiệm hữu tỉ, điều này mâu thuẫn với $f(x)$ không có nghiệm hữu tỉ. Vậy $f(x)$ là đa thức bậc nhỏ nhất có hệ số nguyên nhận $1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ làm nghiệm.

Lưu ý. Qua lời giải trên ta còn thu được phương pháp chứng minh một số nào đó là số vô tỉ.

Bài toán 3.14. *Tìm đa thức hệ số nguyên có bậc nhỏ nhất nhận $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ làm một trong các nghiệm của nó.*

Giải. Từ

$$x = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow (x-1) - \sqrt{2} = \sqrt{3} \Rightarrow (x-1)^2 - 2\sqrt{2}(x-1) + 2 = 3$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x = 2\sqrt{2}(x-1) \Rightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 8(x^2 - 2x + 1)$$
$$\Rightarrow x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x - 8 = 0.$$

Vậy đa thức $Q(x) = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x - 8$ là đa thức hệ số nguyên nhận $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ làm nghiệm và dễ thấy rằng $\deg(Q) = 4$. Giả sử $P(x)$ là một đa thức hệ số nguyên nhận $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ làm nghiệm. Bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được biểu diễn sau

$$(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^k = a_k + b_k\sqrt{2} + c_k\sqrt{3} + d_k\sqrt{6}, \forall k = 1, 2, \ldots$$

trong đó a_k, b_k, c_k, d_k là các số nguyên. Khi đó vẫn dựa vào nguyên lí quy nạp ta có

$$\begin{cases} (1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})^k = a_k - b_k\sqrt{2} + c_k\sqrt{3} - d_k\sqrt{6} \\ (1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})^k = a_k + b_k\sqrt{2} - c_k\sqrt{3} - d_k\sqrt{6} \\ (1 - \sqrt{2} - \sqrt{3})^k = a_k - b_k\sqrt{2} - c_k\sqrt{3} + d_k\sqrt{6}. \end{cases}$$

Bởi vậy tồn tại các số nguyên A, B, C, D sao cho

$$P(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) = A + B\sqrt{2} + C\sqrt{3} + D\sqrt{6}$$

và khi đó

$$P(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}) = A - B\sqrt{2} + C\sqrt{3} - D\sqrt{6}$$
$$P(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}) = A + B\sqrt{2} - C\sqrt{3} - D\sqrt{6}$$
$$P(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}) = A - B\sqrt{2} - C\sqrt{3} + D\sqrt{6}.$$

Ta có $P(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 0 = 0 + 0.\sqrt{2} + 0.\sqrt{3} + 0\sqrt{6}$, do đó

$$P(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 0 - 0.\sqrt{2} + 0.\sqrt{3} - 0\sqrt{6} = 0$$
$$P(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}) = 0 + 0.\sqrt{2} - 0.\sqrt{3} - 0\sqrt{6} = 0$$
$$P(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}) = 0 - 0.\sqrt{2} - 0.\sqrt{3} + 0\sqrt{6} = 0.$$

Vậy $P(x)$ có ít nhất bốn nghiệm, do đó $\deg(P) \geq 4$. Vậy $Q(x)$ chính là đa thức hệ số nguyên có bậc nhỏ nhất và nhận $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ làm nghiệm.

Bài toán 3.15 (HSG Quốc gia năm 1997-bảng B). *Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ với hệ số hữu tỉ có bậc nhỏ nhất mà $f(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) = 3+\sqrt[3]{9}$.*

Giải. Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:
Bổ đề. Nếu $u, v \in \mathbb{Q}$ và $s = u\sqrt[3]{3} + v\sqrt[3]{9} \in \mathbb{Q}$ thì $u = v = 0$.
Chứng minh bổ đề. Giả sử phản chứng u và v không đồng thời bằng 0. Khi ấy giả sử $u \neq 0$ (nếu không thì lí luận hoàn toàn tương tự). Từ

$$x = \sqrt[3]{3} = \frac{s - v\sqrt[3]{9}}{u} \Rightarrow ux - s = -v\sqrt[3]{9} \overset{\text{do } x=\sqrt[3]{3}}{=\!=} -vx^2 \Rightarrow vx^2 + ux - s = 0.$$

Do đó đa thức $R(x) = vx^2 + ux - s$ nhận $\sqrt[3]{3}$ làm nghiệm. Xét đa thức $G(x) = x^3 - 3$. Ta thấy rằng $G(x)$ không có nghiệm hữu tỉ và $G(\sqrt[3]{3}) = 0$. Thực hiện phép chia $G(x)$ cho $R(x)$ ta có

$$G(x) = h(x)R(x) + r(x) \text{ (ở đây } \deg(r) < \deg(R)).$$

Trường hợp 1. $r(x) \equiv 0$, khi đó $G(x) = h(x)R(x)$. Vì $\deg(G) = 3, \deg(R) = 2$ nên suy ra $\deg(h) = 1$. Vì u, v, s là các số hữu tỉ nên $G(x), R(x)$ là các đa thức hệ số hữu tỉ, do đó $h(x)$ cũng là đa thức hệ số hữu tỉ. Hơn nữa từ $\deg(h) = 1$ suy ra $h(x)$ có nghiệm hữu tỉ. Bởi vậy $G(x)$ cũng có nghiệm hữu tỉ, điều này mâu thuẫn với $G(x)$ không có nghiệm hữu tỉ. Do đó trường hợp này không xảy ra.
Trường hợp 2. $r(x) \not\equiv 0$. Nếu $r(x) \equiv c \neq 0$ (c là hằng số) thì

$$G(\sqrt[3]{3}) = h(\sqrt[3]{3})R(\sqrt[3]{3}) + c \Rightarrow c = 0 \,(\text{do } G(\sqrt[3]{3}) = R(\sqrt[3]{3}) = 0).$$

Do đó $r(x) \equiv 0$, vô lí. Bởi vậy $\deg(r) = 1$, suy ra $r(x) = ax + b$. Do $G(x), R(x)$ thuộc $\mathbb{Q}[x]$ nên $h(x), r(x)$ cũng là các đa thức hệ số hữu tỉ. Ta có

$$r(\sqrt[3]{3}) = G(\sqrt[3]{3}) - h(\sqrt[3]{3})R(\sqrt[3]{3}) = 0$$

nghĩa là $\sqrt[3]{3}$ là nghiệm vô tỉ của đa thức bậc nhất $r(x)$ với hệ số hữu tỉ. Điều vô lí này chứng tỏ trường hợp này cũng không xảy ra. Tóm lại giả thiết phản chứng là sai. Vậy bổ đề được chứng minh. Trở lại bài toán đang xét. Dễ thấy đa thức đồng nhất 0 không thỏa mãn các yêu cầu của đề bài. Xét khi $f(x) \equiv c$ (c là hằng số hữu tỉ). Từ $f(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) = 3+\sqrt[3]{9}$ suy ra $c = 3+\sqrt[3]{9} \Rightarrow c-3 = \sqrt[3]{9}$, điều này mâu thuẫn với $c-3$ là số hữu tỉ. Xét khi $f(x)$ là đa thức bậc nhất: $f(x) = ax + b$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Từ

$$f(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) = 3+\sqrt[3]{9} \Rightarrow 3+\sqrt[3]{9} = a(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) + b$$

ta có $(a-1)\sqrt[3]{9} + a\sqrt[3]{3} = 3-b$. Do $3-b \in \mathbb{Q}$ nên theo bổ đề suy ra $a-1 = 0$ và $a = 0$. Điều vô lí này chứng tỏ không tồn tại đa thức bậc nhất với hệ số hữu tỉ thỏa mãn đề bài. Xét khi $f(x)$ là đa thức bậc hai với hệ số hữu tỉ: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Từ giả thiết suy ra

$$f(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) = 3+\sqrt[3]{9} \Rightarrow a(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})^2 + b(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) + c = 3+\sqrt[3]{9}$$
$$\Rightarrow a(\sqrt[3]{9} + 6 + 3\sqrt[3]{3}) + b(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) + c = 3+\sqrt[3]{9}$$
$$\Rightarrow (3a+b)\sqrt[3]{3} + (a+b-1)\sqrt[3]{9} = 3-c-6a.$$

Vì $3-c-6a, 3a+b, a+b-1$ là các số hữu tỉ nên theo bổ đề suy ra

$$\begin{cases} 3a+b=0 \\ a+b-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow (a;b) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

và khi đó $3-c-6a = 0 \Leftrightarrow c = 3-6a \Rightarrow c = 6$. Vậy tồn tại duy nhất đa thức bậc hai $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 6$, $\forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu của đề bài.

Bài toán 3.16 (HSG Quốc gia 1997-bảng A). *Thực hiện các yêu cầu sau:*
a) Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ với hệ số hữu tỉ có bậc nhỏ nhất mà

$$f(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) = 3+\sqrt[3]{3}$$

b) Tồn tại hay không đa thức $f(x)$ với hệ số nguyên mà

$$f(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) = 3+\sqrt[3]{3}?$$

Hướng dẫn giải.
a) Tương tự như bài toán 3.15 ta được kết quả: có duy nhất một đa thức thỏa mãn đề bài là $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$.

b) Đặt $\alpha = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} \Rightarrow \alpha^3 = 3 + 9 + 3\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9}\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right) = 12 + 9\alpha$. Như vậy đa thức $g(x) = x^3 - 9x - 12$ nhận α làm nghiệm. Nếu $f(x)$ là đa thức hệ số nguyên thỏa mãn đề bài thì $f(x) = g(x)h(x) + r(x)$, với $h(x), r(x)$ là các đa thức hệ số nguyên với $\deg(r) < 3$. Vì $g(\alpha) = 0$ nên

$$r(\alpha) = f(\alpha) = 3 + \sqrt[3]{3},$$

điều này không thể xảy ra (nếu tiến hành giải câu a) sẽ thấy được điều này). Vậy không tồn tại đa thức $f(x)$ với hệ số nguyên mà $f(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) = 3 + \sqrt[3]{3}$.

Bài toán 3.17. *Cho p là số hữu tỉ và không là lập phương của số hữu tỉ. Đặt $\alpha = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{p^2}$. Hãy tìm đa thức khác đa thức không, có bậc bé nhất, có hệ số hữu tỉ, nhận α làm nghiệm.*

Hướng dẫn. Tiến hành tương tự như chứng minh bổ đề trong bài toán 3.15, ta chứng minh được bổ đề sau: Nếu $\alpha \in \mathbb{Q}, \beta \in \mathbb{Q}$ và $\alpha\sqrt[3]{p} + \beta\sqrt[3]{p^2} \in \mathbb{Q}$ thì $\alpha = \beta = 0$.

Bài toán 3.18. *Tìm đa thức không đồng nhất không với hệ số nguyên có bậc nhỏ nhất nhận $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ là nghiệm.*

Giải. Từ

$$\begin{aligned} x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} &\Rightarrow (x - \sqrt{2})^3 = 3 \Rightarrow x^3 - 3x^2\sqrt{2} + 6x - 2\sqrt{2} = 3 \\ &\Rightarrow (x^3 + 6x - 3)^2 = 2(3x^2 + 2)^2 \\ &\Rightarrow x^6 + 36x^2 + 9 + 12x^4 - 6x^3 - 36x = 18x^4 + 24x^2 + 8 \\ &\Rightarrow x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1 = 0. \end{aligned}$$

Vậy $Q(x) = x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1$ là đa thức hệ số nguyên không đồng nhất 0 và nhận $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ làm nghiệm. Dễ thấy $\deg(Q) = 6$. Giả sử có một đa thức có bậc không lớn hơn 5 với hệ số nguyên

$$G(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

cũng nhận $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ làm nghiệm. Ta có

$$\begin{aligned} G(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}) = a_5(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^5 + a_4(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^4 \\ + a_3(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^3 + a_2(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^2 + a_1(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}) + a_0 = 0. \end{aligned}$$

Thực hiện phép khai triển và rút gọn ta được

$$b_0 + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt[3]{3} + b_3\sqrt[3]{9} + b_4\sqrt{2}\sqrt[3]{3} + b_5\sqrt{2}\sqrt[3]{9} = 0, \quad (1)$$

trong đó

$$b_0 = a_0 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 50a_5, \quad b_1 = a_1 + 2a_3 + 12a_4 + 4a_5$$

$$b_2 = a_1 + 6a_3 + 3a_4 + 20a_5, \quad b_3 = 3a_2 + 12a_4 + 3a_5$$
$$b_4 = 2a_2 + 8a_4 + 15a_5, \quad b_5 = 3a_3 + 20a_5.$$

Vì $a_i \in \mathbb{Z}, \forall i = \overline{0,5}$ nên b_i cũng là số nguyên, $\forall i = \overline{0,5}$. Từ (1) ta suy ra $b_i = 0, \forall i = \overline{0,5}$, do đó thay vào hệ trên được $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$. Vậy $Q(x)$ là đa thức đồng nhất không, do đó mọi đa thức không đồng nhất không, có bậc bé hơn hoặc bằng 5 không thể nhận $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ làm nghiệm. Vậy $Q(x)$ chính là đa thức cần tìm.

Lưu ý. Rõ ràng cách giải trên là dài dòng nhưng có ý tưởng tự nhiên nhất.

Bài toán 3.19 (Albanian TST 2009). *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ khác đa thức không, có hệ số không âm và thỏa mãn*

$$P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) \le [P(1)]^2, \ \forall x > 0. \quad (*)$$

Giải. Giả sử $P(x) = a_dx^d + \cdots + a_1x + a_0$ là đa thức thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Khi đó $a_i \ge 0, \forall i = \overline{0,d}$. Với mọi $x > 0$, theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned} P(x)P(x^{-1}) &= (a_dx^d + \cdots + a_1x + a_0)(a_dx^{-d} + \cdots + a_1x^{-1} + a_0) \\ &\ge (a_d + \cdots + a_1 + a_0)^2 = [P(1)]^2. \end{aligned}$$

Kết hợp với giả thiết $(*)$ ta được

$$P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) = [P(1)]^2, \ \forall x > 0$$

$$\Leftrightarrow (a_dx^d + \cdots + a_1x + a_0)(a_dx^{-d} + \cdots + a_1x^{-1} + a_0) = [P(1)]^2, \ \forall x > 0$$

$$\Leftrightarrow (a_dx^d + \cdots + a_1x + a_0)(a_d + \cdots + a_1x^{d-1} + a_0x^d) = [P(1)]^2x^d, \ \forall x > 0.$$

Từ đây, so sánh hệ số của $x^{d+1}, x^{d+2}, \ldots, x^{2d}$ ở hai vế ta được

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{d-1} = 0.$$

Vậy $P(x) = a_dx^d, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại, ta thấy đa thức $P(x) = a_dx^d, \forall x \in \mathbb{R}$ (với $a_d > 0$) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 3.20 (CentroAmerican Olympiad 2008). *Tìm tất cả các đa thức $p(x)$ hệ số thực thỏa mãn: $p(1) = 210$ và*

$$(x + 10)\,p(2x) = (8x - 32)\,p(x + 6), \ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Từ giả thiết suy ra $p(x)$ không thể là đa thức hằng. Giả sử:

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, a_n \ne 0.$$

So sánh hệ số của lũy thừa cao nhất ở hai vế của (1), ta được:

$$a_n 2^n = 8a_n \Leftrightarrow 2^n = 2^3 \Leftrightarrow n = 3.$$

Vậy $p(x)$ là đa thức bậc ba. Từ (1) lấy $x = -10$, ta được: $p(-4) = 0$. Từ (1) lấy $x = 4$, ta được: $-48p(4) = 8p(-4) = 0 \Rightarrow p(4) = 0$. Từ (1) lấy $x = -2$, ta được: $14p(8) = 0.p(10) = 0$. Như vậy: $p(x) = a(x-4)(x+4)(x-8)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Do $p(1) = 210$ nên: $105a = 210 \Leftrightarrow a = 2$. Như thế:

$$p(x) = 2(x-4)(x+4)(x-8), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Thử lại: với $p(x)$ là đa thức xác định bởi (2), ta có:

$$\begin{aligned}(x+10)\,p(2x) &= (x+10)2(2x-4)(2x+4)(2x-8)\\ &= 16(x+10)(x-2)(x+2)(x-4). \quad (3)\\ (8x-32)\,p(x+6) &= 8(x-4)2(x+2)(x+10)(x-2)\\ &= 16(x+10)(x-2)(x+2)(x-4). \quad (4)\end{aligned}$$

Từ (3) và (4) suy ra đa thức xác định bởi (2) thỏa mãn (1). Vậy có duy nhất một đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là: $p(x) = 2(x-4)(x+4)(x-8)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 3.21. *Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn $P(2) = 12$ và*

$$P(x^2) = x^2(x^2+1)P(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Từ (1) cho $x = 0$ ta được $P(0) = 0$, cho $x = 1$ được $P(1) = 2P(1)$ hay $P(1) = 0$, cho $x = -1$ được $P(1) = 2P(-1) \Rightarrow P(-1) = 0$. Vậy $P(x)$ có ba nghiệm là 0, 1, -1. Giả sử $P(x)$ có nghiệm thực $t \notin \{0, 1, -1\}$, khi đó từ (1) suy ra t^2 cũng là nghiệm của $P(x)$, tương tự suy ra t^4 cũng là nghiệm của $P(x)$, nhưng với $t \notin \{0, 1, -1\}$ thì tất cả các phần tử của dãy $t, t^2, t^4, \ldots, t^{2^n}, \ldots$ là khác nhau đôi một nên suy ra $P(x)$ có vô số nghiệm, suy ra $P(x) \equiv 0$, mâu thuẫn với $P(2) = 12$. Vậy $P(x)$ chỉ có ba nghiệm thực là 0, 1, -1. Giả sử $\deg(P) = n$. Từ (1) suy ra $2n = n + 4 \Leftrightarrow n = 4$. Vậy $P(x)$ có một trong ba dạng sau:

$$P(x) = ax^2(x-1)(x+1),\ P(x) = ax(x-1)^2(x+1),\ P(x) = ax(x-1)(x+1)^2.$$

Do $P(2) = 12$ nên $a = 1$ hoặc $a = 2$ hoặc $a = \dfrac{2}{3}$. Thử lại chỉ có

$$P(x) = x^2(x-1)(x+1),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 3.22. *Tìm các đa thức với hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn điều kiện:*

$$P\left(P(x)+x\right) = P(x)P(x+1), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử $\deg(P) = n$. So sánh bậc của hai vế của (1) ta thu được

$$n^2 = 2n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 0\\ n = 2.\end{array}\right.$$

- Khi $n = 0$, ta được đa thức hằng $P(x) \equiv c$. Thay vào (1) thu được

$$c = c^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0\\ c = 1.\end{array}\right.$$

Vậy $P(x) \equiv 0$ và $P(x) \equiv 1$ là các đa thức hằng thỏa mãn bài ra.

- Xét $n = 2$. Giả sử $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. So sánh hệ số cao nhất trong (1) thu được $a^3 = a^2 \Leftrightarrow a = 1$. Vậy

$$P(x) = x^2 + bx + c, \text{ với } b, c \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Khi đó

$$\begin{aligned}P(x)P(x+1) &= P(x)\left(x^2+bx+c+2x+b+1\right)\\ &= P(x)\left[P(x)+2x+b+1\right]\\ &= [P(x)]^2 + 2xP(x) + bP(x) + P(x)\\ &= [P(x)+x]^2 + b\left[P(x)+x\right] + c - x^2 - bx - c + P(x)\\ &= P\left(P(x)+x\right),\ \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Vậy đa thức xác định bởi (2) thỏa mãn (1). Tất cả các đa thức cần tìm là

$$P(x) \equiv 0,\ P(x) \equiv 1,\ P(x) \equiv x^2 + bx + c\ (b, c \in \mathbb{R}).$$

Bài toán 3.23. *Tìm các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn phương trình hàm*

$$[P(x)]^2 - 1 = 4P(x^2 - 4x + 1),\ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử $P(x)$ không phải là đa thức hằng. Giả sử

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0.$$

Từ (1) ta có

$$\begin{aligned}&\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right)^2 - 1\\ =&4\left[a_n(x^2-4x+1)^n + a_{n-1}(x^2-4x+1)^{n-1} + \cdots + a_1(x^2-4x+1) + a_0\right].\end{aligned}$$

So sánh hệ số của x^{2n} ở hai vế ta được $a_n^2 = 4a_n \Rightarrow a_n = 4$. Hệ số của x^{2n-1} trong $P(x^2) - 1$ là $2a_n a_{n-1}$, hệ số của x^{2n-1} trong $4P(x^2-4x+1)$ chỉ xuất hiện ở $a_n(x^2-4x+1)^n$, mà $a_n = 4$ nên $a_{n-1} \in \mathbb{Q}$. Hệ số của x^{2n-2} trong $P(x^2) - 1$ là $2a_n a_{n-2} + a_{n-1}^2$, trong khi đó hệ số của x^{2n-2} trong $4P(x^2 - 4x + 1)$ chỉ

xuất hiện ở $a_n(x^2-4x+1)^n + a_{n-1}(x^2-4x+1)^{n-1}$, mà $a_n = 4$, $a_{n-1} \in \mathbb{Q}$ nên $a_{n-2} \in \mathbb{Q}$. Lập luận tương tự dẫn đến $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Xét $a = \dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$. Khi đó $a = a^2 - 4a + 1$. Trong (1) lấy $x = a$ ta được

$$[P(a)]^2 - 1 = 4P(a) \Leftrightarrow [P(a)]^2 - 4P(a) - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P(a) = 2+\sqrt{5} \\ P(a) = 2-\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Do $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ nên $P(a) = P\left(\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right) = p + q\sqrt{21}$, với p, q là những số hữu tỉ. Vậy không thể xảy ra $P(a) = 2+\sqrt{5}$, vì nếu $P(a) = 2+\sqrt{5}$ thì

$$\begin{aligned} &p + q\sqrt{21} = 2 + \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5} = p - 2 + q\sqrt{21} \\ \Rightarrow &5 = (p-2)^2 + 21q^2 + 2(p-2)q\sqrt{21} \Rightarrow \sqrt{21} \in \mathbb{Q} \text{ (vô lí).} \end{aligned}$$

Tương tự, cũng không thể có $P(a) = 2-\sqrt{5}$. Vậy $P(x)$ là đa thức hằng. Thay vào (1) được hai đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$P(x) = \frac{5+\sqrt{21}}{2},\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } P(x) = \frac{5-\sqrt{21}}{2},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 3.24 (Olympic Romania-2001). *Tìm các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn*

$$P(x)P(2x^2-1) = P(x^2)P(2x-1),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Dễ thấy đa thức hằng thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Tiếp theo giả sử $\deg(P) = n \geq 1$ và $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$. Khi đó

$$\begin{aligned} P(2x-1) &= a_n(2x-1)^n + a_{n-1}(2x-1)^{n-1} + \cdots + a_1(2x-1) + a_0 \\ &= 2^n P(x) + R(x), \end{aligned} \tag{2}$$

với $R(x)$ là đa thức không hoặc $R(x)$ là đa thức có $\deg(R) = m < n$. Giả sử $R(x) \not\equiv 0$, thay (2) vào (1) ta được

$$\begin{aligned} &P(x)\left[2^n P(x^2) + R(x^2)\right] = P(x^2)\left[2^n P(x) + R(x)\right],\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &P(x)R(x^2) = P(x^2)R(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3}$$

Từ (3) so sánh bậc ở hai vế ta được $n + 2m = 2n + m \Leftrightarrow m = n$, mâu thuẫn. Vậy $R(x) \equiv 0$ và $P(2x-1) \equiv 2^n P(x)$. Từ đây, đặt $x = t+1$ ta được

$$\begin{aligned} &P(2t+1) = 2^n P(t+1),\ \forall t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &Q(2t) = 2^n Q(t),\ \forall t \in \mathbb{R}\ \left(\text{với } Q(t) = P(t+1),\ \forall t \in \mathbb{R}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Vì $Q(x) = P(x+1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên đa thức $Q(x)$ có dạng

$$Q(x) = a_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Thay vào (4) thu được

$$\begin{aligned} &a_n(2x)^n + b_{n-1}(2x)^{n-1} + \cdots + b_1(2x) + b_0 \\ =&2^n\left(a_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0\right),\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5}$$

Từ (5), đồng nhất hệ số ta được

$$2^{n-k}b_{n-k} = 2^n b_{n-k},\ \forall k = 1, 2, \ldots n,$$

hay $b_{n-k} = 0$, $\forall k = 1, 2, \ldots n$. Vì thế $Q(x) = a_n x^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$, suy ra

$$P(x) = a_n(x-1)^n,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy tất cả các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$P(x) = \alpha(x-1)^n,\ \forall x \in \mathbb{R}\ (\alpha \text{ là hằng số tùy ý}, n \in \mathbb{N}).$$

Bài toán 3.25 (Olympic Bulgaria-2001). *Tìm các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn*

$$P(x)P(2x^2+1) = P(x^2)\left[P(2x+1) - 4x\right],\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Nếu $P(x) \equiv c$ (hằng số) thì thay vào (1) ta được $c = 0$. Tiếp theo giả sử $\deg(P) = n \geq 1$ và $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$. Khi đó

$$\begin{aligned} P(2x+1) &= a_n(2x+1)^n + a_{n-1}(2x+1)^{n-1} + \cdots + a_1(2x+1) + a_0 \\ &= 2^n P(x) + R(x), \end{aligned} \tag{2}$$

với $R(x)$ là đa thức không hoặc $R(x)$ là đa thức có $\deg(R) = m < n$. Thay (2) vào (1) ta được

$$\begin{aligned} &P(x)\left[2^n P(x^2) + R(x^2)\right] = P(x^2)\left[2^n P(x) + R(x) - 4x\right],\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &P(x)R(x^2) = P(x^2)\left[R(x) - 4x\right],\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3}$$

- Nếu $R(x) \equiv 0$ thì từ (3) suy ra $P(x) \equiv 0$, mâu thuẫn.
- Nếu $m \geq 2$ thì từ (3) suy ra $n + 2m = 2n + m \Leftrightarrow m = n$, mâu thuẫn.
- Giả sử $m = 1$. Khi đó $\deg\left(R(x) - 4x\right) = k \leq 1$. Từ (3) ta có

$$n + 2 = 2n + k \Leftrightarrow n = 2 - k. \tag{4}$$

Do $n > m = 1$ và $k \leq 1$ nên kết hợp với (4) suy ra $k = 0$ và $n = 2$. Vậy

$$P(2x+1) = 4P(x) + 4x + \alpha,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Trong (1) cho $x = 1$ ta được $P(1) = 0$. Giả sử $P(x) = ax^2 + bx + c$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Từ (5) lần lượt lấy $x = 1$, $x = 0$ ta được

$$\alpha = P(3) - 4 = 9a + 3b + c - 4, \alpha = -4P(0) = -4c.$$

Từ (5) ta có

$$a(2x+1)^2+b(2x+1)+c=4(ax^2+bx+c)+4x-4c,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Đồng nhất hệ số ta được $\begin{cases}4a+2b=4b+4\\ a+b+c=0.\end{cases}$ Kết hợp với trên ta được hệ

$$\begin{cases}4a-2b=4\\ a+b+c=0\\ 9a+3b+5c=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=0\\ c=-1.\end{cases}$$

Vậy $P(x)\equiv x^2-1$. Thử lại thấy thỏa mãn.
Kết luận: $P(x)\equiv 0,\ P(x)=x^2-1$.

Bài toán 3.26. *Tìm đa thức với hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn*

$$P(x^2+x+1)=P(x)P(x+1),\ \forall x\in\mathbb{R} \tag{1}$$

Chú ý 1. *Cho hai đa thức $P(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i,\ Q(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}b_ix^i$ (quy ước $x^0=1$).*

Khi đó

$$P(x).Q(x)=\sum_{i=0}^{2n}c_ix^i \text{ với } c_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\cdots+a_kb_0,\ k=0,1,\ldots,2n$$

Bài toán 3.27 (Đề thi HSG TP. HCM, năm học 2004-2005). *Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn:*

$$P(a+b+c)=7P(a)+4P(b)-5P(c) \tag{1}$$

với a,b,c là các số thực và $(a+b)(b+c)(c+a)=2a^3+b^3-2c^3$. (2)

Giải. Bộ $(a;b;c)=(3x;2x;x)$ thỏa mãn (2). Do đó thay vào (1) ta được

$$P(6x)=7P(3x)+4P(2x)-5P(x),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Giả sử $P(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$ (quy ước $x^0=1$). Thay vào (3) ta được

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n}a_i(6x)^i=7\sum_{i=0}^{n}a_i(3x)^i+4\sum_{i=0}^{n}a_i(2x)^i-5\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,\forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&\sum_{i=0}^{n}a_i\left(6^i-7.3^i-4.2^i+5\right)x^i=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&\left(6^i-7.3^i-4.2^i+5\right)a_i=0,\ \forall i=0,1,2,\ldots,n.\end{aligned} \tag{4}$$

Với $i\in\{0,1,2,\ldots,n\}$, giả sử

$$\begin{aligned}&6^i-7.3^i-4.2^i+5=0\Leftrightarrow 3^i(2^i-7)-4(2^i-7)=23\\ \Leftrightarrow&(3^i-4)(2^i-7)=23\Leftrightarrow\begin{cases}3^i-4=23\\ 2^i-7=1\end{cases}\Leftrightarrow i=3.\end{aligned}$$

Vậy kết hợp với (4) ta suy ra: khi $i\in\{0,1,2,\ldots,n\}\setminus\{3\}$ thì $a_i=0$. Bởi vậy

$$P(x)=mx^3,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Thử lại: Ta có hằng đẳng thức

$$(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)=3(a+b)(b+c)(c+a)$$

Do đó với a,b,c thỏa mãn (2) và $P(x)=mx^3,\forall x\in\mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned}&P(a+b+c)=7P(a)+4P(b)-5P(c)\\ \Leftrightarrow&m(a+b+c)^3=m(7a^3+4b^3-5c^3)\\ \Leftrightarrow&m[a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)]=m(7a^3+4b^3-5c^3)\\ \Leftrightarrow&m[a^3+b^3+c^3+3(2a^3+b^3-2c^3)]=m(7a^3+4b^3-5c^3)\text{ (đúng).}\end{aligned}$$

Vậy tất cả các đa thức cần tìm là

$$P(x)=mx^3,\forall x\in\mathbb{R}\text{ (với } m \text{ là các hằng số bất kì).}$$

Bài toán 3.28 (Costa Rican Math Olympiad 2008). *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực và thỏa mãn : với a,b,c là ba số thực bất kì thì*

$$\begin{aligned}&P(\sqrt{3}(a-b))+P(\sqrt{3}(b-c))+P(\sqrt{3}(c-a))\\ =&P(2a-b-c)+P(-a+2b-c)+P(-a-b+2c).\end{aligned}$$

Giải. Dễ thấy đa thức hằng số thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Tiếp theo giả sử $\deg P=h\geq 1$. Đặt $x=a-c,y=b-a,z=c-b$. Khi đó $x+y+z=0$. Từ giả thiết suy ra

$$P(\sqrt{3}x)+P(\sqrt{3}y)+P(\sqrt{3}z)=P(x-y)+P(y-z)+P(z-x),$$

với x,y,z là ba số thực sao cho $x+y+z=0$. Như vậy thay bộ $(x;y;z)$ bởi bộ $(x;x;-2x)$ ta được

$$2P(\sqrt{3}x)+P(-2\sqrt{3}x)=P(0)+P(3x)+P(-3x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giả sử $P(x)=\sum\limits_{i=0}^{h}a_ix^i$ ($a_h\neq 0$, quy ước $x^0=1$). Thay vào (1) ta được

$$2\sum_{i=0}^{h}a_i(\sqrt{3}x)^i+\sum_{i=0}^{h}a_i(-2\sqrt{3}x)^i=a_0+\sum_{i=0}^{h}a_i(3x)^i+\sum_{i=0}^{h}a_i(-3x)^i. \tag{2}$$

So sánh hệ số của x^h ở hai vế của (2) ta được

$$2(\sqrt{3})^h + (-2\sqrt{3})^h = 3^h + (-3)^h. \quad (3)$$

Dễ thấy $h = 1, h = 2$ thỏa (3). Tiếp theo xét $h \geq 3$. Từ (3) ta thấy rằng h phải là số chẵn : $h = 2k$, với $k \geq 2$. Khi đó (3) trở thành

$$2.3^k + 12^k = 2.9^k \Leftrightarrow 2 + 4^k = 2.3^k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = 2. \end{array}\right.$$

Tóm lại từ (3) suy ra h chỉ có thể là $h = 1, h = 2, h = 4$.

• Trường hợp $h = 1$. Khi đó $P(x) = mx + n,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào phương trình hàm đã cho ở đầu bài thấy thỏa mãn.

• Trường hợp $h = 2$. Khi đó $P(x) = mx^2 + nx + p,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào phương trình hàm đã cho ở đầu bài ta được

$$\begin{aligned} &3m\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \\ =&m\left[(2a-b-c)^2 + (2b-c-a)^2 + (2c-a-b)^2\right] \text{ (đúng).} \end{aligned}$$

• Trường hợp $h = 4$. Khi đó $P(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + e,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Trong phương trình hàm đã cho ở đầu bài, thay bộ $(a; b; c)$ bởi $(x; 0; 0)$ ta được

$$P(\sqrt{3}x) + P(0) + P(-\sqrt{3}x) = P(2x) + 2P(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Thay $P(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + e,\ \forall x \in \mathbb{R}$ vào (4) ta được

$$\begin{aligned} &9mx^4 + 3\sqrt{3}nx^3 + 3px^2 + \sqrt{3}qx + 9mx^4 - 3\sqrt{3}nx^3 + 3px^2 - \sqrt{3}qx \\ =&16mx^4 + 8nx^3 + 4px^2 + 2qx + 2mx^4 - 2nx^3 + 2px^2 - 2qx,\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Hay $18mx^4 = 18mx^4 + 6nx^3,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $n = 0$. Vậy

$$P(x) = mx^4 + px^2 + qx + e,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay vào phương trình hàm đã cho ở đầu bài ta được

$$\begin{aligned} &9m\left[(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4\right] + 3p\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \\ =&m\left[(2a-b-c)^4 + (2b-c-a)^4 + (2c-a-b)^4\right] \\ &+p\left[(2a-b-c)^2 + (2b-c-a)^2 + (2c-a-b)^2\right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Tiếp theo ta chứng minh đẳng thức

$$\begin{aligned} &9\left[(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4\right] \\ =&(2a-b-c)^4 + (2b-c-a)^4 + (2c-a-b)^4. \end{aligned} \quad (6)$$

Đặt $x = a - c, y = b - a, z = c - b$. Khi đó $x + y + z = 0$. Ta có

$$9\left[(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4\right] = 9(x^4 + y^4 + z^4). \quad (7)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} &(2a-b-c)^4 + (2b-c-a)^4 + (2c-a-b)^4 \\ =&(x-y)^4 + (y-z)^4 + (z-x)^4 \\ =&2(x^4 + y^4 + z^4) - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 \\ &-4y^3z + 6y^2z^2 - 4yz^3 - 4z^3x + 6z^2x^2 - 4zx^3 \\ =&2(x^4 + y^4 + z^4) - 4x^3(y+z) - 4y^3(x+z) - 4z^3(x+y) \\ &+6(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Do $x + y + z = 0$ nên $x^2 + y^2 + z^2 = -2(xy + yz + zx)$. Suy ra

$$\begin{aligned} &x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \\ =&4[x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyx(x+y+z)] = 4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2). \end{aligned}$$

Như vậy $x^4 + y^4 + z^4 = 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$. Thay vào (8) ta được

$$(2a-b-c)^4 + (2b-c-a)^4 + (2c-a-b)^4 = 9(x^4 + y^4 + z^4). \quad (10)$$

Từ (7) và (10) suy ra (6) được chứng minh. Do đó (5) đúng, nghĩa là đa thức $P(x) = mx^4 + px^2 + qx + e,\ \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Kết luận : Các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là :

$$\begin{aligned} &P(x) = mx + n,\ \forall x \in \mathbb{R}; \\ &P(x) = mx^2 + nx + p\ (m \neq 0),\ \forall x \in \mathbb{R}; \\ &P(x) = mx^4 + px^2 + qx + e\ (m \neq 0),\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Lưu ý. Từ (4) ta so sánh hệ số của x^h ở hai vế cũng suy ra được h chỉ có thể là $h = 1,\ h = 2,\ h = 4$.

Bài toán 3.29 (Đề thi HSG Tỉnh Gia Lai, năm học 2006-2007). *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện*

$$P(x+y).P(x-y) = P^2(x) - P^2(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải.

Cách 1. Dễ thấy trong các đa thức hằng số, chỉ có đa thức $P(x) \equiv 0$ thỏa mãn đề bài. Bây giờ ta xét $P(x)$ là đa thức bậc n, với $n \geq 1$. khi đó $P(x)$ không đồng nhất 0, nghĩa là: $\exists x_0 \in \mathbb{R} :\ P(x_0) \neq 0$. Trong (1) cho $x = y = \dfrac{x_0}{2}$ ta được $P(x_0).P(0) = 0 \Rightarrow P(0) = 0$. Trong (1) lấy $y = 2x$ ta được

$$P(3x).P(-x) = P^2(x) - P^2(2x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Giả sử $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x$, với $a_n \neq 0$ (do $P(0) = 0$). Thay vào (2) ta được:

$$\left[a_n(3x)^n + a_{n-1}(3x)^{n-1} + \cdots + a_1(3x)\right]\left[a_n(-x)^n + \cdots + a_1(-x)\right]$$

$= \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x\right)^2 - \left[a_n(2x)^n + a_{n-1}(2x)^{n-1} + \cdots + a_1(2x)\right]^2.$

So sánh hệ số của x^{2n} ở hai vế ta được

$$a_n^2 3^n(-1)^n = a_n^2\left(1-4^n\right) \Leftrightarrow 1 = (-3)^n + 4^n. \tag{3}$$

Dễ thấy $n = 0, 2, 4, \ldots$ không thỏa (3). Khi n lẻ, ta có

$$4^n - 3^n = 1 \Leftrightarrow 4^n = 1 + 3^n \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n \Leftrightarrow n = 1$$

(do hàm số mũ $y = a^x$ nghịch biến khi $0 < a < 1$). Vậy bậc của đa thức $P(x)$ bằng 1, kết hợp với $P(0) = 0$ suy ra $P(x) = mx, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy tất cả các đa thức cần tìm là:

$$P(x) = mx, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } m \text{ là hằng số tùy ý).}$$

Cách 2. Trong (1), lấy $x = y = 0$, ta được $P(0) = 0$. Do hàm số đa thức luôn có đạo hàm nên từ (1), đạo hàm hai vế theo biến x ta được

$$P'(x+y)P(x-y) + P'(x-y)P(x+y) = 2P(x).P'(x), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Trong (4), lấy $y = x$, ta được

$$P'(0)P(2x) = 2P(x).P'(x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

- Nếu $P'(0) = 0$ thì từ (5) suy ra $P(x).P'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, do đó $P(x)$ là đa thức hằng số, kết hợp với $P(0) = 0$, suy ra $P(x) \equiv 0$.
- Nếu $P'(0) \neq 0$ thì gọi $\deg P(x) = n$, khi đó vế trái của (5) là đa thức bậc n, còn vế phải của (5) là đa thức bậc $2n-1$, do đó $n = 2n-1 \Leftrightarrow n = 1$. Kết hợp với $P(0) = 0$, suy ra $P(x) \equiv ax$ (a là hằng số). Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy tất cả các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$P(x) = ax, \ \forall x \in \mathbb{R} \ (a \text{ là hằng số tùy ý}).$$

Bài toán 3.30 (Đề thi HSG Tỉnh Gia Lai-2009). *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện*

$$P(x^2+y^2) = [P(x)]^2 + [P(y)]^2, \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Giải. Trong (1) lấy $x = 0$ và $y = 0$ ta được

$$P(0) = 2[P(0)]^2 \Leftrightarrow P(0)[1-2P(0)] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P(0) = 0 \\ P(0) = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Nếu $P(x) \equiv C$, với C là hằng số thì từ (1) có $C = 2C^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C = 0 \\ C = 0,5. \end{array}\right.$ Tiếp theo ta giả sử bậc của $P(x)$ là n (với $n = 1, 2, \ldots$). Trong (1) lấy $y = x$ ta được

$$P(2x^2) = 2[P(x)]^2, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Giả sử $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, với $a_n \neq 0$. Thế vào (2) được

$$\begin{aligned}&\left[a_n(2x^2)^n + a_{n-1}(2x^2)^{n-1} + \cdots + a_1(2x^2) + a_0\right] \\ &= 2\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right)^2, \ \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

So sánh hệ số của x^{2n} ở hai vế ta được

$$a_n 2^n = 2(a_n)^2 \Leftrightarrow 2^n = 2a_n \Leftrightarrow a_n = 2^{n-1}.$$

Ta viết lại (1) như sau:

$$P(a^2+b^2) = [P(a)]^2 + [P(b)]^2, \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Ta có $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + (c^2 + 2ab + 2bc + 2ca)$. Do đó

$$a^2 + b^2 = (a+b+c)^2 \Leftrightarrow c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 0.$$

Vậy (3) viết lại

$$P((a+b+c)^2) = [P(a)]^2 + [P(b)]^2, \tag{4}$$

với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ sao cho

$$c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 0. \tag{5}$$

Trong $c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 0$ lấy $c = 2$ ta được

$$ab + 2b + 2a = -2 \Leftrightarrow b(a+2) = -2a - 2 \Leftrightarrow b = \frac{-2a-2}{a+2} \Leftrightarrow b = -2 + \frac{2}{a+2}.$$

Với $a \in \mathbb{Z}, a \neq -2$ thì $b \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $a+2$ là ước của 2. Vậy chọn $a = -3$ ta được $b = -4$. Vậy $(a; b; c) = (-3; -4; 2)$ thỏa mãn $c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 0$. Do đó với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $(-3x; -4x; 2x)$ thỏa mãn (5). Thay vào (4) ta được

$$P(25x^2) = P^2(-3x) + P^2(-4x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Vì $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, với $a_n = 2^{n-1}$ nên thay vào (6) ta được

$$\begin{aligned}&\left[a_n(25x^2)^n + a_{n-1}(25x^2)^{n-1} + \cdots + a_1(25x^2) + a_0\right] \\ &= \left[a_n(-3x)^n + a_{n-1}(-3x)^{n-1} + \cdots + a_1(-3x) + a_0\right]^2 \\ &+ \left[a_n(-4x)^n + a_{n-1}(-4x)^{n-1} + \cdots + a_1(-4x) + a_0\right]^2.\end{aligned}$$

So sánh hệ số của x^{2n} ở hai vế ta được

$$25^n = a_n(9^n + 16^n), \forall n = 1, 2, \ldots$$
$$\Leftrightarrow 25^n = 2^{n-1}(9^n + 16^n), \forall n = 1, 2, \ldots$$
$$\Leftrightarrow 2.25^n = 18^n + 32^n, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Vậy $n = 1$, do đó $P(x)$ có dạng $P(x) = x + b, \forall x \in \mathbb{R}$. Do $P(0) = 0$ hoặc $P(0) = \frac{1}{2}$ nên $b = 0$ hoặc $b = \frac{1}{2}$. Sau khi thử lại ta kết luận: Tất cả các đa thức thỏa mãn đề bài là: $P(x) \equiv 0$, $P(x) \equiv \frac{1}{2}$, $P(x) \equiv x$.

Cách khác. Trong (1) lấy $x = 0$ và $y = 0$ ta được

$$P(0) = 2[P(0)]^2 \Leftrightarrow P(0)[1 - 2P(0)] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P(0) = 0 \\ P(0) = 0,5. \end{array}\right.$$

Nếu $P(x) \equiv C$, với C là hằng số thì từ (1) ta có $C = 2C^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C = 0 \\ C = 0,5. \end{array}\right.$

Tiếp theo ta giả sử bậc của $P(x)$ là n (với $n = 1, 2, \ldots$). Giả sử

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \text{ với } a_n \neq 0.$$

Trong (1) lần lượt thay $x = t$, $y = t$ và $x = t$, $y = 0$, ta nhận được

$$\left\{\begin{array}{l} P(2t^2) = 2\,[P(t)]^2 \\ P(t^2) = [P(t)]^2 + [P(0)]^2. \end{array}\right. \quad (2)$$

So sánh hệ số bậc cao nhất trong (2), ta có

$$\left\{\begin{array}{l} 2^n a_n = 2a_n^2 \\ a_n = a_n^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n = 1 \\ n = 1. \end{array}\right.$$

Vậy $P(x)$ có dạng $P(x) = x + b, \forall x \in \mathbb{R}$. Do $P(0) = 0$ hoặc $P(0) = \frac{1}{2}$ nên $b = 0$ hoặc $b = \frac{1}{2}$. Sau khi thử lại ta kết luận: Tất cả các đa thức thỏa mãn đề bài là $P(x) \equiv 0$, $P(x) \equiv \frac{1}{2}$, $P(x) \equiv x$. Đa thức $P(x) = x + \frac{1}{2}$ không thỏa mãn điều kiện đề bài. Để chứng minh điều này, chỉ cần thay $x = 1$ và $y = 0$ vào (1), ta thấy ngay (1) không thỏa mãn.

Lưu ý. Có thể giải được hai bài toán tổng quát sau.

Bài toán 3.31. *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện*

$$P\left(\sqrt[m]{x^n + y^n}\right) = \sqrt[m]{[P(x)]^n + [P(x)]^n}, \ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

trong đó m, n là các số nguyên dương phân biệt và m lẻ.

Bài toán 3.32. *Cho n là số tự nhiên chẵn lớn hơn 1. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $f(x)$ thỏa mãn*

$$f(x^n + y^n) = [f(x)]^n + [f(y)]^n, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Bài toán 3.33. *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$, $Q(x)$ hệ số thực, monic (hệ số của số hạng chứa số mũ cao nhất của biến x là 1) và thỏa mãn điều kiện*

$$P(1) + P(2) + \cdots + P(n) = Q(1 + 2 + \cdots + n), \ \forall n = 1, 2, \ldots \quad (1)$$

Giải. Vì $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ nên để giải bài toán ta sẽ tiến hành qua các bước như sau:

Bước 1. Chứng minh $P(x) = Q\left(\frac{(x+1)x}{2}\right) - Q\left(\frac{x(x-1)}{2}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (2)

Xét đa thức

$$R(x) \equiv Q\left(\frac{(x+1)x}{2}\right) - Q\left(\frac{x(x-1)}{2}\right) - P(x).$$

Với mọi $n = 2, 3, \ldots$, sử dụng (1) ta có

$$\begin{aligned} R(n) &= Q\left(\frac{(n+1)n}{2}\right) - Q\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) - P(n) \\ &= Q(1 + 2 + \cdots + n) - Q(1 + 2 + \cdots + n - 1) - P(n) \\ &= P(1) + P(2) + \cdots + P(n) \\ &\quad - [P(1) + P(2) + \cdots + P(n-1)] - P(n) = 0. \end{aligned}$$

Vậy $R(x)$ có vô số nghiệm, hay $R(x) \equiv 0$, nghĩa là (2) được chứng minh.

Bước 2. Chứng minh $Q(0) = 0$. Từ (2) ta có $P(1) = Q(1) - Q(0)$. Theo (1) được $P(1) = Q(1)$. Vậy $Q(0) = 0$.

Bước 3. Chứng minh $\deg Q = 1$ hoặc $\deg Q = 2$. Giả sử

$$Q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Từ (2) ta có

$$\begin{aligned} P(x) &= \left[\left(\frac{(x+1)x}{2}\right)^n - \left(\frac{x(x-1)}{2}\right)^n\right] \\ &\quad + a_{n-1}\left[\left(\frac{(x+1)x}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{x(x-1)}{2}\right)^{n-1}\right] + \cdots + a_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (3) ta thấy hệ số của số hạng chứa số mũ cao nhất của biến x là

$$\frac{C_n^1 + C_n^1}{2^n} = \frac{C_n^1}{2^{n-1}} = \frac{n}{2^{n-1}} \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Theo giả thiết $\frac{n}{2^{n-1}} = 1 \Leftrightarrow 2^{n-1} = n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=1 \\ n=2 \end{array}\right.$ (vì với $n \geq 3$ thì $2^{n-1} > n$).

Do $Q(0) = 0$ và $\deg Q = 1$ hoặc $\deg Q = 2$ nên $Q(x) \equiv x$ hoặc $Q(x) \equiv x^2 + bx$.

- Khi $Q(x) \equiv x$, theo (2) được $P(x) \equiv x$.
- Khi $Q(x) \equiv x^2 + bx$, theo (2) được

$$P(x) \equiv \left[\frac{(x+1)x}{2}\right]^2 + b\frac{(x+1)x}{2} - \left[\frac{(x-1)x}{2}\right]^2 - b\frac{(x-1)x}{2} \equiv x^3 + bx.$$

Thử lại:

- Dễ thấy $P(x) \equiv x$ và $Q(x) \equiv x$ thỏa (1).
- Khi $Q(x) \equiv x^2 + bx$ và $P(x) \equiv x^3 + bx$. Dễ dàng chứng minh được

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

Vậy

$$\begin{aligned} P(1) + P(2) + \cdots + P(n) &= 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + b\,(1 + 2 + \cdots + n) \\ &= (1 + 2 + \cdots + n)^2 + b\,(1 + 2 + \cdots + n) \\ &= Q\,(1 + 2 + \cdots + n),\ \forall n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Do đó $Q(x) \equiv x^2 + bx$ và $P(x) \equiv x^3 + bx$ thỏa (1).

Kết luận: Có hai cặp đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$P(x) \equiv x \text{ và } Q(x) \equiv x\ ; Q(x) \equiv x^2 + bx \text{ và } P(x) \equiv x^3 + bx.$$

Bài toán 3.34. *Tìm tất cả các đa thức hệ số thực thỏa mãn*

$$xP(\frac{y}{x}) + yP(\frac{x}{y}) = x + y,\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{1}$$

Giải. Trong (1) lấy $y = kx$, với $k \neq 0$ và $x \neq 0$ ta được

$$\begin{aligned} &xP(k) + kxP(\frac{1}{k}) = x + kx,\ \forall x \neq 0,\ k \neq 0 \\ \Rightarrow &P(k) + kP(\frac{1}{k}) = 1 + k,\ \forall k \neq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Đặt $P(k) = Q(k) + 1$. Khi đó do (2) nên đa thức Q thỏa mãn

$$\begin{aligned} &Q(k) + 1 + k\left[Q(\frac{1}{k}) + 1\right] = 1 + k,\ \forall k \neq 0 \\ \Rightarrow &Q(k) + kQ(\frac{1}{k}) = 0 \Rightarrow \frac{Q(k)}{k} = -Q(\frac{1}{k}),\ \forall k \neq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

- Nếu $\deg(Q) \geq 2$ thì từ (3) cho $k \to +\infty$ ta được $\frac{Q(k)}{k} \to \pm\infty$, trong khi đó $-Q(\frac{1}{k}) \to -Q(0)$ (do đa thức Q là hàm liên tục), đến đây ta gặp mâu thuẫn.
- Vậy $\deg(Q) \leq 1$, suy ra $P(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned} &x\left(\frac{ay}{x} + b\right) + y\left(\frac{ax}{y} + b\right) = x + y,\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ \Leftrightarrow &ay + bx + ax + by = x + y,\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ \Leftrightarrow &(a + b)(x + y) = x + y,\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ \Leftrightarrow &a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a. \end{aligned}$$

Tất cả các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài đều có dạng

$$f(x) = ax + 1 - a,\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ (trong đó } a \text{ là hằng số tùy ý).}$$

Bài toán 3.35. *Tìm các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn phương trình hàm:*

$$P\left(x + P(x)\right) = P(x) + P\left(P(x)\right),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử $a_n > 0$. Xét trường hợp $\deg(P) = n \geq 3$. Giả sử

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0.$$

Ta có $P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$. Do

$$\lim_{x \to +\infty}\left[P'(x) - x\right] = +\infty \ \left(\text{vì } n \geq 3,\ na_n > 0\right)$$

nên tồn tại n_0 sao cho với mọi $x > n_0$ thì $P'(x) > x$. Lại có

$$\lim_{x \to +\infty} P''(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots + 2a_2\right] = +\infty$$

nên tồn tại n_1 sao cho với mọi $x > n_1$ thì $P''(x) > 0$, suy ra $P'(x)$ đồng biến trên $(n_1; +\infty)$. Chọn $m = \max\{0, n_0, n_1\}$ và xét $x \in (m; +\infty)$. Từ

$$P(x) = P\left(x + P(x)\right) - P\left(P(x)\right),$$

theo định lí Lagrange, với mọi $x \in (m; +\infty)$, tồn tại $c_x \in (P(x); P(x) + x)$ sao cho

$$P'(c_x) = \frac{P\left(x + P(x)\right) - P\left(P(x)\right)}{P(x) + x - P(x)} \Rightarrow P'(c_x) = \frac{P(x)}{x}.$$

Lại có $P(0) = 0$ nên $a_0 = 0$. Do $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[P(x) - x\right] = +\infty$ và

$$\lim_{x \to +\infty}\left[P'(x) - \frac{P(x)}{x}\right] = \lim_{x \to +\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} a_k\,(k-1)\,x^{k-1}\right] = +\infty$$

nên tồn tại $m_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $x > m_0$ thì $P(x) > x$, $P'(x) > \dfrac{P(x)}{x}$.
Vậy, với mọi $x > \max\{m_0, m\}$, ta có

$$P'(c_x) > P'(P(x)) > P'(x) > \frac{P(x)}{x},$$

điều này mâu thuẫn với $P'(c_x) = \dfrac{P(x)}{x}$, $\forall x > \max\{m_0, m\}$. Như vậy không thể xảy ra trường hợp $\deg(P) = n \geq 3$. Xét $\deg(P) = 2$. Giả sử

$$P(x) = ax^2 + bx, \ \forall x \in \mathbb{R} \ (\text{do } P(0) = 0).$$

Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned} &a\left[ax^2 + b(x+1)\right]^2 + b\left[ax^2 + b(x+1)\right] \\ =&ax^2 + bx + a\left(ax^2 + bx\right)^2 + b\left(ax^2 + bx\right), \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2}$$

Từ (2) lấy $x = 0$ được $ab^2 + b^2 = 0$. Do đang xét $a > 0$ nên suy ra $b = 0$.
Thay vào (2) được:

$$a^3x^4 + abx^2 = ax^2 + a^3x^4 + abx^2, \forall x \in \mathbb{R} \ (\text{vô lí}).$$

Tương tự, với $a_n < 0$ thì cũng suy ra vô lí nếu $\deg(P) \geq 2$. Vậy xét $\deg(P) = 1$.
Giả sử $P(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$, a là hằng số, thay vào (1) thấy thỏa mãn. Nếu $P(x)$ là đa thức hằng thì thay vào (1) được $P(x) \equiv 0$. Tóm lại các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là $P(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$, a là hằng số tùy ý.

Bài toán 3.36 (International Zhautykov Olympiad 2012). *Cho P, Q, R là ba đa thức với hệ số thực sao cho*

$$P(Q(x)) + P(R(x)) = c, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng hoặc $P(x)$ là đa thức hằng hoặc $R(x) + Q(x)$ là đa thức hằng.

Giải. Nếu $\deg P = 0$ thì $P(x)$ là đa thức hằng, ta có điều phải chứng minh.
Giả sử $\deg P \geq 1$. Ta có các nhận xét sau:
1. Nếu $\deg Q = 0$ thì $\deg R = 0$ và ngược lại, nên không giảm tính tổng quát ta giả sử $\deg Q > 0$ và $\deg R > 0$. Suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty} Q(x) = \infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} R(x) = \infty$.

2. $\deg Q = \deg R \geq 1$ và $\deg P = n$, là số lẻ, đồng thời $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{Q(x)}{R(x)} = -1$.

3. Đặt $T = 1 + \dfrac{R(x)}{Q(x)} + \dfrac{R^2(x)}{Q^2(x)} + \cdots + \dfrac{R^{n-1}(x)}{Q^{n-1}(x)}$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} T = 1$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x) - a_n x^n}{x^{n-1}}$ tồn tại và đặt bằng b (ở đây a_n là hệ số bậc cao nhất của đa thức $P(x)$). Từ giả thiết ta có:

$$\begin{aligned} &P(Q(x)) - a_nQ^n(x) + P(R(x)) - a_nR^n(x) = c - a_n(Q^n(x) + R^n(x)) \\ \Rightarrow&\frac{P(Q(x)) - a_nQ^n(x)}{Q^{n-1}(x)} + \frac{P(R(x)) - a_nR^n(x)}{R^{n-1}(x)} \cdot \frac{R^{n-1}(x)}{Q^{n-1}(x)} \\ =&\frac{c}{Q^{n-1}(x)} - a_n(Q(x) + R(x))T. \\ \Rightarrow&Q(x) + R(x) \\ =&-\frac{P(Q(x)) - a_nQ^n(x)}{a_nTQ^{n-1}(x)} - \frac{P(R(x)) - a_nR^n(x)}{a_nTR^{n-1}(x)} \cdot \frac{R^{n-1}(x)}{Q^{n-1}(x)} + \frac{c}{a_nTQ^{n-1}(x)}. \end{aligned}$$

Lấy giới hạn hai vế khi cho $x \to +\infty$, ta được $\lim\limits_{x\to+\infty} (Q(x) + R(x)) = -\dfrac{2b}{a_n}$.
Hay $Q(x) + R(x)$ là đa thức hằng. Vậy ta có điều phải chứng minh.

3.3 Phương trình dạng $P(f)P(g) = P(h)$

Bài toán tổng quát 1. *Giả sử $f(x)$, $g(x)$ và $h(x)$ là các đa thức hệ số thực cho trước thỏa mãn điều kiện:* $\deg(f) + \deg(g) = \deg(h)$. *Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ sao cho*

$$P\left(f(x)\right).P\left(g(x)\right) = P\left(h(x)\right), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Nghiệm của (1) có nhiều tính chất đặc biệt giúp chúng ta có thể xây dựng được tất cả các nghiệm của nó từ các nghiệm bậc nhỏ.

Định lý 1. *Nếu P, Q là nghiệm của phương trình hàm (1) thì $P.Q$ cũng là nghiệm của phương trình hàm (1).*

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} (P.Q)\left(h(x)\right) &= P\left(h(x)\right).Q\left(h(x)\right) = P\left(f(x)\right).P\left(g(x)\right).Q\left(f(x)\right).Q\left(g(x)\right) \\ &= (PQ)\left(f(x)\right).(PQ)\left(g(x)\right). \end{aligned}$$

Hệ quả 1. *Nếu $P(x)$ là nghiệm của (1) thì $[P(x)]^n$ cũng là nghiệm của (1).*

Trong khá nhiều trường hợp hệ quả trên cho phép ta mô tả hết các nghiệm của (1). Để làm điều này ta có định lí quan trọng sau đây.

Định lý 2. *Nếu f, g, h là các đa thức hệ số thực thỏa mãn điều kiện* $\deg(f) + \deg(g) = \deg(h)$ *và thỏa mãn một trong hai điều kiện sau đây:*

(1). $\deg(f) \neq \deg(g)$

(2). $\deg(f) = \deg(g)$ *và* $f^* + g^* \neq 0$, *trong đó* f^*, g^* *là hệ số của luỹ thừa cao nhất của các đa thức* f *và* g *tương ứng.*

Khi đó với mọi số nguyên dương n *tồn tại nhiều nhất một đa thức hệ số thực* $P(x)$ *có bậc* n *và thỏa mãn* (1).

Chứng minh. Giả sử P là đa thức bậc n thỏa mãn (1). Gọi P^*, f^*, g^*, h^* lần lượt là hệ số của luỹ thừa cao nhất của P, f, g, h. So sánh hệ số của luỹ thừa cao nhất hai vế của các đa thức trong (1) ta có

$$P^*.(f^*)^n.P^*.(g^*)^n = P^*.(h^*)^n \Rightarrow P^* = \left(\frac{h^*}{f^*.g^*}\right)^n.$$

Như vậy nếu giả sử ngược lại, tồn tại một đa thức Q hệ số thực bậc n, khác P, thỏa mãn (1) thì $Q^* = P^*$ và ta có

$$Q(x) = P(x) + R(x), \text{ với } 0 \leq r = \deg(R) < n$$

(ta quy ước bậc của đa thức đồng nhất không bằng $-\infty$, do đó $r \geq 0$ đồng nghĩa R không đồng nhất không). Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned}
&[P(f) + R(f)].[P(g) + R(g)] = P(h) + R(h)\\
\Leftrightarrow &P(f)P(g) + P(f)R(g) + R(f)P(g) + R(f)R(g) = P(h) + R(h)\\
\Leftrightarrow &P(f)R(g) + R(f)P(g) + R(f)R(g) = R(h). \qquad (2)
\end{aligned}$$

Trường hợp 1. $\deg(f) \neq \deg(g)$. Giả sử $\deg(f) > \deg(g)$. Khi đó bậc của các đa thức ở vế trái của (2) là

$$n\deg(f) + r\deg(g), r\deg(f) + n\deg(g), r\deg(f) + r\deg(g).$$

Để ý rằng

$$(n-r)\deg(f) > (n-r)\deg(g) \Rightarrow n\deg(f) + r\deg(g) > r\deg(f) + n\deg(g).$$

Do đó

$$n\deg(f) + r\deg(g) > r\deg(f) + n\deg(g) > r\deg(f) + r\deg(g).$$

Vậy vế trái của (2) có bậc là $n\deg(f) + r\deg(g)$. Trong khi đó vế phải có bậc là

$$r\deg(h) = r(\deg(f) + \deg(g)) < n\deg(f) + r\deg(g) \text{ (mâu thuẫn).}$$

Trường hợp 2. $\deg(f) = \deg(g)$. Khi đó hai đa thức đầu tiên ở vế trái của (2) có cùng bậc là $n\deg(f) + r\deg(g)$ và có thể xảy ra sự triệt tiêu khi thực hiện phép cộng. Tuy nhiên, xét hệ số cao nhất của hai đa thức này, ta có hệ

số của $x^{n\deg(f)+r\deg(g)}$ trong đa thức thứ nhất và đa thức thứ hai lần lượt là $P^*.(f^*)^n.R^*.(g^*)^r$, $R^*.(f^*)^r.P^*.(g^*)^n$. Như thế bậc của $x^{n\deg(f)+r\deg(g)}$ trong tổng hai đa thức bằng

$$\begin{aligned}
&P^*.(f^*)^n.R^*.(g^*)^r + R^*.(f^*)^r.P^*.(g^*)^n\\
=&P^*R^*(f^*)^r(g^*)^r[(f^*)^{n-r} + (g^*)^{n-r}] \neq 0 \text{ (do } f^* + g^* \neq 0)
\end{aligned}$$

Như vậy bậc của vế trái của (2) vẫn là $n\deg(f) + r\deg(g)$, trong khi đó bậc của vế phải là

$$r\deg(h) = r(\deg(f) + \deg(g)) < n\deg(f) + r\deg(g) \text{ (mâu thuẫn).}$$

Định lí được chứng minh hoàn toàn.

Chú ý 2. *Sử dụng định lí* (**2**) *và hệ quả* (**1**), *ta thấy rằng nếu* $P_1(x)$ *là một đa thức bậc nhất thỏa mãn* (1) *với* f, g, h *là các đa thức thỏa mãn điều kiện của định lí* (**2**) *thì tất cả các nghiệm của* (1) *là*

$$P(x) \equiv 0, P(x) \equiv 1, P(x) = [P_1(x)]^n \text{ (với } n = 1, 2, \ldots).$$

Bài toán 3.37. *Tìm tất cả các đa thức hệ số thực* $P(x)$ *thỏa mãn*

$$P(x)P(x+1) = P(x^2 + x + 1), \forall x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Giải.

Cách 1 (Tương tự như bài toán tổng quát). Dễ thấy $P(x) \equiv 0$ và $P(x) \equiv 1$ thỏa mãn phương trình hàm (1). Xét trường hợp $P(x)$ có bậc nhất, $P(x) = ax + b$ (a, b là hằng số $a \neq 0$) Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned}
&[ax + b]\,[ax + a + b] = a(x^2 + x + 1) + b, \forall x \in \mathbb{R}\\
\Leftrightarrow &a^2x^2 + (a+b)ax + abx + b(a+b) = ax^2 + ax + a + b, \forall x \in \mathbb{R}\\
\Leftrightarrow &(a^2 - a)x^2 + (a + 2b - 1)ax + b(a+b) - a - b = 0, \forall x \in \mathbb{R}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} a^2 - a = 0\\ a(a + 2b - 1) = 0\\ b(a+b) - a - b = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Hệ này vô nghiệm do $a \neq 0$. Vậy không tồn tại đa thức bậc nhất thỏa mãn (1). Tiếp theo ta xét trường hợp $P(x)$ có bậc 2,

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \text{ với } a \neq 0$$

Thay vào (1) và đồng nhất hệ số như trên ta được $a = 1, b = 0, c = 1$. Vậy đa thức bậc hai thỏa mãn (1) là $P(x) \equiv x^2 + 1$. Xét các đa thức

$$f(x) \equiv x, g(x) \equiv x + 1, h(x) = x^2 + x + 1.$$

Khi đó $\deg(f) = \deg(g) = 1, \deg(f) + \deg(g) = 2 = \deg(h)$. Tiếp theo ta chứng minh với mọi số nguyên dương n tồn tại nhiều nhất một đa thức hệ số thực $P(x)$ có bậc n và thỏa mãn (1). Giả sử P là đa thức bậc n thỏa mãn (1). Gọi P^* là hệ số cao nhất của P. So sánh hệ số cao nhất hai vế của các đa thức trong (1) ta có

$$(P^*)^2 = P^* \Rightarrow P^* = 1 \text{ (do } P^* \neq 0).$$

Như vậy nếu giả sử tồn tại một đa thức Q hệ số thực bậc n, khác P, thỏa mãn (1) thì $Q^* = P^* = 1$ và ta có

$$Q(x) = P(x) + R(x), \text{ với } 0 \leq r = \deg(R) < n$$

(ta quy ước bậc của đa thức đồng nhất không bằng $-\infty$, do đó $r \geq 0$ đồng nghĩa R không đồng nhất không). Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned}
&[P(f) + R(f)].[P(g) + R(g)] = P(h) + R(h)\\
\Leftrightarrow &P(f)P(g) + P(f)R(g) + R(f)P(g) + R(f)R(g) = P(h) + R(h)\\
\Leftrightarrow &P(f)R(g) + R(f)P(g) + R(f)R(g) = R(h). \qquad (2)
\end{aligned}$$

Hai đa thức đầu tiên ở vế trái của (2) có cùng bậc là $n + r$ và có thể xảy ra sự triệt tiêu khi thực hiện phép cộng. Tuy nhiên, xét hệ số cao nhất của hai đa thức này, ta có hệ số của x^{n+r} trong đa thức thứ nhất và đa thức thứ hai lần lượt là $P^*.R^*$, $R^*.P^*$. Như thế bậc của x^{n+r} trong tổng hai đa thức bằng

$$P^*.R^* + R^*.P^* = 2P^*.R^*$$

Như vậy bậc của vế trái của (2) là $n + r$, trong khi đó bậc của đa thức ở vế phải là $2r$, nhưng $2r < n + r$, đến đây ta gặp mâu thuẫn. Vậy với mọi số nguyên dương n tồn tại nhiều nhất một đa thức hệ số thực $P(x)$ có bậc n và thỏa mãn (1). Kết hợp với hệ quả (1) suy ra tất cả các đa thức thỏa mãn đề bài là

$$P(x) \equiv 0, P(x) \equiv 1, P(x) = (x^2 + 1)^n \text{ (với } n = 1, 2, \ldots).$$

Cách 2: Sử dụng tính chất nghiệm và so sánh bậc. Nếu $P(x) \equiv a$ (a là hằng số) thì thay vào (1) ta được

$$a^2 = a \Leftrightarrow a(a-1) = 0 \Leftrightarrow a \in \{0, 1\}.$$

Bây giờ ta xét $P(x)$ là đa thức có bậc lớn hơn hoặc bằng 1. Khi đó $P(x)$ chỉ có hữu hạn nghiệm. Nếu $P(x) = 0$ thì theo (1) suy ra $P(x^2 + x + 1) = 0$. Vậy nếu x_0 là nghiệm thực của $P(x)$ thì các số sau cũng là nghiệm của $P(x)$

$$x_0,\ x_1 = x_0^2 + x_0 + 1,\ x_2 = x_1^2 + x_1 + 1, \ldots,\ x_{n+1} = x_n^2 + x_n + 1, \cdots$$

Do $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots$ nên suy ra $P(x)$ có vô số nghiệm, điều này mâu thuẫn với $P(x)$ chỉ có hữu hạn nghiệm. Vậy $P(x)$ không có

nghiệm thực, suy ra $P(x)$ là đa thức bậc chẵn, giả sử $\deg(P) = 2m$. Khi đó $P(x)$ được biểu diễn dưới dạng

$$P(x) = (x^2 + 1)^m + G(x), \text{ với } \deg(G) < 2m. \qquad (3)$$

Thay (3) vào (1) ta được

$$\begin{aligned}
&\left[(x^2+1)^m + G(x)\right]\left[(x^2+2x+2)^m + G(x+1)\right]\\
&= \left[(x^2+x+1)^2 + 1\right]^m + G(x^2+x+1).
\end{aligned}$$

Vì $\left(x^2+1\right)\left(x^2+2x+2\right) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = (x^2+x+1)^2 + 1$ nên theo trên ta có

$$(x^2+1)^m G(x+1) + (x^2+2x+2)^m G(x) + G(x)G(x+1) = G(x^2+x+1). \quad (4)$$

Nếu $G(x)$ không đồng nhất 0 thì giả sử $\deg(G) = p < 2m$. Khi đó vế phải của (4) là đa thức có bậc $2p$, còn vế trái của (4) có bậc là $2m + p$. Suy ra $2m + p = 2p$, suy ra $2m = p$, mâu thuẫn với $2m > p$. Vậy $G(x) \equiv 0$. Vậy $P(x) \equiv (x^2 + 1)^m$. Thử lại thấy thỏa mãn. Do đó tất cả các đa thức thỏa mãn đề bài là

$$P(x) \equiv 0, P(x) \equiv 1, P(x) = (x^2 + 1)^m \text{ (với } m = 1, 2, \ldots).$$

Lưu ý. Do ta dự đoán được $P(x) = x^2 + 1$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài nên mới có ý tưởng biểu diễn $P(x)$ có dạng như ở (3). Bài toán này còn được đề cập trong bài 3.5: Sử dụng số phức để giải phương trình hàm đa thức.

Bài toán 3.38 (Đề thi vào Khoa Toán học tính toán và Điều khiển- Đại học Tổng hợp Quốc gia Matxcơva năm 2002). *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn điều kiện*

$$P(x^2) = P^2(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Hướng dẫn. Ta có các hàm $f(x) = x, g(x) = x, h(x) = x^2$ thỏa mãn các điều kiện của định lí **2** ở trang 411, và hàm $P(x) = x$ là hàm bậc nhất thỏa mãn (1) do đó các hàm $P(x) \equiv 0$, $P(x) \equiv 1$, $P(x) \equiv x^n$ (với $n = 1, 2, \ldots$) là tất cả các nghiệm của (1).

Bài toán 3.39 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2011). *Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn phương trình hàm*

$$P(2x+1)P(2x+2) = P(4x^2 + 6x + 3),\ \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Hướng dẫn. Đặt $t = 2x + 1$. Khi đó (1) trở thành

$$P(t)P(t+1) = P(t^2 + t + 1), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 3.40 (HSG Quốc gia-2006). *Hãy xác định tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực, thỏa mãn hệ thức sau:*

$$P(x^2)+x[3P(x)+P(-x)]=(P(x))^2+2x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Thay x bởi $-x$ vào (1), ta được

$$P(x^2)-x[3P(-x)+P(x)]=(P(-x))^2+2x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Trừ (1) cho (2), ta được

$$\begin{aligned}&4x[P(x)+P(-x)]=P^2(x)-P^2(-x)\\ \Leftrightarrow&[P(x)+P(-x)][P(x)-P(-x)-4x]=0.\end{aligned} \tag{3}$$

Do (3) đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, nên ta phải có: Hoặc $P(x)+P(-x)=0$ đúng với vô số các giá trị x hoặc $P(x)-P(-x)-4x=0$ đúng với vô số các giá trị x. Do P là đa thức nên từ đây ta suy ra: Hoặc $P(x)+P(-x)=0$ đúng với mọi x hoặc $P(x)-P(-x)-4x=0$ đúng với mọi x. Ta xét các trường hợp $P(x)+P(-x)\equiv 0$. Khi đó ta có phương trình

$$P(x^2)+2xP(x)=[P(x)]^2+2x^2\Leftrightarrow P(x^2)-x^2=[P(x)-x]^2.$$

Đặt $Q(x)=P(x)-x$ thì $Q(x^2)=Q^2(x)$. Theo bài toán 3.38 thì

$$Q(x)\equiv 0, Q(x)\equiv 1, Q(x)\equiv x^n.$$

Từ đó $P(x)\equiv x, P(x)\equiv x+1, P(x)\equiv x^n+x$. So sánh với điều kiện

$$P(x)+P(-x)\equiv 0,$$

ta chỉ nhận các nghiệm: $P(x)\equiv x,\ P(x)\equiv x^{2k+1}+x, (k=0,1,2\ldots)$.
Tiếp theo xét trường hợp $P(x)-P(-x)-4x\equiv 0$. Khi đó ta có phương trình

$$\begin{aligned}&P(x^2)+x[4P(x)-4x]=P^2(x)+2x^2\\ \Leftrightarrow&P(x^2)-2x^2=[P(x)-2x]^2.\end{aligned}$$

Đặt $Q(x)=P(x)-2x$ thì $Q(x^2)=Q^2(x)$ và như thế

$$Q(x)\equiv 0,\ Q(x)\equiv 1, Q(x)\equiv x^n.$$

Từ đó $P(x)\equiv 2x, P(x)=2x+1, P(x)=x^n+2x$. So sánh với điều kiện $P(x)-P(-x)-4x=0$, ta chỉ nhận các nghiệm:

$$P(x)\equiv 2x,\ P(x)\equiv 2x+1,\ P(x)\equiv x^{2k}+2x\ (k=1,2,\ldots).$$

Tổng hợp hai trường hợp, ta có tất cả nghiệm của (1) là các đa thức là:

$$P(x)\equiv x,\ P(x)\equiv 2x,\ P(x)\equiv 2x+1,\ P(x)=x^{2k+1}+x,\ P(x)=x^{2k}+2x$$

với $k=1,2,3,\ldots$

3.4 Phương trình dạng $P(f)P(g)=P(h)+Q$

Bài toán tổng quát 2. *Giả sử $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức hệ số thực cho trước thỏa mãn điều kiện:* $\deg(f)+\deg(g)=\deg(h)$. *Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ sao cho*

$$P(f(x)).P(g(x))=P(h(x))+Q(x),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Với phương trình (1), nếu Q không đồng nhất 0 thì ta sẽ không còn tính chất "nhân tính" như ở bài toán tổng quát 1 ở trang 411. Vì thế, việc xây dựng nghiệm trở nên khó khăn. Đây chính là khác biệt cơ bản của toán tổng quát 2 với toán tổng quát 1. Tuy nhiên, ta vẫn có thể chứng minh được định lý duy nhất, được phát biểu như sau:

Định lý 3. *Cho f,g,h là các đa thức không hằng thỏa mãn điều kiện*

$$\deg(f)+\deg(g)=\deg(h)$$

Q là một đa thức cho trước, ngoài ra $\deg(f)\neq\deg(g)$ hoặc $\deg(f)=\deg(g)$ và $f^*+g^*\neq 0$. Khi đó, với mỗi số nguyên dương n và số thực a, tồn tại nhiều nhất một đa thức P thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $\deg(P)=n$; *ii)* $P^*=a$; *iii)* $P(f)P(g)=P(h)+Q$.

Phép chứng minh định lý này tương tự với phép chứng minh định lý **2**.

Hệ quả 2. *Trong các điều kiện của định lý, với mỗi số nguyên dương n, tồn tại nhiều nhất 2 đa thức $P(x)$ có bậc n thỏa mãn phương trình*

$$P(f)P(g)=P(h)+Q.$$

Chứng minh. Hệ số cao nhất của P phải thỏa mãn phương trình

$$P^{*2}(f^*g^*)^n=P^*(h^*)^n+\text{ Hệ số của } x^{nh} \text{ trong } Q.$$

Suy ra P^* chỉ có thể nhận nhiều nhất 2 giá trị.

Bài toán 3.41. *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn phương trình*

$$P^2(x)-P(x^2)=2x^4,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Hướng dẫn. Nếu đặt $P(x)=ax^k+R(x)$, với $a\neq 0$, $\deg(R)=r<k$ thì ta có

$$P^2(x)-P(x^2)=(a^2-a)x^{2k}+2ax^kR(x)+R^2(x)-R(x^2).$$

Từ đó suy ra $\deg(P^2(x)-P(x^2))$ hoặc bằng $2k$ nếu $a\neq 1$, hoặc bằng $k+r$ nếu $a=1$ và $r\geq 0$, hoặc bằng $-\infty$ khi $a=1$ và $r=-\infty$ (tức là đồng nhất 0). Từ đó, suy ra $k\leq 4$. Đến đây, ta dễ dàng tìm được các nghiệm của (1) là

$$P(x)\equiv x^4+1, P(x)\equiv x^3+x, P(x)\equiv 2x^2, P(x)\equiv -x^2.$$

Bài toán 3.42. *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn phương trình*

$$P(x^2-2)=P^2(x)-2,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Có 2 đa thức hằng thỏa mãn phương trình là đa thức đồng nhất -1 và đa thức đồng nhất 2. Với các đa thức bậc lớn hơn hay bằng 1, áp dụng hệ quả **2** ở trang 417 ta suy ra với mỗi số nguyên dương n, tồn tại không quá 1 đa thức $P(x)$ thỏa mãn (1). Điểm khó ở đây là ta không có cơ chế đơn giản để xây dựng các nghiệm. Dùng phương pháp đồng nhất hệ số, ta tìm được các nghiệm bậc 1, 2, 3, 4 lần lượt là:

$$x, x^2-2, x^3-3x, x^4-4x^2+2.$$

Từ đây, có thể dự đoán được quy luật của dãy nghiệm như sau:

$$P_0=2, P_1=x, P_{n+1}=xP_n-P_{n-1}, n=1,2,3,\ldots \tag{2}$$

Cuối cùng, để hoàn tất lời giải bài toán, ta chỉ cần chứng minh các đa thức thuộc dãy đa thức xác định bởi (2) thỏa mãn phương trình (1). Ta có thể thực hiện điều này bằng cách sử dụng quy nạp toán học hoặc bằng cách như sau: Xét x bất kỳ thuộc $[-2,2]$, đặt $x=2\cos t$ thì từ công thức (2), ta suy ra

$$P_2(x)=4\cos^2 t-2=2\cos 2t,\ P_3(x)=2\cos t.2\cos 2t-2\cos t=2\cos 3t,$$

và nói chung $P_n(x)=2\cos(nt)$. Từ đó

$$\begin{aligned}P_n(x^2-2)&=P_n(4\cos^2 t-2)=P_n(2\cos 2t)=2\cos(2nt)\\&=4\cos^2(nt)-2=P_2(x)-2.\end{aligned}$$

Đẳng thức này đúng với mọi x thuộc $[-2,2]$ do đó đúng với mọi x. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

3.5 Sử dụng số phức để giải phương trình hàm đa thức

Nghiệm của đa thức đóng vai trò quan trọng trong việc xác định một đa thức. Cụ thể nếu đa thức $P(x)$ bậc n ($n\in\mathbb{N}^*$) có n nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thì $P(x)$ có dạng

$$P(x)=c(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Tuy nhiên nếu chỉ xét các nghiệm thực thì trong nhiều trường hợp sẽ không đủ số nghiệm. Hơn nữa trong bài toán phương trình hàm đa thức, nếu chỉ xét các nghiệm thực thì lời giải sẽ không hoàn chỉnh. Định lí cơ bản của đại số vì vậy đóng một vai trò hết sức quan trọng trong dạng toán này.

- **Định lí cơ bản của đại số.** Mọi đa thức bậc n hệ số phức (thực)

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \text{ (với } a_n\neq 0)$$

đều có đủ n nghiệm phức (phân biệt hay trùng nhau).

- **Định lí Viet thuận:** Nếu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là n nghiệm (phân biệt hay trùng nhau) của đa thức $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ ($a_n\neq 0$) thì:

$$\begin{aligned}S_1&=x_1+x_2+\cdots+x_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}\\S_2&=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\frac{a_{n-2}}{a_n}\\S_3&=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\frac{a_{n-3}}{a_n}\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\S_n&=x_1x_2\ldots x_n=(-1)^n.\frac{a_0}{a_n}.\end{aligned}$$

- **Định lí Viet đảo:** Nếu n số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa mãn

$$\begin{aligned}&x_1+x_2+\cdots+x_n=S_1\\&x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=S_2\\&x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=S_3\\&\cdots\cdots\cdots\\&x_1x_2\ldots x_n=S_n\end{aligned}$$

thì $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là nghiệm của phương trình

$$x^n-S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}S_{n-1}x+(-1)^nS_n=0.$$

- Cho hai số phức z_1 và z_2. Khi đó:
$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$
$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $z_1=kz_2$, với $k\ge 0$.
$|z_1-z_2|\ge||z_1|-|z_2||$.

Bài toán 3.43 (Olympic Hồng Kông-1999). *Cho k là số nguyên dương. Tìm các đa thức hệ số thực thỏa mãn điều kiện $P(P(x))=[P(x)]^k$, $\forall x\in\mathbb{R}$.* (1)

Giải. Xét trường hợp $P(x)\equiv C$ (C là hằng số). Từ (1) được $C=C^k$. Khi $k=1$ thì C là hằng số bất kì. Khi $k>1$ thì $C=0$ hoặc $C=1$. Xét trường hợp $\deg P\ge 1$. Vì đa thức $P(x)-x$ luôn có nghiệm (xét cả nghiệm phức) với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, tồn tại $\alpha_n\in\mathbb{C}$ sao cho $P(\alpha_n)=\alpha_n$. Từ đó

$$P(\alpha_n)=P(P(\alpha_n))\overset{\text{theo (1)}}{=}[P(\alpha_n)]^k=\alpha_n^k,\ \forall n=1,2,\ldots \tag{2}$$

Từ (2) suy ra đa thức $P(x)-x^k$ có vô số nghiệm, hay $P(x)-x^k\equiv 0$, nghĩa là $P(x)\equiv x^k$. Thử lại thấy thỏa mãn.
Kết luận: Nếu $k=0$ thì $P(x)\equiv C$ (C là hằng số bất kì). Nếu $k>1$ thì các đa thức thỏa mãn đề bài là

$$P(x)\equiv 0,\ P(x)\equiv 1,\ P(x)\equiv x^k.$$

Bài toán 3.44. *Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn*

$$P(x)P(x+1)=P(x^2+x+1),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Nếu $P(x)\equiv a$ (a là hằng số) thì thay vào (1) ta được

$$a^2=a\Leftrightarrow a(a-1)=0\Leftrightarrow a\in\{0,1\}.$$

Bây giờ ta xét $P(x)$ là đa thức có bậc lớn hơn hoặc bằng 1. Giả sử a là một nghiệm của $P(x)$. Khi đó a^2+a+1 cũng là nghiệm. Trong (1) thay x bởi $x-1$ ta được

$$P(x-1)P(x)=P(x^2-x+1),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Vì $P(a)=0$ nên suy ra $P(a^2-a+1)=0$, vậy a^2-a+1 cũng là nghiệm của $P(x)$. Chọn a là nghiệm có môđun lớn nhất (nếu có nhiều nghiệm như thế thì ta chọn một trong chúng). Từ cách chọn suy ra

$$\left|a^2+a+1\right|\le|a|,\ \left|a^2-a+1\right|\le|a|.$$

Theo bất đẳng thức về môđun ta có

$$|2a|=\left|\left(a^2+a+1\right)+\left(-a^2+a-1\right)\right|\le\left|a^2+a+1\right|+\left|-a^2+a-1\right|$$
$$=\left|a^2+a+1\right|+\left|a^2-a+1\right|\le|a|+|a|=2|a|=|2a|.$$

Như vậy dấu bằng phải xảy ra ở các bất đẳng thức trên, suy ra

$$\left|\left(a^2+a+1\right)+\left(-a^2+a-1\right)\right|=\left|a^2+a+1\right|+\left|-a^2+a-1\right|,$$

suy ra tồn tại số thực $s\ge 0$ sao cho $a^2+a+1=s\left(-a^2+a-1\right)$. Nếu

$$\left|a^2+a+1\right|<\left|a^2-a+1\right|$$

thì

$$2\left|a^2-a+1\right|>\left|a^2-a+1\right|+\left|a^2+a+1\right|\ge|2a|\Rightarrow\left|a^2-a+1\right|>|a|.$$

Tương tự nếu $\left|a^2+a+1\right|>\left|a^2-a+1\right|$ thì $\left|a^2+a+1\right|>|a|$, mâu thuẫn với cách chọn a. Vậy $\left|a^2-a+1\right|=\left|a^2+a+1\right|$. Từ đó $s=1$ và ta có

$$a^2+a+1=-a^2+a-1\Leftrightarrow a^2=-1\Leftrightarrow a=\pm i.$$

Vậy $P(x)=(x^2+1)^mQ(x)$, trong đó $Q(x)$ là đa thức không chia hết cho x^2+1. Thay vào (1), ta có

$$(x^2+1)^mQ(x)(x^2+2x+2)^mQ(x+1)=[(x^2+x+1)^2+1]^mQ(x^2+x+1).$$

Hay $Q(x)Q(x+1)=Q(x^2+x+1)$. Vậy $Q(x)$ cũng thỏa (1). Nếu như $Q(x)$ có nghiệm thì ta làm tương tự như trên, nghiệm có môđun lớn nhất phải là $i,-i$. Nhưng điều này không thể vì $Q(x)$ không chia hết cho x^2+1. Bởi vậy $Q(x)$ là hằng số. Giả sử đó là c, thay vào (1) ta được $c=1$. Vậy $P(x)=(x^2+1)^m$.
Thử lại ta kết luận: tất cả các đa thức thỏa mãn đề bài là

$$P(x)\equiv 0, P(x)\equiv 1, P(x)=(x^2+1)^m\ (\text{với } m=1,2,\ldots)$$

Bài toán 3.45. *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn:*

$$P(x)P(2x^2)=P(2x^3+x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Với đa thức hằng $P(x)\equiv a$, ta có $a^2=a\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=1.\end{array}\right.$ Ta thấy $P(x)\equiv 0$ và $P(x)\equiv 1$ thỏa mãn bài ra. Tiếp theo xét trường hợp $P(x)$ khác hằng số. Giả sử

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \text{ với } a_n\ne 0$$

là đa thức thỏa mãn các yêu cầu bài toán. Từ (1) ta có

$$(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)\left[a_n(2x^2)^n+\cdots+a_1(2x^2)+a_0\right]$$
$$\equiv\left[a_n(2x^3+x)^n+\cdots+a_1(2x^3+x)+a_0\right].$$

So sánh hệ số của x^{3n} và hệ số tự do ở hai vế ta được

$$\left\{\begin{array}{l}2^na_n^2=2^na_n\\a_0^2=a_0\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a_n^2=a_n\\a_0\in\{0,1\}\end{array}\right.\overset{\text{do } a_n\ne 0}{\Rightarrow}\left\{\begin{array}{l}a_n=1\\a_0\in\{0,1\}.\end{array}\right.$$

Trường hợp 1. $a_n=1$ và $a_0=0$. Khi đó

$$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x=x^lP_1(x),\ \text{với } l\in\mathbb{N}^*,\ P_1(0)\ne 0.$$

Thay vào (1) ta được

$$x^lP_1(x)(2x^2)^lP_1(2x^2)=(2x^3+x)^lP_1(2x^3+x),\ \forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow P_1(x)(2x^2)^lP_1(2x^2)=(2x^2+1)^lP_1(2x^3+x),\ \forall x\ne 0. \tag{2}$$

Do hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$, nên từ (2), cho $x\to 0$ ta được $P_1(0)=0$, đến đây ta gặp mâu thuẫn. Vậy trường hợp 1 không xảy ra.
Trường hợp 2. $a_n=1$ và $a_0=1$. Giả sử α là một nghiệm của $P(x)$. Khi đó

do $a_0 = 1$ nên $\alpha \neq 0$. Ta có $P(2\alpha^3 + \alpha) = P(\alpha)P(2\alpha^2) = 0$. Suy ra $2\alpha^3 + \alpha$ cũng là một nghiệm của $P(x)$. Xét dãy số (α_n) như sau:

$$\alpha_0 = \alpha \neq 0\,;\ \alpha_{n+1} = 2\alpha_n^3 + \alpha_n,\ \forall n = 0, 1, 2, \ldots$$

Nếu $\alpha > 0$ thì (α_n) là dãy tăng nghiêm ngặt, nếu $\alpha < 0$ thì (α_n) là dãy giảm nghiêm ngặt. Từ đây suy ra nếu $P(x)$ có một nghiệm thực khác không thì nó sẽ có vô số nghiệm thực. Điều này không thể xảy ra. Kết hợp $P(0) = 1 \neq 0$ suy ra $P(x) \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra $P(x)$ chỉ có nghiệm phức $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Theo định lí Viet ta có

$$z_1.z_2 \ldots z_n = (-1)^n \Rightarrow |z_1|\,|z_2| \ldots |z_n| = 1. \tag{3}$$

Nếu tồn tại z_k sao cho $|z_k| > 1$. Điều này dẫn đến

$$\left|2z_k^2 + 1\right| = \left|2z_k^2 - (-1)\right| \geq \left|2z_k^2\right| - |-1| = 2\left|z_k^2\right| - 1 > 1.$$

Do đó $\left|2z_k^3 + z_k\right| = |z_k|\left|2z_k^2 + 1\right| > |z_k|$, vậy $P(x)$ có vô số nghiệm, điều này không thể xảy ra. Vậy với mọi $k = 1, 2, \ldots n$ thì $|z_k| \leq 1$, từ đây và từ (3) suy ra $|z_k| = 1,\ \forall k = \overline{1, n}$. Giả sử $\alpha = \cos\phi + i\sin\phi$ là nghiệm phức của $P(x)$, khi đó $2\alpha^3 + \alpha$ cũng là nghiệm của $P(x)$ và

$$1 = \left|2\alpha^3 + \alpha\right| = |\alpha|.\left|2\alpha^2 + 1\right| = \left|2\alpha^2 + 1\right| = |2\cos 2\phi + 2i\sin 2\phi + 1|$$
$$= |(2\cos 2\phi + 1) + (2\sin 2\phi)\,i| = \sqrt{(2\cos 2\phi + 1)^2 + (2\sin 2\phi)^2}.$$

Từ đó

$$(2\cos 2\phi + 1)^2 + (2\sin 2\phi)^2 = 1 \Leftrightarrow \cos 2\phi = -1 \Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Suy ra $\alpha = \pm i$. Do đó $P(x) = (x^2 + 1)^k$, $k \in \mathbb{N}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy tất cả các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$P(x) \equiv 0\,;\ P(x) \equiv (x^2 + 1)^k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Lưu ý. Trong trường hợp 1, để suy ra $P_1(0) = 0$ (để tạo ra mâu thuẫn) mà không cần dùng giới hạn ta có thể làm như sau: Từ (2) suy ra đa thức

$$P_1(x)(2x^2)^l P_1(2x^2) - (2x^2 + 1)^l P_1(2x^3 + x)$$

có vô số nghiệm nên nó là đa thức không, nghĩa là

$$P_1(x)(2x^2)^l P_1(2x^2) = (2x^2 + 1)^l P_1(2x^3 + x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đây cho $x = 0$ ta được $P_1(0) = 0$, mâu thuẫn.

Bài toán 3.46. *Tìm các đa thức $P(x)$ có hệ số thực thỏa mãn điều kiện:*

$$P(x).P(2x^2) = P(x^3 + x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Với đa thức hằng $P(x) \equiv a$, ta có $a^2 = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 1. \end{array}\right.$ Ta thấy $P(x) \equiv 0$ và $P(x) \equiv 1$ thỏa mãn bài ra. Tiếp theo xét trường hợp $P(x)$ khác hằng số:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{2}$$

Từ (1) ta có $P(0) = 0$ hoặc $P(0) = 1$. Do đó $a_0 = 0$ hoặc $a_0 = 1$.

Trường hợp 1. $a_0 = 0$. Khi đó giả sử

$$P(x) = x^m Q(x),\ Q(0) \neq 0,\ m \in \mathbb{N}^*.$$

Thay vào (1) ta được

$$x^m Q(x).(2x^2)^m.Q(2x^2) = (x^3 + x)^m Q(x^3 + x),\ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow Q(x).(2x^2)^m Q(2x^2) = (x^2 + 1)^m Q(x^3 + x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Từ (3), cho $x = 0$ ta được $Q(0) = 0$, đến đây ta gặp mâu thuẫn.

Trường hợp 2. $a_0 = 1$. Đồng nhất hệ số bậc cao nhất ở (1) ta được

$$a_n.a_n.2^n = a_n \Leftrightarrow a_n = \frac{1}{2^n}.$$

Từ (1) suy ra nếu $P(x_0) = 0$ thì $P(x_0^3 + x_0) = 0$, vậy nếu x_0 là nghiệm của $P(x)$ thì $x_0^3 + x_0$ cũng là nghiệm của $P(x)$. Xét dãy số (x_n) như sau:

$$x_0 \neq 0\,;\ x_{n+1} = x_n^3 + x_n,\ \forall n = 0, 1, 2, \ldots$$

Nếu $x_0 > 0$ thì (x_n) là dãy tăng nghiêm ngặt, nếu $x_0 < 0$ thì (x_n) là dãy giảm nghiêm ngặt. Từ đây suy ra nếu $P(x)$ có một nghiệm thực khác không thì nó sẽ có vô số nghiệm thực. Điều này không thể xảy ra. Kết hợp $P(0) = 1 \neq 0$ suy ra $P(x) \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra $P(x)$ chỉ có nghiệm phức $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Theo định lí Viet ta có

$$z_1.z_2 \ldots z_n = (-1)^n.2^n \Rightarrow |z_1|\,|z_2| \ldots |z_n| = 2^n.$$

Vì vậy tồn tại z_k sao cho $|z_k| \geq 2$. Điều này dẫn đến

$$\left|z_k^2 + 1\right| = \left|z_k^2 - (-1)\right| \geq \left|z_k^2\right| - |-1| = \left|z_k^2\right| - 1 \geq 3.$$

Do đó $\left|z_k^3 + z_k\right| = |z_k|\left|z_k^2 + 1\right| > |z_k|$, vậy $P(x)$ có vô số nghiệm, điều này không thể xảy ra. Vậy chỉ có hai đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là $P(x) \equiv 0$ và $P(x) \equiv 1$.

Lưu ý. Bài toán 3.45 và bài toán 3.46 được tổng quát hoá thành bài toán 3.47 sau đây.

Bài toán 3.47. *Cho số thực $\alpha \in [0;2]$. Tìm tất cả các đa thức khác không $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn đồng nhất thức*

$$P(x)P(2x^2) = P(\alpha x^3 + x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hướng dẫn.

- Khi $\alpha = 0$ thì $P(x)P(2x^2) = P(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$, dẫn tới $P(x) \equiv 0$, $P(x) \equiv 1$.
- Khi $\alpha = 2$, tiến hành tương tự như bài toán 3.45.
- Khi $0 < \alpha < 2$, tiến hành tương tự như bài toán 3.46.

Bài toán 3.48 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2011). *Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn phương trình hàm*

$$P(x)P(3x^2) = P(3x^3 + x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 3.49. *Tìm tất cả các đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn*

$$f(\sin x + \cos x) = f(\sin x) + f(\cos x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Dễ thấy đa thức $f(x) \equiv c$ (c là hằng số) thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Tiếp theo giả sử $\deg(f) = n \geq 1$. Đặt $t = \tan\dfrac{x}{2}$, khi đó

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Vậy (1) trở thành

$$f\left(\frac{1+2x-x^2}{1+x^2}\right) = f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + f\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right). \tag{2}$$

Giả sử $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^k + a_0$. Nhân cả hai vế của (2) với $(1+x^2)^n$, rồi thay x bởi i (i là đơn vị ảo, $i^2 = -1$) ta được

$$a_n(2+2i)^n = a_n\left[(2i)^n + 2^n\right] \Leftrightarrow (1+i)^n = 1 + i^n. \tag{3}$$

Số phức $(1+i)^n$ có môđun là $\sqrt{2}^n$. Ta có

$$1 + i^n = 1 + \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^n = 1 + \cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\Rightarrow |1+i^n| = \sqrt{\left(1+\cos\frac{n\pi}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{n\pi}{2}} = \sqrt{2+2\cos\frac{n\pi}{2}} = \sqrt{4\cos^2\frac{n\pi}{4}}.$$

Do đó từ (3) suy ra

$$2^n = 4\cos^2\frac{n\pi}{4} \Leftrightarrow 2^{n-2} = \cos^2\frac{n\pi}{4}. \tag{4}$$

Khi $n = 1$ thì (4) đúng. Khi $n = 2$ thì (4) không đúng. Khi $n > 2$ thì $2^{n-2} > 2 > \cos^2\dfrac{n\pi}{4}$, vậy (4) không đúng khi $n > 2$. Tóm lại (4) $\Leftrightarrow n = 1$. Do đó $\deg(f) = 1$, suy ra $f(x) = ax + b$. Thay vào (1) được $b = 0$. Vậy $f(x) \equiv ax$. Các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x) \equiv c$, $f(x) \equiv ax$ (a, c là các hằng số, $a \neq 0$).

Bài toán 3.50. *Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$, $Q(x)$ thỏa mãn*

$$P(x)Q(x+1) - P(x+1)Q(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử tồn tại $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Từ (1) ta có $P(x-1)Q(x) - P(x)Q(x-1) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Kết hợp với (1) ta được

$$P(x)Q(x+1) - P(x+1)Q(x) = P(x-1)Q(x) - P(x)Q(x-1)$$
$$\Rightarrow P(x)\left[Q(x+1) + Q(x-1)\right] = Q(x)\left[P(x+1) + P(x-1)\right],\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Giả sử x_0 (x_0 có thể là số phức) là nghiệm của $P(x)$, khi đó $P(x_0) = 0$, thay vào (2) được $Q(x_0)\left[P(x_0+1) + P(x_0-1)\right] = 0$, nếu $Q(x_0) = 0$ thì từ (1) ta có

$$1 = P(x_0)Q(x_0+1) - P(x_0+1)Q(x_0) = 0,$$

vô lí, vậy $Q(x_0) \neq 0$, suy ra $P(x_0+1) + P(x_0-1) = 0$, hay x_0 là nghiệm của đa thức $P(x+1) + P(x-1)$, như vậy mọi nghiệm của $P(x)$ cũng là nghiệm của $P(x+1) + P(x-1)$, suy ra $P(x)$ là ước của $P(x+1) + P(x-1)$. Mà hai đa thức $P(x)$ và $P(x+1) + P(x-1)$ có cùng bậc nên

$$P(x+1) + P(x-1) = aP(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\ (a \text{ là hằng số})$$
$$\Rightarrow \frac{P(x+1)}{P(x)} + \frac{P(x-1)}{P(x)} = a \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{P(x+1)}{P(x)} + \frac{P(x-1)}{P(x)}\right) = a \Rightarrow a = 2.$$

Do đó

$$P(x+1) + P(x-1) = 2P(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow P(x+1) - P(x) = P(x) - P(x-1),\ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow P(x+1) - P(x) = b\ (b \text{ là hằng số}),\ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow P(x+1) = P(x) + b,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Đặt $P(x) = bx + H(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Từ (3) suy ra đa thức $H(x)$ thỏa mãn

$$b(x+1) + H(x+1) = bx + H(x) + b,\ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow H(x+1) = H(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Như vậy $H(x)$ là đa thức hằng, do đó $P(x) = bx + a,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (a và b là hằng số). Thay vào (2) ta được

$$(bx+a)\left[Q(x+1) + Q(x-1)\right] = 2(bx+a)Q(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow Q(x+1)+Q(x-1)=2Q(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Tương tự như trên ta được $Q(x)=b'x+a'$, $\forall x\in\mathbb{R}$ (a' và b' là hằng số). Thay vào (1) ta được

$$(bx+a)\left(b'x+b'+a'\right)-(bx+b+a)\left(b'x+a'\right)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow(bb'+ba'+ab')x+ab'+aa'=(ba'+bb'+ab')x+ba'+aa'+1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Hay $ab'=ba'+1$. Vậy cặp đa thức $P(x)$, $Q(x)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$P(x)\equiv bx+a \text{ và } Q(x)\equiv b'x+a',$$

với a, a', b, b' là các hằng số thỏa mãn $ab'-ba'=1$.

3.6 Phương pháp sáng tác bài toán mới

Ví dụ 1. *Từ phương trình hàm đa thức trong bài toán 3.5 ở trang 386:*

$$xP(x-4)=(x-2015)P(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Ta đặt $P(x)=Q(x)+3x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (1) được

$$x\left[Q(x-4)+3(x-4)\right]=(x-2015)\left[Q(x)+3x\right],\forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow xQ(x-4)+6033x=(x-2015)Q(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Ta được bài toán sau.

Bài toán 3.51. *Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $Q(x)$ thỏa mãn:*

$$xQ(x-4)+6033x=(x-2015)Q(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Hướng dẫn. Cách tìm lời giải tương tự như bài toán 3.8 ở trang 387.

Ví dụ 2. *Từ hằng đẳng thức $-1=1-2=\left(1-\sqrt[3]{2}\right)\left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)$, ta có bài toán sau.*

Bài toán 3.52. *Tìm đa thức không đồng nhất không, bậc nhỏ nhất có hệ số nguyên nhận $1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ làm nghiệm.*

Giải.

$$x=1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\Rightarrow x\left(1-\sqrt[3]{2}\right)=1-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=-1\Rightarrow x\sqrt[3]{2}=1+x$$
$$\Rightarrow 2x^3=(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3\Rightarrow x^3-3x^2-3x-1=0.$$

Vậy $1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ là nghiệm của đa thức bậc ba hệ số nguyên

$$f(x)=x^3-3x^2-3x-1.$$

Nếu $f(x)$ có nghiệm hữu tỉ thì $f(x)$ có nghiệm nguyên là ước của -1. Các số 1, -1 không là nghiệm của $f(x)$, do đó $f(x)$ không có nghiệm hữu tỉ và $1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ là số vô tỉ. Do đó $1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ không là nghiệm của đa thức bậc nhất có hệ số nguyên. Giả sử $1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ là nghiệm của đa thức bậc hai $g(x)$ với hệ số nguyên. Chia $f(x)$ cho $g(x)$, giả sử được là

$$f(x)=g(x).q(x)+r(x), \text{với } \deg(r)<2$$

Vì $f(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})=0$ nên $r(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})=0$, do đó $r(x)\equiv 0$. Bởi vậy $f(x)=g(x).q(x)$, với $q(x)$ là đa thức có bậc 1 và có hệ số hữu tỉ. Suy ra $f(x)$ có nghiệm hữu tỉ, điều này mâu thuẫn với $f(x)$ không có nghiệm hữu tỉ. Vậy $f(x)$ là đa thức bậc nhỏ nhất có hệ số nguyên nhận $1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ làm nghiệm.

Ví dụ 3. *Xét đa thức:*

$$P(x)=(x^3+1)(x-1)=(x+1)(x-1)(x^2-x+1)=(x^2-1)(x^2-x+1)$$

Suy ra $P(x+1)=[(x+1)^3+1)]x=(x^3+3x^2+3x+2)x$ và ta thu được bài toán sau.

Bài toán 3.53. *Tìm đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn:*

$$(x^3+3x^2+3x+2)xP(x)=(x^2-1)(x^2-x+1)P(x+1),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Hướng dẫn. Tương tự bài toán 3.7 ở trang 387.

Ví dụ 4. *Xét đa thức $P(x)=(x^2+1)(x^2-3x+2)=(x^2+1)(x-1)(x-2)$. Vậy*

$$P(2x+1)=[(2x+1)^2+1](2x)(2x-1)=(4x^2+4x+2)(4x^2-2x)$$

và ta thu được bài toán sau.

Bài toán 3.54. *Tìm đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn*

$$(4x^2+4x+2)(4x^2-2x)P(x)=(x^2+1)(x^2-3x+2)P(2x+1),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Ví dụ 5. *Với $a,b,c\in\mathbb{R}$ thỏa $ab+bc+ca=0$ thì $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$. Ta có bài toán sau.*

Bài toán 3.55. *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn*

$$P^2(a)+P^2(b)+P^2(c)=P^2(a+b+c), \tag{1}$$

với $a,b,c\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $ab+bc+ca=0$.

Giải. Trong (1) cho $a=b=c=0$ ta được $P(0)=0$. Với mọi $x\in\mathbb{R}$, bộ $(6x;3x;-2x)$ thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=0$. Do đó thay vào (1) ta được

$$P^2(6x)+P^2(3x)+P^2(-2x)=P^2(7x),\forall x\in\mathbb{R} \tag{2}$$

Nếu $P(x)$ là đa thức hằng thì $P(x)\equiv 0$. Giả sử $\deg(P)=n\geq 1$. Khi đó $P(x)$ có dạng $P(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$ với $a_n\neq 0$ (quy ước $x^0=1$). Thay vào (2) ta được

$$\left(\sum_{i=0}^{n}a_i6^ix^i\right)^2+\left(\sum_{i=0}^{n}a_i3^ix^i\right)^2+\left(\sum_{i=0}^{n}a_i(-2)^ix^i\right)^2=\left(\sum_{i=0}^{n}a_i7^ix^i\right)^2$$

So sánh hệ số của x^{2n} ở hai vế ta được

$$a_n^2(36^n+9^n+4^n)=a_n^249^n\Leftrightarrow 36^n+9^n+4^n=49^n$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{36}{49}\right)^n+\left(\frac{9}{49}\right)^n+\left(\frac{4}{49}\right)^n=1\Leftrightarrow n=1$$

(do hàm số mũ $y=a^x$ nghịch biến khi $0<a<1$). Vậy bậc của đa thức $P(x)$ bằng 1, kết hợp với $P(0)=0$ suy ra $P(x)=mx,\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy tất cả các đa thức cần tìm là

$$P(x)=mx,\forall x\in\mathbb{R}\ \text{(với } m \text{ là hằng số tùy ý).}$$

Ví dụ 6. *Từ $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, suy ra, nếu $3ab(a+b)=6b^3$ thì $(a+b)^3=a^3+7b^3$. Từ đó ta thu được bài toán sau.*

Bài toán 3.56. *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn*

$$P(a+b)=P(a)+7P(b), \tag{1}$$

với $a,b\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $ab(a+b)=2b^3$.

Giải. Nếu $P(x)$ là đa thức hằng thì $P(x)\equiv 0$. Giả sử $\deg(P)=n\geq 1$. Trong (1) cho $a=b=0$ ta được $P(0)=0$. Với mọi $x\in\mathbb{R}$, bộ $(x;x)$ thỏa mãn điều kiện $ab(a+b)=2b^3$. Do đó thay vào (1) ta được

$$P(2x)=8P(x),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Giả sử $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x$, với $a_n\neq 0$ (do $P(0)=0$). Thay vào (2) ta được

$$a_n(2x)^n+a_{n-1}(2x)^{n-1}+\cdots+a_1(2x)=8a_nx^n+8a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+8a_1x$$
$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}a_i\left(2^i-8\right)x^i=0\Leftrightarrow a_i\left(2^i-8\right)=0,\forall i=1,2,\ldots,n \tag{3}$$

Ta có $2^i-8=0\Leftrightarrow 2^i=2^3\Leftrightarrow i=3$. Kết hợp với (3) suy ra với mọi $i\in\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{3\}$ ta có $a_i=0$. Vậy $P(x)=mx^3,\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy tất cả các đa thức cần tìm là

$$P(x)=mx^3,\forall x\in\mathbb{R}\ \text{(với } m \text{ là hằng số tùy ý).}$$

Ví dụ 7. *Với $a,b,c\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $ab+bc+ca=0$ ta có*

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$$
$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a+b+c)^2$$
$$(ab+bc+ca)^2=0\Rightarrow 2abc(a+b+c)=-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

Suy ra

$$\begin{aligned}&(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4=4(a+b+c)^4\\&-2\left[(a-b)^2(b-c)^2+(b-c)^2(c-a)^2+(c-a)^2(a-b)^2\right]\\&=4(a+b+c)^4-2\left[(b^2+2ca)^2+(c^2+2ab)^2+(a^2+2bc)^2\right]\\&=4(a+b+c)^4\\&-2\left[a^4+b^4+c^4+4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+4abc(a+b+c)\right]\\&=4(a+b+c)^4-2\left[a^4+b^4+c^4+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\right]\\&=4(a+b+c)^4-2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\\&=4(a+b+c)^4-2(a+b+c)^4=2(a+b+c)^4.\end{aligned}$$

Tóm lại ta có

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a+b+c)^2$$
$$(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4=2(a+b+c)^4.$$

Từ đó ta dễ dàng thấy rằng phương trình hàm đa thức

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

nhận đa thức $P(x)=ax^4+bx^2$ làm nghiệm. Vậy ta thu được bài toán sau đây.

Bài toán 3.57 (Olympic toán quốc tế 2004). *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn*

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c), \tag{1}$$

với $a,b,c\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $ab+bc+ca=0$.

Giải. Trước hết ta tìm một nghiệm nguyên của phương trình

$$ab+bc+ca=0.$$

Chọn $a = 6$ ta được $6b + 6c + bc = 0$. Chọn $b = 3$ ta được

$$18 + 6c + 3c = 0 \Rightarrow c = -2.$$

Vậy bộ $(a; b; c) = (6; 3; -2)$ là một nghiệm nguyên của $ab + bc + ca = 0$. Suy ra với mọi $x \in \mathbb{R}$, bộ $(6x; 3x; -2x)$ thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 0$. Do đó thay vào (1) ta được

$$P(3x) + P(5x) + P(-8x) = 2P(7x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Giả sử $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ (quy ước $x^0 = 1$). Thay vào (2) ta được

$$\sum_{i=0}^{n} a_i (3x)^i + \sum_{i=0}^{n} a_i (5x)^i + \sum_{i=0}^{n} a_i (-8x)^i = 2 \sum_{i=0}^{n} a_i (7x)^i, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \left(3^i + 5^i + (-8)^i\right) x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i (2.7^i) x^i, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \left(3^i + 5^i + (-8)^i - 2.7^i\right) x^i = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta thu được

$$\left(3^i + 5^i + (-8)^i - 2.7^i\right) a_i = 0, \quad \forall i = 0, 1, 2, \ldots, n. \quad (3)$$

Đặt $\lambda_i = 3^i + 5^i + (-8)^i - 2.7^i$, $\forall i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Ta thử tính một vài giá trị ban đầu của dãy số $\{\lambda_i\}_{i=0}^{n}$

$$\lambda_0 = 1 > 0, \quad \lambda_1 = 3 + 5 - 8 - 2.7 < 0, \quad \lambda_2 = 9 + 25 + 64 - 2.49 = 0$$
$$\lambda_3 = 27 + 125 - 512 - 2.343 < 0, \quad \lambda_4 = 81 + 625 + 4096 - 4802 = 0.$$

Vậy ta nhận thấy rằng với $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ thì: $\lambda_i < 0$ với i lẻ ; $\lambda_i > 0$ khi $i = 0$ hoặc $i \geq 6$ và chẵn ; $\lambda_i = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} i = 2 \\ i = 4 \end{array}\right.$ Vậy kết hợp với (3) ta suy ra: khi $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\} \setminus \{2, 4\}$ thì $a_i = 0$. Bởi vậy $P(x) = mx^2 + nx^4, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy tất cả các đa thức cần tìm là

$$P(x) = mx^2 + nx^4, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } m \text{ và } n \text{ là các hằng số bất kì).}$$

Chương 4

Phương trình hàm trên $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

Giải phương trình hàm trên tập số nguyên hoặc số hữu tỉ là tìm các hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán mà tập xác định của chúng là tập số nguyên hoặc hữu tỉ. Ở đây tính "rời rạc" của tập xác định và tập giá trị có vai trò quan trọng.

4.1 Áp dụng một số nguyên lý và tính chất đặc trưng của tập số nguyên

4.1.1 Nguyên lý quy nạp toán học

Nguyên lý quy nạp là một nguyên lý quen thuộc và rất quan trọng trong chương trình toán phổ thông. Nguyên lý này đôi khi là một công cụ rất hữu hiệu để giải quyết một số bài toán khó liên quan đến tập số nguyên, chẳng hạn việc giải các phương trình hàm trên tập rời rạc. Phương pháp quy nạp để chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ là mệnh đề đúng với mọi giá trị nguyên dương n (tức là $n = 1, 2, \ldots$) như sau:

Bước 1 (bước cơ sở, hay bước khởi đầu). Chứng minh $A(n)$ đúng khi $n = 1$.

Bước 2 (bước quy nạp, hay bước "di truyền"). Giả sử $A(n)$ đúng khi $n = k$ ($k = 1, 2, \ldots$), ta chứng minh $A(n)$ cũng đúng khi $n = k + 1$.

Bước 3. Kết luận $A(n)$ đúng với mọi $n = 1, 2, \ldots$

Lưu ý.

- Trong bước 2, khi chứng minh $A(n)$ cũng đúng khi $n = k + 1$, ta phải vận dụng giả thiết quy nạp $A(n)$ đúng khi $n = k$.
- Trong nhiều trường hợp khi ta phải chứng minh mệnh đề $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ ($p \in \mathbb{N}, p > 1$) khi đó ở bước 1 ta kiểm nghiệm $A(n)$ đúng khi $n = p$ (thay cho việc kiểm nghiệm $A(n)$ đúng khi $n = 1$).

Bài toán 4.1. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *thỏa mãn* $f(0)=1$ *và*

$$f(f(n))+3f(n)=4n+5,\ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{1}$$

Giải. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng với mọi $n\in\mathbb{N}$ thì

$$f(n)=n+1. \tag{2}$$

- Do $f(0)=1=0+1$ nên (1) đúng khi $n=0$.
- Giả sử (2) đúng khi $n=k$ $(k\in\mathbb{N})$, tức là $f(k)=k+1$. Ta cần chứng minh (2) cũng đúng khi $n=k+1$, tức là chứng minh $f(k+1)=k+2$. Ta có:

$$f(k+1)=f(f(k))\overset{\text{do (1)}}{=}4k+5-3f(k)=4k+5-3(k+1)=k+2.$$

Theo nguyên lí quy nạp suy ra: $f(n)=n+1,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Thử lại thấy hàm số này thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 4.2. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *sao cho*

$$f(f(n))+f(n)=2n+3,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta có

$$f(f(0))+f(0)=2.0+3\Leftrightarrow f(f(0))+f(0)=3\Rightarrow 0\le f(0)\le 3.$$

Nếu $f(0)=0$ thì $f(f(0))+f(0)=0$, mâu thuẫn. Nếu $f(0)=2$ thì

$$f(2)=f(f(0))=1\Rightarrow f(1)=f(f(2))=2.2+3-f(2)=6.$$

Từ đó $f(6)=f(f(1))=-1\notin\mathbb{N}$. Suy ra $f(0)\neq 2$. Tương tự ta cũng có $f(0)\neq 3$. Do đó $f(0)=1$. Ta có

$$f(f(0))+f(0)=3\Rightarrow f(1)=f(f(0))=2;\ f(f(1))+f(1)=5\Rightarrow f(2)=3.$$

Khi đó ta chứng minh rằng hàm số f cần tìm là $f(n)=n+1$. Thật vậy, ta chứng minh bằng quy nạp như sau: Với $n=0$ thì $f(0)=1=1+0$. Giả sử khẳng định đúng tới $n=k$, $(k\in\mathbb{N})$, tức là $f(k)=k+1$. Với $n=k+1$, ta có

$$f(k+1)=f(f(k))=2.k+3-f(k)=2.k+3-(k+1)=(k+1)+1.$$

Do đó khẳng định đúng với $n=k+1$. Vậy $f(n)=n+1,\forall n\in\mathbb{N}$. Thử lại, ta thấy hàm số $f(n)=n+1,\forall n\in\mathbb{N}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài toán 4.3 (Romania District Olympiad 2010). *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ *thỏa mãn*

$$f(n)+f(n+1)+f(f(n))=3n+1\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Giải. Từ (1) cho $n=1$, ta được $f(1)+f(2)+f(f(1))=4$. Do $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ nên chỉ có hai trường hợp sau có thể xảy ra.

- Trường hợp 1 : $f(1)=1$. Khi đó $f(2)=2$. Giả sử $f(k)=k$ $(k\in\mathbb{N}^*)$. Khi đó, theo (1) ta có

$$f(k)+f(k+1)+f(f(k))=3k+1$$
$$\Rightarrow k+f(k+1)+k=3k+1\Rightarrow f(k+1)=k+1.$$

Theo nguyên lý quy nạp suy ra $f(n)=n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Thử lại thấy hàm số này thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

- Trường hợp 2 : $f(1)=2$. Khi đó $f(2)=1$. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ thì $f(n)=n+(-1)^{n+1}$. (2)

Ta có (2) đúng khi $n=1$, $n=2$. Giả sử (2) đúng tới $n=k$, $k\in\mathbb{N}^*$, $k\ge 2$. Khi đó $f(k)=k+(-1)^{k+1}$, $f(k-1)=k-1+(-1)^k$. Theo (1) ta có

$$f(k)+f(k+1)+f(f(k))=3k+1$$
$$\Rightarrow k+(-1)^{k+1}+f(k+1)+f\left(k+(-1)^{k+1}\right)=3k+1. \tag{3}$$

∘ Nếu k chẵn $(k=2\ell,\ell\in\mathbb{N}^*)$ thì

$$f\left(k+(-1)^{k+1}\right)=f(k-1)=k-1+(-1)^k=k.$$

Thay vào (3), ta được

$$k+(-1)^{k+1}+f(k+1)+k=3k+1\Rightarrow f(k+1)=k+1+(-1)^{k+2}.$$

∘ Nếu k lẻ $(k=2\ell+1,\ell\in\mathbb{N}^*)$ thì $f\left(k+(-1)^{k+1}\right)=f(k+1)$. Thay vào (3), ta được

$$k+1+f(k+1)+f(k+1)=3k+1$$
$$\Rightarrow f(k+1)=k\Rightarrow f(k+1)=k+1+(-1)^{k+2}.$$

Vậy $f(k+1)=k+1+(-1)^{k+2}$. Theo nguyên lý quy nạp suy ra (2) đúng. Thử lại thấy hàm số $f(n)=n+(-1)^{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Kết luận : các hàm số cần tìm là

$$f(n)=n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\ f(n)=n+(-1)^{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Lưu ý. Đối với những phương trình hàm trên $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$, ta phải đặc biệt quan tâm đến tập xác định và tập giá trị của hàm số. Chẳng hạn ở bài toán 4.3, từ $f(1)+f(2)+f(f(1))=4$ và $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ ta suy ra $f(1)=1$ hoặc $f(1)=2$. Để vận dụng được phương pháp quy nạp thì kỹ năng dự đoán kết quả là rất quan trọng.

Bài toán 4.4 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2012). *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ *thỏa mãn* $f(0)=2$ *và*

$$f(x+f(x+2y))=f(2x)+f(2y),\ \forall x,y\in\mathbb{Z}. \quad (1)$$

Giải. Kí hiệu $P(u,v)$ nghĩa là thay x bởi u và thay y bởi v vào (1).

$$P(0,0)\Rightarrow f(f(0))=2f(0)\Rightarrow f(2)=4$$
$$P(0,1)\Rightarrow f(f(2))=2+f(2)\Rightarrow f(4)=6.$$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng với mọi $x\in\mathbb{Z}$ thì $f(2x)=2x+2$. (2)
Theo trên (2) đúng khi $x=0$. Giả sử (2) đúng tới $x=k$ $(k\in\mathbb{Z},k\geq 0)$.

$$P(0,k)\Rightarrow f(f(2k))=f(0)+f(2k)\Rightarrow f(2(k+1))=2(k+1)+2.$$

Vậy (2) cũng đúng khi $x=k+1$, suy ra (2) đúng với mọi $x\in\mathbb{Z},x\geq 0$. Với mọi $x\in\mathbb{Z},x\geq 0$, thực hiện $P(2x,-x)$ ta được

$$\begin{aligned}&f(2x+f(0))=f(4x)+f(-2x),\ \forall x\in\mathbb{Z},\ x\geq 0\\ \Rightarrow&f(2(x+1))=f(2(2x))+f(-2x),\ \forall x\in\mathbb{Z},\ x\geq 0\\ \Rightarrow&2(x+1)+2=2(2x)+2+f(-2x),\ \forall x\in\mathbb{Z},\ x\geq 0\\ \Rightarrow&f(-2x)=-2x+2,\ \forall x\in\mathbb{Z},\ x\geq 0\\ \Rightarrow&f(2x)=2x+2,\ \forall x\in\mathbb{Z},\ x\leq 0\\ \Rightarrow&f(2x)=2x+2,\ \forall x\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Do đó (1) được viết lại $f(x+f(x+2y))=2x+2y+4,\ \forall x,y\in\mathbb{Z}$. (3)
Tiếp theo ta chứng minh nếu x là số nguyên lẻ thì $f(x)$ cũng là số nguyên lẻ. Thật vậy nếu $f(x)=2k$, với $k\in\mathbb{Z}$ thì trong (3) thay x bởi $x-2k$ (với x lẻ) và y bởi k ta được

$$\begin{aligned}&f(x-2k+f(x))=2(x-2k)+2k+4,\ \forall x\in\mathbb{Z},\ x\text{ lẻ}\\ \Rightarrow&f(x)=2x-2k+4,\ \forall x\in\mathbb{Z},\ x\text{ lẻ}\\ \Rightarrow&2k=2x-2k+4,\ \forall x\in\mathbb{Z},\ x\text{ lẻ}.\end{aligned}$$

Suy ra $4k=2x+4$, với mọi số nguyên lẻ x, điều này vô lí vì $2x+4$ không phải lúc nào cũng chia hết cho 4, chẳng hạn $x=3$ thì ta gặp mâu thuẫn. Như vậy nếu x lẻ thì $f(x)$ lẻ. Từ đó nếu x lẻ thì $x+2y$ lẻ, suy ra $f(x+2y)$ lẻ, do đó $x+f(x+2y)$ chẵn, suy ra $f(x+f(x+2y))=x+f(x+2y)+2$. Kết hợp với (3) ta được

$$\begin{aligned}&x+f(x+2y)+2=2x+2y+4\\ \Rightarrow&f(x+2y)=x+2y+2,\ \forall x,y\in\mathbb{Z},\ x\text{ lẻ}\\ \Rightarrow&f(x)=x+2,\ \forall x\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 4.5 (Puerto Rico Team Selection Test 2012). *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ *sao cho*

$$f(2)=2;$$
$$f(mn)=f(m).f(n)\ \textit{với mọi } m,\ n\ \textit{thuộc}\ \mathbb{N}^*;$$
$$f(m)<f(n),\ \forall m<n.$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn các yêu cầu của bài toán. Khi đó, chọn $n=1$, ta có $f(1)=f(1.1)=f(1).f(1)\Rightarrow f(1)=1$. Ta thấy rằng

$$2=f(2)<f(3)<f(4)=f(2).f(2)=4\Rightarrow f(3)=3$$

và $4=f(4)<f(5)<f(6)=f(2).f(3)=6\Rightarrow f(5)=5$. Ta chứng minh

$$f(n)=n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Thật vậy, ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Ta có $f(1)=1$, $f(2)=2$. Giả sử khẳng định $f(n)=n$ đã đúng tới $n=k$, với $k\geq 2$. Lúc này $f(k)=k$, ta cần chứng minh $f(k+1)=k+1$. Nếu k là số lẻ thì $k+1$ là số chẵn và $f(k+1)=f\left(2.\dfrac{k+1}{2}\right)=f(2).f\left(\dfrac{k+1}{2}\right)=2.\dfrac{k+1}{2}=k+1$. Nếu k là số chẵn thì $k+2$ là số chẵn và do $\dfrac{k+2}{2}\leq k$ nên theo giả thiết quy nạp ta có $f\left(\dfrac{k+2}{2}\right)=\dfrac{k+2}{2}$. Vậy

$$f(k+2)=f\left(2.\frac{k+2}{2}\right)=f(2).f\left(\frac{k+2}{2}\right)=2.\frac{k+2}{2}=k+2.$$

Ta có $k=f(k)<f(k+1)<f(k+2)=k+2\Rightarrow f(k+1)=k+1$. Vậy khẳng định vẫn còn đúng với $n=k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có

$$f(n)=n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Thử lại, ta thấy $f(n)=n$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét 1. *Các điều kiện đã nêu trong bài toán là rất chặt và đã được sử dụng một cách tối đa vào phương pháp quy nạp toán học. Tuy nhiên, chỉ cần làm "yếu" đi một trong những điều kiện đó thì việc giải bài toán mới đã bắt đầu khó khăn, đòi hỏi một số kỹ thuật khác. Chẳng hạn bài toán sau đây.*

Bài toán 4.6. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ *sao cho*

a. $f(2)=2$;
b. $f(mn)=f(m).f(n)$ *với mọi* m,n *thuộc* $\mathbb{N}^*$, $\text{USCLN}(m,n)=1$;
c. $f(m)<f(n),\ \forall m<n$.

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn các yêu cầu của bài toán. Khi đó, chọn $n = 1$, ta được $f(1) = f(1.1) = f(1).f(1) \Rightarrow f(1) = 1$. Ta thấy rằng

$$f(3).f(5) = f(15) < f(2).f(9) < f(2).f(10) = f(2).f(2).f(5).$$

Suy ra $f(3) < f(2).f(2) = 4$. Mà $2 = f(2) < f(3) < 4$ nên $f(3) = 3$. Từ đó ta tính được

$$f(4) = 4, f(5) = 5, f(6) = 6, f(7) = 7, f(8) = 8, f(9) = 9, f(10) = 10.$$

Do đó $f(n) = n$, với $n \in \mathbb{N}^*, n \leq 10$. Ta chứng minh $f(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
• Giả sử $f(k) = k$ $(k \in \mathbb{N}^*, 10 \leq k \leq n)$. Ta cần chứng minh điều khẳng định vẫn còn đúng với $k = n + 1$. Nếu k là số chẵn, ta xét hai trường hợp sau:
◦ Trường hợp $k = 2^\alpha(2l + 1)$, $\alpha, l \in \mathbb{N}^*$.

$$f(k) = f(2^\alpha(2l + 1)) = f(2^\alpha)f(2l + 1) = 2^\alpha(2l + 1) = k.$$

◦ Trường hợp $k = 2^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} f(k + 2) &= f(2^\alpha + 2) = f(2(2^{\alpha-1} + 1)) = f(2).f(2^{\alpha-1} + 1) \\ &= 2(2^{\alpha-1} + 1) = 2^\alpha + 2 = k + 2. \end{aligned}$$

Mặt khác $k - 1 = f(k - 1) < f(k) < f(k + 1) < f(k + 2) = k + 2$. Do đó

$$f(k) = k, f(k + 1) = k + 1.$$

Với k là số lẻ thì $k + 1$ là số chẵn, ta xét hai trường hợp sau:
◦ Trường hợp $k + 1 = 2^\alpha(2l + 1)$, $\alpha, l \in \mathbb{N}^*$. Khi đó

$$0 < 2^\alpha \leq n,\ 0 < 2l + 1 \leq n.$$

Theo giả thiết quy nạp ta có

$$f(k + 1) = f(2^\alpha(2l + 1)) = f(2^\alpha)f(2l + 1) = 2^\alpha(2l + 1) = k + 1.$$

Mà $k - 1 = f(k - 1) < f(k) < f(k + 1) = k + 1$ nên $f(k) = k$.
◦ Trường hợp $k + 1 = 2^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} f((k + 1) + 2) &= f(2^\alpha + 2) = f(2(2^{\alpha-1} + 1)) = f(2).f(2^{\alpha-1} + 1) \\ &= 2(2^{\alpha-1} + 1) = 2^\alpha + 2 = (k + 1) + 2 = k + 3. \end{aligned}$$

Mà $k - 1 = f(k - 1) < f(k) < f(k + 1) < f(k + 2) < f(k + 3) = k + 3$ nên

$$f(k) = k,\ f(k + 1) = k + 1,\ f(k + 2) = k + 2.$$

Theo nguyên lý quy nạp, ta có $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Thử lại thấy hàm số $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nhận xét 2. *Khi điều kiện (b) được làm yếu đi so với điều kiện bài toán 4.5 thì điểm mấu chốt ở đây là chứng minh được $f(3) = 3$. Nếu thay đổi điều kiện (a) của bài toán 4.5 thì có thể xảy ra trường hợp bài toán không có nghiệm. Ta hãy xét bài toán 4.7.*

Bài toán 4.7. *Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ sao cho:*
a. $f(2) = 3$;
b. $f(m.n) = f(m).f(n)$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$;
c. $f(m) < f(n)$, $\forall m < n$.

Giải. Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn điều kiện của đề bài. Đặt $f(3) = a$, ta được

$$27 = 3^3 = f^3(2) = f(2^3) < f(3^2) = f^2(3) = a^2 \Rightarrow a > 5.$$

Ta lại có $a^3 = f^3(3) = f(3^3) < f(2^5) = 3^5 < 343 = 7^3 \Rightarrow a < 7$. Vì $a \in \mathbb{N}^*$ nên $a = 6$. Mặt khác $256 > 243$ và

$$f(256) = f(2^8) = \Big(f(2)\Big)^8 = 6561;\ f(243) = f(3^5) = \Big(f(3)\Big)^5 = 7776.$$

Suy ra $f(256) < f(243)$ (mâu thuẫn). Vậy không tồn tại hàm số f thỏa điều kiện bài toán.

Nhận xét 3. *Việc tìm ra sự mâu thuẫn, phục vụ cho việc giải bài toán, đôi khi không phải dễ dàng. Việc "mày mò" từng giá trị để phát hiện điều mâu thuẫn cũng là một phương pháp thường gặp. Đối với bài toán này, để có sự so sánh suy ra mâu thuẫn, trước hết ta tính được bảng giá trị sau*

$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(6)$	$f(8)$	$f(9)$	$f(12)$	$f(16)$	$f(18)$	$f(24)$	$f(27)$	$f(32)$
3	a	9	$3a$	27	a^2	$9a$	81	$3a^2$	$27a$	a^3	243

Dựa vào bảng trên ta thấy rằng $27 \leq a^2 \Rightarrow a > 5$ và $a^3 \leq 243 \Rightarrow a < 7$, do đó $a = 6$. Từ $f(2) = 3, f(3) = 6$, ta tìm kiếm sự mâu thuẫn sao cho $2^k > 3^l$ nhưng $f(2^k) < f(3^l)$. Sau một quá trình thử các giá trị, ta tìm thấy sự mâu thuẫn khi $k = 8$ và $l = 5$. Tiếp theo là một số bài toán minh họa về việc áp dụng một số kỹ thuật của phương pháp quy nạp để giải những dạng toán loại này.

Bài toán 4.8 (Olympic Toán Nhật Bản - 2013). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(m) + f(n) = f(mn) + f(m + n + mn), \forall m, n \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Giải. Kí hiệu $P(u, v)$ chỉ việc thay m bởi u và thay n bởi v vào (1). Thực hiện $P(m, -1)$ ta được

$$f(m) + f(-1) = f(-m) + f(-1) \Rightarrow f(m) = f(-m), \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Thực hiện $P(m,1)$ ta được

$$f(m)+f(1)=f(m)+f(2m+1)\Rightarrow f(2m+1)=f(1),\forall m\in\mathbb{Z}. \quad (3)$$

Thực hiện $P(m,2k+1)$ ta được

$$f(m)+f(2k+1)=f\big((2k+1)m\big)+f\big(m(2k+2)+(2k+1)\big),\forall m,k\in\mathbb{Z}.$$

Từ đây, sử dụng (3) ta được $f(m)=f\big((2k+1)m\big),\forall k,m\in\mathbb{Z}.$ (4)

Từ (4) cho $m=2$ ta được $f(2)=f(4k+2),\forall k\in\mathbb{Z}.$ (5)

$$P(m,-m)\Rightarrow f(m^2)=f(m),\forall m\in\mathbb{Z}. \quad (6)$$

$$P(m,-2)\Rightarrow f(m)+f(2)=f(2m)+f(m+2),\forall m\in\mathbb{Z}. \quad (7)$$

Ta sẽ chứng minh $f(2^k)=f(2)$, với mọi $k\in\mathbb{N}^*$. Ta có $f(2^1)=f(2)$. Theo (6) ta có $f(2^2)=f(2)$. Giả sử $f(2^k)=f(2)$, với $k\geq 2$. Khi đó

$$P(2^k,2)\Rightarrow f(2^k)+f(2)=f(2^{k+1})+f(2^k+2+2^{k+1}). \quad (8)$$

Mà $k\geq 2$ nên 2^k+2+2^{k+1} có dạng $2^k+2+2^{k+1}=4\ell+2$, với $\ell\in\mathbb{N}$. Do đó

$$f(2^k+2+2^{k+1})=f(4\ell+2)=f(2).$$

Vậy (8) trở thành

$$f(2^k)+f(2)=f(2^{k+1})+f(2)\Leftrightarrow f(2^{k+1})=f(2^k)\Rightarrow f(2^{k+1})=f(2).$$

Theo nguyên lí quy nạp suy ra $f(2^k)=f(2)$, với mọi $k\in\mathbb{N}^*$. Với mọi n là số chẵn, ta phân tích $n=2^k(2\ell+1)$, với $k\in\mathbb{N}^*$, $\ell\in\mathbb{Z}$. Khi đó

$$f(n)=f\left(2^k(2l+1)\right)\overset{\text{do (4)}}{=}f(2^k)=f(2). \quad (9)$$

Từ (3) và (9) suy ra $f(n)=\begin{cases} c_1 & \text{khi } n=2k,k\in\mathbb{Z} \\ c_2 & \text{khi } n=2\ell+1,\ell\in\mathbb{Z}, \end{cases}$ với c_1 và c_2 là những số thực, tùy ý.

Thử lại :

- Khi n và m cùng chẵn : ta có

$$f(m)+f(n)=2c_1,\ f(mn)+f(m+n+mn)=2c_1.$$

- Khi n và m cùng lẻ : ta có

$$f(m)+f(n)=2c_2,\ f(mn)+f(m+n+mn)=2c_2.$$

- Khi n và m khác tính chẵn, lẻ : ta có

$$f(m)+f(n)=c_1+c_2,\ f(mn)+f(m+n+mn)=c_1+c_2.$$

Như vậy hàm số ta tìm được ở trên thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 4.9 (IMO-1982). *Cho hàm số $f(n)$ xác định với mọi giá trị nguyên dương n và nhận các giá trị nguyên không âm. Ngoài ra, biết rằng $f(2)=0$, $f(3)>0$, $f(9999)=3333$ và*

$$f(m+n)-f(m)-f(n)=0 \text{ hoặc } 1.$$

Hãy tìm $f(1982)$.

Giải. Giả sử $f(n)$ là hàm số thỏa mãn các yêu cầu bài toán. Ta có

$$f(m+n)=f(m)+f(n)+a,\ \text{với } a\in\{0;1\}.$$

Chọn $m=n=1$, ta được $f(2)=2f(1)+a\Rightarrow 2f(1)\leq f(2)=0\Rightarrow f(1)=0$. Ta lại có $f(3)=f(2+1)=f(2)+f(1)+a=a\Rightarrow f(3)=1$. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ thì $f(3n)\geq n$. (i)

⋆ Với $n=1$ ta có $f(3.1)=1\geq 1$. Vậy (i) đúng với $n=1$.

⋆ Giả sử (i) đúng với k $(1\leq k\leq n)$. Ta chứng minh (i) cũng đúng với $n=k+1$. Ta có

$$f\big(3(k+1)\big)=f(3k+3)=f(3k)+f(3)+a\geq f(3k)+f(3)\geq k+1.$$

Vậy (i) đúng với $n=k+1$. Do đó $f(3n)\geq n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Vì $f(9999)=3333$ nên suy ra $f(3.3332)=3332$. Thật vậy, nếu $f(3.3332)>3332$ thì

$$f(3.3332)\geq 3333=f(3.333)\Rightarrow f(9999)\leq f(9996),$$

trong khi đó

$$f(9999)=f(9996)+f(3)+a>f(9996)+a\geq f(9996),$$

đến đây ta gặp mâu thuẫn, vậy $f(3.3332)=3332$. Tương tự ta suy ra rằng

$$f(3n)=n,\ \forall n\leq 3333.$$

Ta lại có $f(3n)=f(2n)+f(n)+a=3f(n)+2a$. Suy ra

$$3f(n)\leq f(3n)\leq 3f(n)+2\Rightarrow f(n)\leq\frac{f(3n)}{3}\leq f(n)+\frac{2}{3}.$$

Do đó $f(n)=\left[\frac{f(3n)}{3}\right]=\left[\frac{n}{3}\right]$, $\forall n\leq 3333$. Đặc biệt $f(1982)=\left[\frac{1982}{3}\right]=660$.

Bài toán 4.10. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn*

$$f(m+n)+f(mn)=f(m)f(n)+1,\ \forall m,n\in\mathbb{Z}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) cho $m = n = 0$ ta được $2f(0) = f^2(0) + 1 \Leftrightarrow f(0) = 1$. Trong (1) cho $m = 1$, $n = -1$ ta được $1 + f(-1) = f(1)f(-1) + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(-1) = 0 \\ f(1) = 1. \end{array}\right.$

• Trường hợp $f(1) = 1$. Trong (1) cho $n = 1$ ta được

$$f(m+1) + f(m) = f(m) + 1,\ \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Hay $f(m+1) = 1$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, nghĩa là $f(m) = 1$, $\forall m \in \mathbb{Z}$. Thử lại đúng.

• Trường hợp $f(-1) = 0$. Trong (1) cho $n = -1$ ta được

$$f(m-1) + f(-m) = 1,\ \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Trong (1) cho $n = 1$ và đặt $a = f(1)$ ta được

$$f(m+1) + f(m) = af(m) + 1,\ \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

∘ Trường hợp $a \neq 2$. Có thể giả sử $a \neq 1$ vì nếu $a = 1$, dẫn tới $f(1) = 1$, trường hợp này đã xét ở trên. Khi đó

$$(3) \Leftrightarrow f(m+1) - \frac{1}{2-a} = (a-1)\left[f(m) - \frac{1}{2-a}\right],\ \forall m \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow f(n) - \frac{1}{2-a} = (a-1)\left[f(n-1) - \frac{1}{2-a}\right],\ \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow f(n) - \frac{1}{2-a} = (a-1)^{n+1}\left[f(-1) - \frac{1}{2-a}\right],\ \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow f(n) = \frac{1-(a-1)^{n+1}}{2-a},\ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Đặt $b = a - 1 \Rightarrow b \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1\}$, $f(n) = \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Thay vào (2) được

$$\frac{1-b^m}{1-b} + \frac{1-b^{-m+1}}{1-b} = 1,\ \forall m \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 1 - b^m + 1 - b^{-m+1} = 1 - b,\ \forall m \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow b^m + b^{-m+1} = 1 + b,\ \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Từ (5) cho $m = 2$ ta được $b^2 + \dfrac{1}{b} = 1 + b \Leftrightarrow (b-1)^2(b+1) = 0 \Leftrightarrow b = -1$ (do $b \neq 1$). Từ đó $f(n) = \dfrac{1-(-1)^{n+1}}{2}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ hay $f(n) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ 1 & \text{khi } n \text{ chẵn.} \end{array}\right.$

Thử lại thấy thỏa mãn.

∘ Trường hợp $a = 2$ hay $f(1) = 2$. Trong (1) cho $n = 1$ ta được

$$f(m+1) = f(m) + 1,\ \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Từ $f(1) = 2$ và (6), sử dụng quy nạp ta được $f(n) = n + 1, \forall n \in \mathbb{Z}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$f(n) \equiv 1,\ f(n) \equiv \frac{1-(-1)^{n+1}}{2},\ f(n) \equiv n+1.$$

Bài toán 4.11 (IMO-1998). *Xét các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa điều kiện*

$$f(m^2 f(n)) = n(f(m))^2,\ \forall m, n \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(1998)$.

Giải. Gọi S là tập tất cả các hàm thỏa mãn điều kiện của bài toán. Giả sử $f(n) \in S$. Đặt $f(1) = a$. Chọn $m = 1$ ta có

$$f(f(n)) = n.f^2(1) = n.a^2. \tag{2}$$

$$f(n^2 f(1)) = 1.f^2(n) \Leftrightarrow f(a.n^2) = f^2(n). \tag{3}$$

Với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$ ta có:

$$[f(m).f(n)]^2 = [f(m)]^2.[f(n)]^2 \overset{(3)}{=} f(an^2).[f(m)]^2 \overset{(1)}{=} f(m^2 f(f(an^2)))$$

$$\overset{(2)}{=} f(m^2 a^3 n^2) = f(a(amn)^2) \overset{(3)}{=} f^2(amn).$$

Suy ra

$$f(amn) = f(m).f(n)\ \ (\text{vì } f(amn), f(m), f(n) \in \mathbb{N}^*). \tag{4}$$

Từ (4), chọn $n = 1$, ta được $f(am) = af(m)$. Khi đó

$$af(mn) = f(amn) \overset{(4)}{=} f(m)f(n). \tag{5}$$

Từ (5) ta được $f^2(n) = a^1.f(n^2)$. Ta nhận thấy rằng với $k \in \mathbb{N}^*$ thì

$$f^k(n) = a^{k-1} f(n^k). \tag{6}$$

Thật vậy, ta chứng minh bằng quy nạp như sau:

⋆ Với $k = 1$ ta có $f^1(n) = f(n) = a^0.f(n^1)$. Do đó (6) đúng với $k = 1$.

⋆ Giả sử (6) đúng với $k = l$, $(l \geq 1)$. Ta chứng minh (6) đúng với $k = l + 1$.

Thật vậy, ta có

$$f^{l+1}(n) = f^l(n).f(n) = a^{l-1}.f(n^l).f(n) \overset{(5)}{=} a^l.f(n^{l+1}).$$

Do đó (6) đúng với $k = l + 1$. Vậy $f^k(n) = a^{k-1} f(n^k)$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

Ta chứng minh rằng $f(n) \vdots a$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Thật vậy, với p là số nguyên tố bất kì,

gọi α là số mũ lớn nhất mà $a \vdots p^\alpha$ và β là số mũ lớn nhất mà $f(n) \vdots p^\beta$. Từ (6), ta thấy: Vế trái chia hết cho $p^{k\beta}$, vế phải chia hết cho $p^{(k-1)\alpha}$ (ngoài ra $f(n^k)$ còn có thể có ước là p^l). Suy ra với mọi $k \in \mathbb{N}^*$ ta có

$$k\beta \geq (k-1)\alpha \Rightarrow k(\beta - \alpha) + \alpha \geq 0 \Rightarrow \beta \geq \alpha.$$

Do đó $f(n) \vdots a$. Xét hàm số $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ xác định bởi $g(n) = \dfrac{1}{a} f(n)$ ($a \geq 1$ vì $f(1) \in \mathbb{N}^*$). Khi đó $g(a) = \dfrac{f(a)}{a} = \dfrac{af(1)}{a} = a$. Do đó

$$\begin{cases} g(mn) = \dfrac{1}{a} f(mn) = \dfrac{1}{a^2} f(m) f(n) = g(m) g(n); \\ g(1) = 1; \\ g\left(g(m)\right) = \dfrac{g(a) g\left(g(m)\right)}{a} = \dfrac{g\left(ag(m)\right)}{a} = \dfrac{g\left(f(m)\right)}{a} = \dfrac{f\left(f(m)\right)}{a^2} = m. \end{cases} \tag{7}$$

Và $g(m^2 g(n)) = g(m^2) g(g(n)) = n.g(m^2) = n.g^2(m) \Rightarrow g \in S$. Ta lại có $f(n) \geq g(n)$ (vì $a \geq 1$). Do đó để tìm giá trị nhỏ nhất, ta chỉ cần xét hàm số $g(n)$ thỏa (7). Giả sử p là số nguyên tố và $g(p) = u.v$ với $u, v \in \mathbb{N}^*$. Ta có $p = g(g(p)) = g(u.v) = g(u)g(v)$. Suy ra hoặc $g(u) = 1$ hoặc $g(v) = 1$.

⋆ Giả sử $g(u) = 1$. Ta được $u = g(g(u)) = g(1) = 1$. Khi đó $g(p) = v$.

⋆ Giả sử $g(v) = 1$. Ta được $v = g(g(v)) = g(1) = 1$. Khi đó $g(p) = u$.

Vậy $g(n)$ là hàm số chuyển số nguyên tố thành số nguyên tố. Ta lại có

$$g(m) = g(n) \Rightarrow g(g(m)) = g(g(n)) \Rightarrow m = n.$$

Do đó g là đơn ánh. Vậy $g(n)$ chuyển các số nguyên tố khác nhau thành các số nguyên tố khác nhau. Ta có $1998 = 2.3^3.37$ và

$$g(1998) = g(2.3^3.37) = g(2).g^3(3).g(37)$$

nên để nhận được giá trị nhỏ nhất của $g(1998)$ ta phải chọn hàm $g(n)$ sao cho $g(2), g(3), g(37)$ là các số nguyên tố nhỏ nhất, khác nhau. Hiển nhiên, nếu ta chọn được hàm số $\overline{g}(n)$ sao cho $\overline{g}(3) = 2, \overline{g}(2) = 3, \overline{g}(5) = 37, \overline{g}(37) = 5$ thì $g(n) \geq \overline{g}(2).\overline{g}^3(3).\overline{g}(37) = 120$. Ta xây dựng hàm $g(n) : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ sao cho

$$g(1) = 1, g(2) = 3, g(3) = 2, g(5) = 37, g(37) = 5, g(p) = p, \forall p \in P \backslash \{2; 3; 5; 37\}$$

và với $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ thì $g(n) = g^{k_1}(p_1).g^{k_2}(p_2) \dots g^{k_m}(p_m)$. Khi đó $g(n)$ thỏa (7) với $a = 1$. Vậy $g(n) \in S$. Do đó $\min f(1998) = 120$ với $f(n) \in S$.

Để kết thúc phần này, ta xét một bài toán kinh điển sau, trong đó phép quy nạp liên quan đến khái niệm "phần nguyên".

Bài toán 4.12. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(f(n)) + f(n+1) = n + 2, \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Giải. Cho $n = 1$ vào (1) ta có $f(f(1)) + f(2) = 3$. Từ đó $f(2) \leq 2$ và $f(f(1)) \leq 2$. Ta xét hai trường hợp.

• Trường hợp 1: $f(2) = 1$ và $f(f(1)) = 2$. Đặt $f(1) = k$, ta có $f(k) = 2$. Cho $n = 2$ vào (1), ta được $f(f(2)) + f(3) = 4$. Suy ra $f(3) = 4 - f(1) = 4 - k$. Từ $f(3) \geq 1$ nên $k \leq 3$.
Nếu $k = 1$ thì $2 = f(f(1)) = f(k) = f(1) = k = 1$ (mâu thuẫn).
Nếu $k = 2$ thì $2 = f(f(1)) = f(k) = f(2) = 1$ (mâu thuẫn).
Nếu $k = 3$ thì $2 = f(f(1)) = f(k) = f(3) = 4 - k = 1$ (mâu thuẫn).
Do đó ta loại trường hợp 1.

• Trường hợp 2: $f(2) = 2$ và $f(f(1)) = 1$. Cho $n = 2$ vào (1), ta nhận được $f(f(2)) + f(3) = 4$. Từ đó ta thấy rằng $f(3) = 2$. Ta tính toán được rằng

$$f(4) = 5 - f(f(3)) = 5 - f(2) = 3; \ f(5) = 6 - f(f(4)) = 4;$$
$$f(6) = 7 - f(f(5)) = 4.$$

Dự đoán rằng $f(n) = [n\alpha] - n + 1$, với $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Để chứng minh nhận định trên ta cần đến 2 bổ đề sau.

Bổ đề 4.1. *Với mỗi số $n \in \mathbb{N}^*$ thì: $[\alpha([n\alpha] - n + 1)] = n$ hoặc $n + 1$.*

Chứng minh. Ta có $[\alpha([n\alpha] - n + 1)] < \alpha(n\alpha - n + 1) = n + \alpha < n + 2$, và $[\alpha([n\alpha] - n + 1)] > \alpha(n\alpha - 1 - n + 1) - 1 = n - 1$. Từ đó bổ đề được chứng minh xong.

Bổ đề 4.2. *Với mỗi số $n \in \mathbb{N}^*$*

$$[(n+1)\alpha] = \begin{cases} [n\alpha] + 2, \text{ nếu } [\alpha([n\alpha] - n + 1)] = n; \\ [n\alpha] + 1, \text{ trong các trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Chứng minh. Hiển nhiên $[(n+1)\alpha] = [n\alpha] + 1$ hoặc $[n\alpha] + 2$.
Nếu $[(n+1)\alpha] = [n\alpha] + 1$, ta có

$$\begin{aligned} [\alpha([n\alpha] - n + 1)] &= [\alpha([(n+1)\alpha] - n)] \\ &> \alpha((n+1)\alpha - 1 - n) - 1 = n. \end{aligned}$$

Theo bổ đề (4.1) ta suy ra $[\alpha([n\alpha] - n + 1)] = n + 1$. Mặt khác, nếu

$$[(n+1)\alpha] = [n\alpha] + 2$$

thì

$$\begin{aligned} [\alpha([n\alpha] - n + 1)] &= [\alpha([(n+1)\alpha] - n - 1)] \\ &< \alpha((n+1)\alpha - n - 1) = n + 1. \end{aligned}$$

Theo bổ đề 4.1 ta suy ra $[\alpha([n\alpha] - n + 1)] = n$.
Bây giờ ta chứng minh theo quy nạp kết quả dự đoán trên.

$\star$ Với $n=1$, ta có $f(1)=1=[\alpha]=[\alpha]-1+1$.
$\star$ Với $n=2$, ta có $f(2)=2=3-2+1=[2\alpha]-2+1$.
$\star$ Giả sử kết quả đúng với $1\le j\le n$. Sử dụng (1) ta có

$$f(n+1)=n+2-f(f(n))=n+2-f([n\alpha]-n+1)$$
$$=n+2-[\alpha([n\alpha]-n+1)]+[n\alpha]-n+1-1.$$

Từ $[n\alpha]-n+1<2n-n+1=n+1$, dẫn đến

$$f(n+1)=[n\alpha]+2-[\alpha([n\alpha]-n+1)].$$

Giả sử n thỏa mãn $[\alpha([n\alpha]-n+1)]=n$, ta có $[(n+1)\alpha]=[n\alpha]+2$. Do đó

$$f(n+1)=[(n+1)\alpha]-n.$$

Nếu n không thỏa mãn $[\alpha([n\alpha]-n+1)]=n$ thì

$$[\alpha([n\alpha]-n+1)]=n+1 \text{ và } [(n+1)\alpha]=[n\alpha]+1.$$

Từ đó ta có $f(n+1)=[(n+1)\alpha]+1-(n+1)[(n+1)\alpha]-n$.
Ta kết thúc chứng minh. Vậy $f(n)=[n\alpha]-n+1$, với $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Thử lại ta thấy hàm số trên thỏa điều kiện bài toán.

4.1.2 Nguyên lý sắp thứ tự tốt

Nguyên lý sắp thứ tự tốt là một nguyên lý đặc trưng của tập $\mathbb{Z}$ và tập $\mathbb{N}$. Cụ thể như sau: *Một tập con khác rỗng bất kỳ của tập $\mathbb{N}$ đều có phần tử nhỏ nhất và nếu tập đó không phải là tập vô hạn thì nó có phần tử lớn nhất.* Nguyên lý rất đơn giản này đôi khi là một công cụ mạnh mẽ để giải một số phương trình hàm trên tập số nguyên. Sau đây là một số bài toán minh họa.

Bài toán 4.13. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(n+f(n))=f(n),\ \forall n\in\mathbb{N}^*;$$

và tồn tại $x_0\in\mathbb{N}^*$ sao cho $f(x_0)=1$.

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn các yêu cầu của đề bài. Gọi

$$x_1=\min\{x|x\in\mathbb{N}^*, f(x)=1\}.$$

Suy ra $f(x_1+1)=f(x_1+f(x_1))=f(x_1)=1$. Do đó

$$f(n)=1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*, n\ge x_1. \quad (*)$$

Giả sử $x_1>1$. Khi đó $f(x_1-1+f(x_1-1))=f(x_1-1)$.
• Nếu $x_1-1+f(x_1-1)\ge x_1$ thì từ (*) suy ra $f(x_1-1)=1$, vô lý.
• Nếu $x_1-1+f(x_1-1)<x_1$ thì $f(x_1-1)<1$, cũng vô lý.
Từ đó $f(n)=1, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Thử lại thấy đúng.

Bài toán 4.14. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn*

$$f(n+f(n))=f(n),\ \forall n\in\mathbb{N},$$

và tồn tại $x_0\in\mathbb{N}$ sao cho $f(x_0)=a$.

Bài toán 4.15 (Canada National Olympiad 2002). *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn: $xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x^2+y^2),\ \forall x,y\in\mathbb{N}$.* (1)

Giải. Giả sử f không phải là hàm hằng. Khi đó

$$\emptyset\ne A=\{f(y)-f(x)|x\in\mathbb{N}^*, y\in\mathbb{N}^*, f(y)-f(x)>0\}\subset\mathbb{N}^*.$$

Do tập A có phần tử nhỏ nhất nên có thể chọn $x\in\mathbb{N}^*, y\in\mathbb{N}^*$ sao cho $f(y)>f(x)$ và $f(y)-f(x)$ là nhỏ nhất. Ta có

$$f(x)=\frac{xf(x)+yf(x)}{x+y}<\frac{xf(y)+yf(x)}{x+y}<\frac{xf(y)+yf(y)}{x+y}=f(y). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $f(x)<f\left(x^2+y^2\right)<f(y)$, điều này mâu thuẫn với cách chọn x và y. Vậy $f(x)=C,\ \forall x\in\mathbb{N}^*$, với C là hằng số nguyên dương. Thử lại thấy thỏa mãn

Bài toán 4.16 (IMO-1977). *Cho $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ là hàm số thỏa điều kiện*

$$f(n+1)>f(f(n)),\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng: $f(n)=n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán. Gọi d là phần tử nhỏ nhất trong miền giá trị của hàm số f, tức là $d=\min\{f(n):n\in\mathbb{N}^*\}$. Theo nguyên lý sắp thứ tự tốt, d tồn tại và là duy nhất. Gọi $m\in\mathbb{N}^*$ sao cho $f(m)=d$. Nếu $m>1$ thì $d=f(m)>f(f(m-1))$, mâu thuẫn. Vậy $m=1$. Do đó $f(n)$ đạt giá trị nhỏ nhất duy nhất một điểm $m=1$. Bây giờ ta xét

$$\{f(n):n\in\mathbb{N}^*, n\ge 2\}.$$

Bằng lập luận tương tự ta cũng có $f(2)=\min\{f(n):n\in\mathbb{N}^*, n\ge 2\}$. Hơn nữa $f(2)>f(1)$. Vì nếu $f(2)=f(1)$ thì $f(1)=f(2)>f(f(1))$, mâu thuẫn. Lặp lại quá trình lập luận như trên ta thu được

$$f(1)<f(2)<f(3)<\cdots<f(n)<\cdots \quad (1)$$

Vì $f(n)\in\mathbb{N}^*$ nên $f(1)\ge 1$. Với $f(1)\ge 1$, từ (1) ta suy ra rằng $f(k)\ge k$. Giả sử $f(k)>k$, khi đó $f(k)\ge k+1$. Mặt khác, theo điều kiện bài toán ta có

$$f(k+1)>f(f(k)). \quad (2)$$

Từ $f(k)\ge k+1$ và từ (1) suy ra $f(k+1)\le f(f(k))$, điều này mâu thuẫn với (2), vậy không thể có $f(k)>k$. Do đó $f(k)=k, \forall k\in\mathbb{N}^*$. Hay $f(n)\equiv n$. Thử lại, ta thấy $f(n)=n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 4.17. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ *thỏa mãn* $f(1)=1$ *và*

$$f(f(n))f(n+2)+1=f(n+1)f(f(n+1)),\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta chứng minh bằng quy nạp rằng với $n\in\mathbb{N}^*$ thì: $f(n+1)>f(f(n))$. (1)

◇ Với $n=1$. Hiển nhiên (1) đúng.

◇ Giả sử (1) đúng với $n=k$ $(k\geq 1)$. Ta chứng minh (1) đúng với $n=k+1$.

Thật vậy, ta có: $f(f(k))f(k+2)=f(k+1)f(f(k+1))-1$. Do đó:

$$f(k+2)=\frac{f(k+1)f(f(k+1))-1}{f(f(k))}\geq\frac{[f(f(k))+1][f(f(k+1)]-1}{f(f(k))}$$
$$>\frac{[f(f(k))]f(f(k+1))}{f(f(k))}=f(f(k+1)).$$

Từ đó ta suy ra $f(n+1)>f(f(n)),\forall n\in\mathbb{N}^*$. Vậy theo bài toán 4.16 ta có $f(n)=n,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Thử lại ta thấy $f(n)=n,\forall n\in\mathbb{N}^*$ thỏa điều kiện bài toán.

Bài toán 4.18. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ *thỏa mãn*

$$2(f(m^2+n^2))^3=f^2(m).f(n)+f(m).f^2(n),\forall m,n\in\mathbb{N}^*.$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn các yêu cầu của đề bài. Nếu $f(n)\equiv c$, với c là hằng số thì hiển nhiên thỏa mãn điều kiện bài toán. Nếu tồn tại $m,n\in\mathbb{N}^*$ sao cho $f(m)\neq f(n)$ thì ta gọi a,b là 2 số thỏa mãn

$$|f(a)-f(b)|=\min|f(m)-f(n)|,m,n\in\mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Giả sử $f(a)>f(b)$. Ta có $2f^3(b)<f^2(a).f(b)+f(a).f^2(b)<2f^3(a)$. Suy ra

$$f(b)<f(a^2+b^2)<f(a)\Rightarrow f(a^2+b^2)-f(b)<f(a)-f(b).$$

Từ đó

$$|f(a)-f(b)|=f(a)-f(b)>f(a^2+b^2)-f(b)=\left|f(a^2+b^2)-f(b)\right|. \quad (2)$$

Rõ ràng (2) mâu thuẫn với (1). Do đó $f(n)\equiv c$ (với c là hằng số) là hàm số cần tìm.

4.1.3 Phương pháp sử dụng biểu diễn số nguyên

Xuất phát từ những phương trình hàm đã cho, ta cần xây dựng những đẳng thức tương ứng, phù hợp. Đối với những phương trình hàm dạng này thì có thể thấy ngay được một hàm số thỏa mãn là $f(n)=n$. Tuy nhiên việc

giải quyết trọn vẹn bài toán còn rất nhiều khó khăn nhưng cũng rất thú vị. Chẳng hạn từ phương trình hàm

$$f\left(m^2+3n^2\right)=[f(m)]^2+3[f(n)]^2,\forall n,m\in\mathbb{N},$$

ta cần xây dựng đẳng thức:

$$x^2+3y^2=z^2+3t^2, \quad (*)$$

trong đó x,y,z,t là những biểu thức nguyên, phụ thuộc vào n và (*) luôn đúng với mọi $n\in\mathbb{N}$. Chẳng hạn muốn có (*), ta sẽ xuất phát từ:

$$\begin{aligned}&(n+a)^2-(n+b)^2=3\left[(n+c)^2-(n+d)^2\right]\\&\Rightarrow 2na+a^2-2nb-b^2=3(2nc+c^2-2nd-d^2)\\&\Rightarrow(2a-2b)n+a^2-b^2=6n(c-d)+3(c^2-d^2) \quad (**)\end{aligned}$$

(với a,b,c,d là những số nguyên). Do (**) đúng với mọi n nên:

$$\begin{cases}a-b=3(c-d)\\a^2-b^2=3(c^2-d^2)\end{cases}$$

Chọn $d=0$, ta được:

$$\begin{cases}a-b=3c\\a^2-b^2=3c^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-b=3c\\(a-b)(a+b)=3c^2\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}a-b=3c\\a+b=c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2c\\b=-c\\c\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Chọn $c=1$ ta được: $b=-1,a=2$. Ta thu được đẳng thức:

$$(n+2)^2+3n^2=(n-1)^2+3(n+1)^2.$$

Thử lại thấy đúng.

Lưu ý. Các đẳng thức cần xây dựng không phải là duy nhất. Nhiều khi việc xây dựng đẳng thức dẫn tới việc giải phương trình Pen.

Bài toán 4.19 (Đề thi học sinh giỏi Trại hè Hùng Vương năm 2011). *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *thỏa mãn các điều kiện:* $f(1)>0$ *và*

$$f\left(m^2+3n^2\right)=[f(m)]^2+3[f(n)]^2,\forall n,m\in\mathbb{N}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Kí hiệu $P(u,v)$ là phép thay m bởi u và n bởi v vào (1).

$$P(0,0)\Rightarrow f(0)=4[f(0)]^2\overset{\text{do } f(0)\in\mathbb{N}}{\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow} f(0)=0.$$

$$P(1,0) \Rightarrow f(1) = [f(1)]^2 \overset{\text{do } f(1)>0}{\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow} f(1) = 1.$$
$$P(0,1) \Rightarrow f(3) = 3[f(1)]^2 \Rightarrow f(3) = 3.$$

Hơn nữa, với $n \geq 1$ thì:

$$(n+2)^2 + 3n^2 = (n-1)^2 + 3(n+1)^2 \tag{2}$$

nên:

$$[f(n+2)]^2 + 3[f(n)]^2 = f\left((n+2)^2 + 3n^2\right) = f\left((n-1)^2 + 3(n+1)^2\right)$$
$$= [f(n-1)]^2 + 3[f(n+1)]^2, \forall n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Từ (2) cho $n = 1$, ta được: $[f(3)]^2 + 3 = 3.[f(2)]^2 \Leftrightarrow [f(2)]^2 = 4 \Rightarrow f(2) = 2$ (do $(f(2) \in \mathbb{N})$. Như vậy $f(n) = n$, với $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. Ta sẽ chứng minh, với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $f(n) = n$. (4)

Giả sử (4) đúng tới $n = k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$. Khi đó do (3) nên:

$$[f(k+1)]^2 + 3[f(k-1)]^2 = [f(k-2)]^2 + 3[f(k)]^2$$
$$\Rightarrow [f(k+1)]^2 + 3(k-1)^2 = (k-2)^2 + 3k^2$$
$$\Rightarrow [f(k+1)]^2 + 3(k^2 - 2k + 1) = k^2 - 4k + 4 + 3k^2$$
$$\Rightarrow [f(k+1)]^2 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$
$$\Rightarrow f(k+1) = k+1 \text{ (do } f(k+1) \geq 0).$$

Vậy (4) cũng đúng khi $n = k+1$. Theo nguyên lí quy nạp suy ra (4) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$. Thử lại thấy hàm số $f(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 4.20. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn các điều kiện $f(1) > 0$ và:*

$$f(m^2 + n^2) = f^2(m) + f^2(n),\ m, n \in \mathbb{N}.$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn yêu cầu bài toán. Với $m = n = 0$ ta có:

$$f(0) = 2f^2(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

Với $n = 0$ ta có $f(m^2) = f^2(m)$. Khi đó $f(m^2+n^2) = f(m^2) + f(n^2)$. Ta nhận xét rằng:

$$f(1) = f^2(1) \Rightarrow f(1)(1 - f(1)) = 0 \Rightarrow f(1) = 1 \text{ (v. } f(1) > 0).$$
$$f(2) = f(1^2 + 1^2) = f^2(1) + f^2(1) = 2,\ f(4) = f(2^2) = f^2(2) = 4.$$
$$f(5) = f(2^2 + 1^2) = 5,\ 25 = f(5^2) = f(3^2 + 4^2) \Rightarrow f(3) = 3.$$

Ta cũng tính được $f(6) = 6, f(7) = 7, f(8) = 8, f(9) = 9, f(10) = 10$. Vậy $f(n) = n$ với $n \leq 10$. Bằng quy nạp ta chứng minh:

$$f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Giả sử $f(k) = k$ với $k \geq 10$. Ta chứng minh $f(k+1) = k+1$. Ta thấy rằng $(k+1)$ có dạng sau $5m + r, 0 \leq r \leq 4, m, r \in \mathbb{N}$. Ta lại có các đẳng thức sau:

$$(5m)^2 = (4m)^2 + (3m)^2;$$
$$(5m+1)^2 + 2^2 = (4m+2)^2 + (3m-1)^2.$$
$$(5m+2)^2 + 1^2 = (4m+1)^2 + (3m+2)^2.$$
$$(5m+3)^2 + 1^2 = (4m+3)^2 + (3m+1)^2.$$
$$(5m+4)^2 + 2^2 = (4m+2)^2 + (3m+4)^2.$$

- Với $k+1 = 5m$ thì:

$$f^2(5m) = f((5m)^2) = f^2(4m) + f^2(3m) = (5m)^2 \Rightarrow f(5m) = 5m.$$

- Với $k+1 = 5m+1$ thì: $f((5m+1)^2 + 2^2) = f((4m+2)^2) + f((3m-1)^2)$. Suy ra: $f^2(5m+1) = (5m+1)^2 \Rightarrow f(5m+1) = 5m+1$.

- Với $k+1 = 5m+2$ thì:

$$f((5m+2)^2 + 1^2) = f((4m+1)^2 + (3m+2)^2) \Rightarrow f(5m+2) = 5m+2.$$

- Với $k+1 = 5m+3$ thì:

$$f((5m+3)^2 + 1^2) = f((4m+3)^2 + (3m+1)^2) \Rightarrow f(5m+3) = 5m+3.$$

- Với $k+1 = 5m+4$ thì:

$$f((5m+4)^2 + 2^2) = f((4m+2)^2 + (3m+4)^2) \Rightarrow f(5m+4) = 5m+4.$$

Vậy $f(k+1) = k+1$. Do đó $f(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Thử lại, ta thấy hàm số

$$f(n) = n,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 4.21. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện: $f(1) = 1$ và*

$$f\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right) = f^2(a) + f^2(b) + f^2(c) + f^2(d),\ \forall a, b, c, d \in \mathbb{N}^* \tag{1}$$

với kí hiệu: $f^2(x) = [f(x)]^2$.

Giải. Từ (1) cho $a = b = c = d = 1$ ta được: $f(4) = 4f^2(1) = 4$.
Do $5^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 = 4^2 + 4^2 + 1^2 + 1^2$ nên:

$$f^2(5) + f^2(2) + f^2(2) + f^2(1) = f^2(4) + f^2(4) + f^2(1) + f^2(1)$$
$$\Rightarrow f^2(5) + 2f^2(2) = 33. \tag{2}$$

Do $5^2+1^2+1^2+1^2=4^2+2^2+2^2+2^2$ nên:

$$f^2(5)+f^2(1)+f^2(1)+f^2(1)=f^2(4)+f^2(2)+f^2(2)+f^2(2)$$
$$\Rightarrow f^2(5)-3f^2(2)=13. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta được: $f(2)=2$, $f(5)=5$.

Do $3^2+3^2+3^2+1^2=5^2+1^2+1^2+1^2$ nên:

$$f^2(3)+f^2(3)+f^2(3)+f^2(1)=f^2(5)+f^2(1)+f^2(1)+f^2(1).$$

Suy ra $f(3)=3$. Do $5^2+5^2+3^2+2^2=5^2+6^2+1^2+1^2$ nên:

$$f^2(5)+f^2(5)+f^2(3)+f^2(2)=f^2(5)+f^2(6)+f^2(1)+f^2(1).$$

Suy ra $f(6)=6$. Thành thử:

$$f(7)=f\left(2^2+1^2+1^2+1^2\right)=f^2(2)+3f^2(1)=7.$$

Ta cũng dễ dàng tính được: $f(8)=8, f(9)=9, f(10)=10$. Tóm lại ta có:

$$f(n)=n,\ \forall n\in\{1,2,\ldots,9,10\}. \quad (4)$$

Ta dễ dàng chứng minh được các đẳng thức:

$$(2k+1)^2+(k-2)^2+1^2+1^2=(2k-1)^2+(k+2)^2+1^2+1^2,\ \forall k\in\mathbb{R}. \quad (5)$$
$$(2k)^2+(k-5)^2+1^2+1^2=(2k-4)^2+(k+3)^2+1^2+1^2,\ \forall k\in\mathbb{R}. \quad (6)$$

Bổ đề. Nếu 8 số nguyên a,b,c,d,m,n,p,q thỏa mãn

$$a^2+b^2+c^2+d^2=m^2+n^2+p^2+q^2$$

và $f(b)=b, f(c)=c, f(d)=d, f(n)=n, f(m)=m, f(p)=p, f(q)=q$ thì $f(a)=a$.

Chứng minh. Thật vậy, do $a^2+b^2+c^2+d^2=m^2+n^2+p^2+q^2$ nên

$$f^2(a)+f^2(b)+f^2(c)+f^2(d)=f^2(m)+f^2(n)+f^2(p)+f^2(q)$$
$$\Rightarrow f^2(a)+b^2+c^2+d^2=m^2+n^2+p^2+q^2$$
$$\Rightarrow f^2(a)=a^2\Rightarrow f(a)=a\ (\text{do } f(a)\in\mathbb{N}^*).$$

Quay trở lại bài toán. Ta sẽ chứng minh: với $n\in\mathbb{N}^*$ thì $f(n)=n$. (7)

Do (4) nên (7) đúng với mọi $n\in\{1,2,\ldots,9,10\}$. Giả sử (7) đúng tới $n\geq 10$. Ta chứng minh $f(n+1)=n+1$. Do $n+1$ là số nguyên dương lớn hơn 10 nên theo (5) và (6) suy ra tồn tại 7 số nguyên dương a,b,c,d,m,p,q nhỏ hơn $n+1$ và thỏa mãn

$$a^2+b^2+c^2+d^2=m^2+(n+1)^2+p^2+q^2$$

Vì vậy theo bổ đề suy ra $f(n+1)=n+1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp suy ra (7) đúng.

Thử lại thấy hàm số $f(n)=n, \forall n\in\mathbb{N}^*$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài nên nó là hàm số duy nhất cần tìm.

Bài toán 4.22. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn*

$$f(x^3+y^3+z^3)=f^3(x)+f^3(y)+f^3(z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{Z}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn điều kiện bài toán. Kí hiệu $P(x,y,z)$ là cách cho bộ (x,y,z) (với x,y,z là số nguyên) vào phương trình hàm (1).

- $P(0,0,0)\Rightarrow f(0)=3f^3(0)\Rightarrow f(0)[1-3f^2(0)]=0\Rightarrow f(0)=0.$
- $P(x,-x,0)\Rightarrow f^3(x)=-f^3(-x)\Rightarrow f(-x)=-f(x),\ \forall x\in\mathbb{Z}.$ (2)
- $P(1,0,0)\Rightarrow f(1)=f^3(1)\Rightarrow f(1)\in\{0,1,-1\}.$
- $P(1,1,0)\Rightarrow f(2)=2f^3(1)\Rightarrow f(2)=2f(1).$
- $P(1,1,1)\Rightarrow f(3)=3f^3(1)\Rightarrow f(3)=3f(1).$

Ta dự đoán rằng, với mọi $n\in\mathbb{Z}$ thì: $f(n)=nf(1)$. (3)

Trước hết, ta sẽ chứng minh hai bổ đề sau:

- *Bổ đề 1.* Với mọi số nguyên dương lớn hơn 10, lập phương của nó đều có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của 5 lập phương của các số nguyên khác có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn nó.

- *Chứng minh.* Ta cần tìm mối liên hệ đó với số $n>10$ trong từng trường hợp n chẵn và n lẻ. Trước hết là với n lẻ. Đặt $n=2t+1$, $t\in\mathbb{Z}$. Ta cần tìm một đẳng thức đúng với mọi t mà trong đó $2t+1$ là biểu thức có giá trị tuyệt đối lớn nhất, các biểu thức còn lại phải là nhị thức bậc nhất có hệ số của t là 1 hoặc 2. Khi đó để khử $8t^3$ xuất hiện ở trong $(2t+1)^3$, ta chọn $-(2t-1)^3$. Ta thấy vẫn còn số hạng chứa t^2 trong đó, ta chọn tiếp hai biểu thức khác có chứa t cùng hai hằng số bằng cách đưa thêm tham số vào rồi lựa chọn như sau: Giả sử hai biểu thức cần tìm có dạng $(at+b)$, $(at-b)$ (với $a,b\in\mathbb{Z}$) và hai số cần tìm là $c,d\in\mathbb{Z}$. Khi đó:

$$\left[(2t+1)^3-(2t-1)^3\right]=\left[(at+b)^3-(at-b)^3\right]+\left[c^3+d^3\right] \quad \text{(i)}$$
$$\Leftrightarrow 24t^2+2=6a^2bt^2+2b^3+c^3+d^3$$
$$\Leftrightarrow (24-6a^2b)t^2+(2-2b^3-c^3-d^3)=0.$$

Ta cần chọn a,b,c,d sao cho $a^2b=4$ và $2b^3-c^3-d^3=2$, trong đó $a=1$ hoặc $a=2$. Dễ thấy $a\neq 2$ vì nếu $a=2$ thì từ $a^2b=4\Rightarrow b=1$, thay vào (i) không thu được kết quả nào cả. Với $a=1$ thì $b=4$, suy ra $c^3+d^3=126$, chọn được $c=-5$, $d=-1$. Như vậy:

$$(2t+1)^3+5^3+1^3=(2t-1)^3+(t+4)^3+(4-t)^3. \quad \text{(ii)}$$

Thử lại thấy *(ii)* đúng với mọi $t\in\mathbb{Z}$. Lập luận hoàn toàn tương tự, ta thu được đẳng thức sau:

$$(2k+2)^3=(2k-2)^3+(k+8)^3+(8-k)^3+(-10)^3+(-2)^3. \quad \text{(3i)}$$

Như vậy Bổ đề 1 được chứng minh.

- *Bổ đề 2.* Nếu a, b, c, m, q, p là 6 số nguyên thỏa mãn

$$a^3 + b^3 + c^3 = m^3 + q^3 + p^3$$

và $f(b) = bf(1), f(c) = cf(1), f(m) = mf(1), f(q) = qf(1), f(p) = pf(1)$ thì $f(a) = af(1)$.

- *Chứng minh.* Ta có:

$$\begin{aligned} & f\left(a^3 + b^3 + c^3\right) = f\left(m^3 + q^3 + p^3\right) \\ \Rightarrow & f^3(a) + f^3(b) + f^3(c) = f^3(m) + f^3(q) + f^3(p) \\ \Rightarrow & f^3(a) = f^3(1)\left(m^3 + q^3 + p^3 - b^3 - c^3\right) \\ \Rightarrow & f^3(a) = f^3(1)a^3 \Rightarrow f(a) = f(1)a. \end{aligned}$$

Bổ đề 2 được chứng minh.

Quay trở lại bài toán:

$$P(2,0,0) \Rightarrow f(8) = f^3(2) = 8f^3(1) \Rightarrow f(8) = 8f(1).$$
$$P(2,1,0) \Rightarrow f(9) = f^3(2) + f^3(1) = 8f(1) + f(1) \Rightarrow f(9) = 9f(1).$$
$$P(2,1;1) \Rightarrow f(10) = f^3(2) + f^3(1) + f^3(1) \Rightarrow f(10) = 10f(1).$$

Do (2) nên suy ra: $f(-k) = -kf(1)$, $k = 0, 1, 2, 3, 8, 9, 10$. Tiếp theo ta có:

$$P(2,-1,0) \Rightarrow f(7) = f^3(2) + f^3(-1) \Rightarrow f(7) = 7f(1).$$
$$P(2,-1,-1) \Rightarrow f(6) = f^3(2) + f^3(-1) + f^3(-1) = 6f(1).$$

Trong (ii) lấy $k = 2$ ta được: $5^3 + 5^3 + 1^3 = 3^3 + 6^3 + 2^3$. Do đó:

$$\begin{aligned} & f\left(5^3 + 5^3 + 1^3\right) = f\left(3^3 + 6^3 + 2^3\right) \\ \Rightarrow & f^3(5) + f^3(5) + f^3(1) = f^3(3) + f^3(6) + f^3(2) \\ \Rightarrow & f^3(1)\left(3^3 + 6^3 + 2^3 - 1^3\right) = 2f^3(5) \Rightarrow 2.5^3 f^3(1) = 2f^3(5) \\ \Rightarrow & f^3(5) = 5^3 f^3(1) \Rightarrow f(5) = 5f(1) \Rightarrow f(-5) = -5f(1). \end{aligned}$$

Trong (3i) lấy $k = 1$ ta được: $4^3 = 0^3 + 9^3 + 7^3 + (-10^3) + (-2)^3$. Do đó:

$$\begin{aligned} & f\left(4^3 + 10^3 + 2^3\right) = f\left(0^3 + 9^3 + 7^3\right) \\ \Rightarrow & f^3(4) + f^3(10) + f^3(2) = f^3(9) + f^3(7) \\ \Rightarrow & f^3(4) = f^3(1)\left(9^3 + 7^3 - 10^3 - 2^3\right) = 4^3 f^3(1) \\ \Rightarrow & f(4) = 4f(1) \Rightarrow f(-4) = -4f(1). \end{aligned}$$

Như vậy, ta đã chứng minh được: $f(k) = kf(1), \forall k \in \{-10, -9, \ldots, 9, 10\}$. Do đó (3) đúng với mọi số nguyên n thỏa mãn $|n| \leq 10$.

Giả sử (3) đúng tới số nguyên dương $(n-1) \geq 10$. Khi đó n là số nguyên dương lớn hơn 10 nên theo bổ đề 1 suy ra n^3 được biểu diễn thành tổng của 5 lập phương của các số nguyên khác có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn nó. Vì vậy theo bổ đề 2 suy ra $f(n) = nf(1)$.
Giả sử $n \in \mathbb{Z}, n < -10$, khi đó $-n > 10$. Suy ra:

$$f(n) = f\left(-(-n)\right) = -f(-n) = -(-n)f(1) = nf(1).$$

Theo nguyên lí quy nạp ta được: $f(n) = nf(1), \forall n \in \mathbb{Z}$. Mà $f(1) \in \{0, 1, -1\}$ nên ta nhận được:

$$f(x) \equiv 0, f(x) \equiv x, f(x) \equiv -x.$$

Thử lại thấy ba hàm số $f(x) \equiv 0, f(x) \equiv x, f(x) \equiv -x$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

4.1.4 Hệ đếm cơ số

Hệ đếm cơ số là một trong những khái niệm quan trọng trên tập số nguyên, nó có nhiều ứng dụng liên quan đến các thuật toán trong số học và tin học. Ta nhắc lại rằng, với b là một số nguyên dương lớn hơn hay bằng 2 thì mọi số nguyên dương N đều có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng

$$N = (a_1 \ldots a_k)_b = a_1 b^{k-1} + a_2 b^{k-2} + \cdots + a_k b^0,$$

với $1 \leq a_1 \leq b-1$, $0 \leq a_2, \ldots, a_k \leq b-1$. Đó là định nghĩa hệ đếm cơ số dạng cơ bản nhất. Tuy nhiên, có thể lấy một dãy số nguyên bất kỳ (có trị tuyệt đối tăng nghiêm ngặt) làm hệ đếm cơ số, ví dụ hệ đếm cơ số (-2), hệ đếm cơ số Fibonacci $(3 = 4 - 2 + 1, 17 = 13 + 3 + 1, \ldots)$. Đối với một số bài toán giải phương trình hàm trên tập số nguyên, đôi khi sẽ dễ dàng nhận ra quy luật nếu nó được chuyển thành một bài toán theo một hệ đếm cơ số khác. Sau đây là một số bài toán kinh điển quan trọng thể hiện sâu sắc phương pháp này.

Bài toán 4.23. *Giả sử $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ là hàm số thỏa điều kiện $f(1) = 1$ và*

$$f(n) = \begin{cases} 1 + f\left(\dfrac{n-1}{2}\right) & \text{khi } n = 2k+1 \\ 1 + f\left(\dfrac{n}{2}\right) & \text{khi } n = 2k. \end{cases}$$

Tìm $f(n)$.

Giải. Từ giả thiết suy ra $f(2k+1) = 1 + f(k) = f(2k)$, $k = 1, 2, \ldots$ Ta có

$$f(2) = f(3) = 2; f(4) = f(5) = 3; f(6) = f(7) = 1 + f(3) = 3;$$
$$f(8) = f(9) = f(10) = f(11) = f(12) = f(13) = f(14) = f(15) = 4.$$

Sau khi tính xong các giá trị trên trong hệ cơ số 10, ta vẫn chưa thể hình dung ra quy luật giá trị của $f(n)$. Tuy nhiên, nếu viết trong hệ cơ số 2 thì ta được:

$f(2) = 2 = f(3) \Leftrightarrow f(10_2) = f(11_2) = 2;$
$f(4) = f(5) = f(6) = f(7) = 3 \Leftrightarrow f(100_2) = f(101_2) = f(110_2) = f(111_2) = 3;$

Vậy ta dự đoán $f(n)$ chính là số chữ số của n viết trong hệ nhị phân. Ta sẽ chứng minh điều dự đoán này. Khẳng định $f(n) = n$ đã đúng cho $n = 1, 2, 3, \ldots, 15$. Giả sử khẳng định đã đúng với n, ta chứng minh khẳng định đúng với $n+1$. Nếu n chẵn thì $n = (a_1 \ldots a_k 0)_2 \Rightarrow f(n) = k+1$. Khi đó $n+1 = (a_1 \ldots a_k 1)_2$. Ta có: $\dfrac{n}{2} = (a_1 \ldots a_k)_2 \Rightarrow f\left(\dfrac{n}{2}\right) = k$, suy ra:

$f(n+1) = 1 + f\left(\dfrac{n}{2}\right) = k+1 =$ số chữ số trong biểu diễn nhị phân của n.

Trường hợp n lẻ được chứng minh hoàn toàn tương tự. Như vậy, trong mọi trường hợp ta đều có $f(n)$ bằng chính số chữ số của n viết trong hệ nhị phân.

Bài toán 4.24. *Dãy số $\{f_n\}$ được xác định $f_1 = 1, f_{2n} = 3f_n, f_{2n+1} = f_{2n}+1$. Hãy tính f_{100}.*

Giải. Kí hiệu $f_n = f(n)$. Ta có $f(1) = f(1_2) = 1 = 1.3^0$;

$$f(2) = f(10_2) = 3f(1) = 3 = 1.3^1 + 0.3^0;$$
$$f(3) = f(11_2) = f(2) + 1 = 4 = 1.3^1 + 1.3^0.$$

Như vậy dự đoán rằng với mọi n là số nguyên dương và nếu n có biểu diễn trong hệ nhị phân là $n = \left(a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0\right)_2$ thì

$$f(n) = a_k.3^k + a_{k-1}.3^{k-1} + \cdots + a_1.3^1 + a_0.3^0. \qquad (*)$$

$\star$ Với mọi $n \leq 3$ thì (*) đúng.
$\star$ Giả sử (*) đúng với mọi $i < n$. Ta chứng minh với $i = n$ thì (*) cũng đúng.
- Nếu $n = 2m$ với m có biểu diễn trong hệ nhị phân là $m = \left(a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0\right)_2$ thì $n = \left(a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0 0\right)_2$. Do đó từ $f(n) = f(2m)$ ta có

$$f\left((a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0 0)_2\right) = 3f(m) = 3(a_k.3^k + \cdots + a_1.3^1 + a_0.3^0)$$
$$= a_k.3^{k+1} + \cdots + a_1.3^2 + a_0.3^1 + 0.3^0.$$

- Trường hợp $n = 2m+1$, trong đó m có biểu diễn trong hệ nhị phân là $m = \left(a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0\right)_2$ thì $n = \left(a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0 1\right)_2$, ta được

$$f(n) = f(2m+1) \Leftrightarrow f\left((a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0 1)_2\right) = 3f(m) + 1$$

$$\Leftrightarrow f\left((a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0 1)_2\right) = a_k.3^{k+1} + \cdots + a_1.3^2 + a_0.3^1 + 1.3^0.$$

Vậy (*) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Do đó với $100 = \left(1100100\right)_2$, ta có

$$f(100) = 1.3^6 + 1.3^5 + 1.3^2 = 981.$$

Bài toán 4.25. *Dãy số $\{a_n\}$ được xác định bởi $0 \leq a_0 < 1, a_n = 2a_{n-1}$ nếu $2a_{n-1} < 1$ và $a_n = 2a_{n-1} - 1$ nếu $2a_{n-1} \geq 1$. Hỏi có bao nhiêu giá trị a_0 để $a_5 = a_0$.*

Giải. Ta sẽ trình bày cách giải bài toán này trên trong hệ nhị phân. Ta nhận thấy rằng: Nếu $a_0 = \left(0, d_1 d_2 d_3 \ldots\right)_2$ thì $a_1 = \left(0, d_2 d_3 d_4 \ldots\right)_2$. Thật vậy, nếu $2a_0 < 1$ thì $d_1 = 0$ và $a_1 = 2a_0 = \left(0, d_2 d_3 d_4 \ldots\right)_2$, nếu $2a_0 \geq 1$ thì $d_1 = 1$ và $a_1 = 2a_0 - 1 = \left(0, d_2 d_3 d_4 \ldots\right)_2$. Hoàn toàn tương tự:

$$a_2 = \left(0, d_3 d_4 d_5 \ldots\right)_2, \ldots, a_5 = \left(0, d_6 d_7 d_8 \ldots\right)_2.$$

Khi đó $a_5 = a_0$ khi và chỉ khi a_0 là phân số nhị phân tuần hoàn chu kỳ 5. Có $2^5 = 32$ chu kỳ tuần hoàn như vậy, trong đó chu kỳ 11111 cho chúng ta $a_0 = 1$ (loại). Vậy tất cả có 31 giá trị a_0 thỏa mãn yêu cầu đề bài. Đó là

$$\left(0, 00000\right)_2, \left(0, 00001\right)_2, \ldots, \left(0, 11110\right)_2.$$

Tính sang hệ thập phân các số đó ta được các giá trị tương ứng là:

$$0, \frac{1}{31}, \frac{2}{31}, \ldots, \frac{30}{31}.$$

Bài toán 4.26. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện:*
1) $f(1) = 1$;
2) $f(2n) = 2f(n) - 1, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$;
3) $f(2n+1) = 2f(n) + 1, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa yêu cầu bài toán. Từ giả thiết ta có $f(1) = 1$, suy ra $f(1_2) = 1_2 = 1.2^0$ và

$$1 = f(2) = f((10)_2) = (01)_2 = 0.2^1 + 1.2^0;$$
$$3 = f(3) = f((11)_2) = (11)_2 = 1.2^1 + 1.2^0;$$
$$1 = f(4) = f((100)_2) = (001)_2 = 0.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0;$$
$$3 = f(5) = f((101)_2) = (011)_2 = 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0.$$

Ta thấy rằng: Nếu n có biểu diễn trong hệ nhị phân là $n = (a_k a_{k-1} \dots a_1)_2$ với $a_k = 1$ thì

$$f((a_k a_{k-1} \dots a_1)_2) = (a_{k-1} \dots a_1 a_k)_2 = a_{k-1}.2^{k-1} + \dots + a_1.2^1 + a_k.2^0. \quad (*)$$

Ta chứng minh nhận xét trên bằng quy nạp.

• (*) đúng với $n \le 5$.

• Giả sử (*) đúng với $n = m$, $(m \ge 6)$. Ta chứng minh (*) đúng với $n = m+1$.

Trường hợp 1: $m+1$ là số chẵn, đặt $m+1 = 2q$ với $q = (a_k a_{k-1} \dots a_1)_2$ và

$$m + 1 = 2q = (a_k a_{k-1} \dots a_1 0)_2$$

ta được

$$\begin{aligned} f(m+1) = f(2q) = 2f(q) - 1 &= 2(a_{k-1}.2^{k-1} + \dots + a_1.2^1 + a_k.2^0) - 1 \\ &= (a_{k-1} \dots a_1 01)_2 = (a_{k-1} \dots a_1 0 a_k)_2. \end{aligned}$$

Trường hợp 2: $m+1$ là số lẻ, đặt $m+1 = 2q+1$ với $q = (a_k a_{k-1} \dots a_1)_2$ và

$$m + 1 = 2q + 1 = (a_k a_{k-1} \dots a_1 1)_2$$

ta được

$$\begin{aligned} f(m+1) = f(2q+1) &= 2f(q) + 1 \\ &= 2(a_{k-1}.2^{k-1} + \dots + a_1.2^1 + a_k.2^0) + 1 \\ &= (a_{k-1} \dots a_1 11)_2 = (a_{k-1} \dots a_1 1 a_k)_2. \end{aligned}$$

Vậy (*) đúng với $n = m+1$. Do đó nếu n có biểu diễn trong hệ nhị phân là $n = (a_k a_{k-1} \dots a_1)_2$ với $a_k = 1$ thì

$$f((a_k a_{k-1} \dots a_1)_2) = (a_{k-1} \dots a_1 a_k)_2 = a_{k-1}.2^{k-1} + \dots + a_1.2^1 + a_k.2^0.$$

Thử lại, ta thấy hàm số f thỏa điều kiện bài toán.

Bài toán 4.27. *Giả sử $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ là hàm số thỏa mãn*

$$f(1) = 1,\ f(2n) = f(n) \text{ và } f(2n+1) = f(2n) + 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tìm giá trị lớn nhất của $f(n)$ trong tập $\{1, 2, \dots, 2006\}$.

Giải. Vì $f(2n)$ được tính theo $f(n)$ và $f(2n+1)$ được tính theo $f(2n)$, tức là theo $f(n)$, nên ta nghĩ tới chuyện viết các số trong cơ số 2. Ta có

$$\begin{aligned} &f(10_2) = f(2) = f(1) = 1;\ f(11_2) = f(3) = f(2) + 1 = 2; \\ &f(100_2) = f(4) = f(2) = 1;\ f(101_2) = f(5) = f(2) + 1 = 2; \\ &f(110_2) = f(6) = f(3) = 2;\ f(111_2) = f(7) = f(3) + 1 = 3. \end{aligned}$$

Từ đây ta rút ra quy luật.

Quy luật: $f(n)$ bằng số chữ số 1 trong biểu diễn cơ số 2 của n.

Chứng minh: Giả sử khẳng định đúng với mọi $k < n$. Ta sẽ chứng minh nó đúng với n.

• Nếu n chẵn thì $n = 2m = 10_2 \times m$. Vì trong hệ cơ số 2, khi nhân một số với $2 = 10_2$, ta chỉ việc thêm số 0 vào cuối số đó nên m và $n = 10_2 \times m$ có cùng số chữ số 1 trong biểu diễn cơ số 2. Theo giả thiết quy nạp, $f(m)$ bằng đúng số chữ số 1 của m, mà $f(n) = f(2m) = f(m)$ nên $f(n)$ cũng bằng đúng số chữ số 1 của m, tức là cũng bằng đúng số chữ số 1 của n.

• Nếu n lẻ, tức là $n = 2m + 1 = 10_2 \times m + 1$ thì n có số chữ số 1 nhiều hơn m là 1 chữ số (thêm chữ số 1 ở hàng cuối cùng, tức là ở hàng đơn vị). Theo đầu bài ta có $f(n) = f(2m+1) = f(m) + 1$, mà theo giả thiết quy nạp, $f(m)$ bằng đúng số chữ số 1 của m nên $f(n)$ cũng bằng số chữ số 1 của m cộng thêm 1, tức là $f(n)$ cũng bằng đúng số chữ số 1 của n.

Bài toán dẫn đến phải tìm số có số chữ số 1 lớn nhất trong biểu diễn cơ số 2 của các số nhỏ hơn hoặc bằng 2006. Vì $11111111111_2 = 2^{11} - 1 = 2047$ gồm 11 chữ số 1, mà $2006 < 2047$ nên $f(n)$ có nhiều nhất là 10 chữ số 1. Ta lại có

$$f(1023) = f(1111111111_2) = 10.$$

Do đó giá trị lớn nhất của $f(n)$ trong khoảng $1 \le n \le 2006$ là 10 đạt được khi $n = 1023$.

Bài toán 4.28 (Chọn đội tuyển Singapore-1995). *Giả sử $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ là hàm số thỏa mãn*

$$f(1) = 1,\ f(2n) = f(n) \text{ và } f(2n+1) = f(2n) + 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1) *Tìm giá trị lớn nhất M của $f(n)$ trong tập $\{1, 2, \dots, 1994\}$.*

2) *Tìm tất cả các số $n \in \mathbb{N}^*$ với $1 \le n \le 1994$ sao cho $f(n) = M$.*

Bài toán 4.29 (IMO 1988). *Giả sử $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ là hàm số thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(3) = 3$ và với mọi số nguyên dương n thì*

$$\begin{aligned} &f(2n) = f(n);\ f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n); \\ &f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n). \end{aligned}$$

Tìm số $n \le 1988$ mà $f(n) = n$.

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa yêu cầu bài toán. Một số $k \in \mathbb{N}$ bất kì chỉ có thể có một trong bốn dạng:

$$k = 4n = 2.2n;\ k = 4n+1;\ k = 4n+2 = 2(2n+1);\ k = 4n+3.$$

Do đó từ giả thiết có thể thấy rằng hàm số đã cho được xác định một cách duy nhất. Ta sẽ sử dụng cơ số 2 để tìm biểu diễn của hàm số f. Ta có

$$f(1_2) = f(1) = 1 = 1_2;\ f(10_2) = f(2) = f(1) = 1 = 01_2;$$

$$f(11_2) = f(3) = 3 = 11_2;\ f(100_2) = f(4) = 1 = 001_2;$$
$$f(101_2) = f(5) = 5 = 101_2;\ f(110_2) = f(6) = 3 = 011_2.$$

Quy luật: Biểu diễn của $f(n)$ trong cơ số 2 chính là biểu diễn của n bằng cách viết ngược lại, tức là $f((a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_2) = (a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k)_2$.

Chứng minh. Giả sử tính chất đúng cho mọi $k < n$. Ta sẽ chứng minh nó đúng cho n.

• Nếu n chẵn ($n = 2m$) thì theo giả thiết $f(n) = f(2m) = f(m)$ (để cho tiện, ta sẽ viết $a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$ thay cho $(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_2$). Vì $n = 2m$ nên nếu m được biểu diễn trong hệ cơ số 2 dưới dạng $m = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$ thì $n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 0$. Theo giả thiết quy nạp ta có

$$f(m) = f(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0) = a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k = 0 a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k.$$

Vậy

$$\begin{aligned} f(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 0) &= f(n) = f(m) = f(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0) \\ &= a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k = 0 a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k. \end{aligned}$$

• Nếu $n = 4m + 1$ với $m = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$ thì $n = 4m + 1 = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 01$ và

$$2m + 1 = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 1.$$

Theo đầu bài và giả thiết quy nạp ta có:

$$\begin{aligned} & f(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 01) = f(4m+1) = 2f(2m+1) - f(m) \\ =& 2.1 a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k - f(m) = 1 a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k 0 - f(m) \\ =& \underbrace{10\dots.0}_{k+3} + a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k 0 - a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k \\ =& \underbrace{10\dots.0}_{k+3} + a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k = 10 a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k. \end{aligned}$$

• Nếu $n = 4m + 3$ với $m = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$ thì $n = 4m + 3 = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 11$ và

$$2m + 1 = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 1.$$

Từ giả thiết của đầu bài và giả thiết quy nạp suy ra:

$$\begin{aligned} & f(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 11) = f(4m+3) = 3f(2m+1) - 2f(m) \\ =& f(2m+1) + 2f(2m+1) - 2f(m) \\ =& 1 a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k + 1 a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k 0 - a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k 0 \\ =& 1 a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k + \underbrace{10\dots0}_{k+3} = 11 a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k. \end{aligned}$$

Vậy quy luật được chứng minh.

Một số trong cơ số 2 được gọi là *palindromic* nếu nó không đổi khi ta đổi chỗ

các chữ số theo thứ tự ngược lại. Với mỗi k, có tất cả $2^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}$ số *palindromic* có độ dài k (số *palindromic* bậc k). Thật vậy, một số *palindromic* hoàn toàn được xác định nếu biết tất cả $\left[\dfrac{k+1}{2}\right]$ chữ số đầu tiên (bên phải), các chữ số còn lại được xác định bằng cách lấy đối xứng qua số đứng giữa. Vì chữ số ở vị trí đầu tiên bên phải bắt buộc phải là 1, nên chỉ còn lại $\left[\dfrac{k+1}{2}\right] - 1 = \left[\dfrac{k-1}{2}\right]$ vị trí tùy chọn là chữ số 0 hoặc chữ số 1. Có $\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{\left[\frac{k-1}{2}\right]} = 2^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}$ khả năng chọn, nghĩa là có tất cả $2^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}$ số *palindromic* bậc k.

Từ quy luật trên suy ra nghiệm của phương trình $f(n) = n$ với

$$n \le 1988 = 11111001110_2$$

chính là các số *palindromic* với tối đa 10 chữ số và những số có 11 chữ số nhưng nhỏ hơn $n \le 1988$. Vì có một số với 1 chữ số (số $1 = 1_2$) và một số với 2 chữ số trong cơ số 2 (số $3 = 11_2$) thỏa mãn phương trình $f(n) = n$ nên có tất cả

$$1 + 1 + 2^{\left[\frac{3-1}{2}\right]} + 2^{\left[\frac{4-1}{2}\right]} + \dots + 2^{\left[\frac{9-1}{2}\right]} + 2^{\left[\frac{10-1}{2}\right]} = 2(1 + 2 + \dots + 16) = 62$$

số có tối đa 10 chữ số trong cơ số 2, tức là có tất cả 62 số trong khoảng $0 \le n \le 1023$ thỏa mãn phương trình $f(n) = n$. Có tất cả $2^{\left[\frac{11-1}{2}\right]} = 32$ số trong khoảng $1024 \le n \le 2047$ (có 11 chữ số) là *palindromic*. Trong các số đó có hai số $11111111111_2 = 2047$ và $11111011111_2 = 2015$ vượt quá 1988. Vậy có tất cả 32-2=30 số trong khoảng $1024 \le n \le 1988$ thỏa mãn phương trình $f(n) = n$. Cuối cùng, phương trình $f(n) = n$ có tất cả 62+30=92 nghiệm.

Bài toán 4.30 (IMO shortlist 2000). *Hàm số $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

$$\begin{aligned} &(i) && F(4n) = F(2n) + F(n); \\ &(ii) && F(4n+2) = F(4n) + 1; \\ &(iii) && F(2n+1) = F(2n) + 1. \end{aligned}$$

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương m, số các số nguyên n với $0 \le n < 2^m$ và $F(4n) = F(3n)$ bằng $F(2^{m+1})$.

Giải. Giả sử tồn tại hàm số F thỏa yêu cầu bài toán. Do (i) ta có

$$F(4.0) = F(2.0) + F(0).$$

Suy ra $F(0) = 0$. Tương tự, từ (ii) suy ra $F(2) = F(4.0+2) = F(4.0) + 1 = 1$. Từ (iii) ta có: $F(3) = F(2+1) = F(2) + 1 = 2$. Ta thấy $F(n)$ xác định một cách duy nhất từ ba điều kiện của đầu bài. Ta tính và quan sát bảng giá trị của $F(n)$ dưới đây:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$F(n)$	0	1	1	2	2	3	3	4	3	4	4	5	5	6	6	7	5

Bổ đề 1. $F(2^r) = u_{r+1}$, trong đó u_r là số hạng thứ r của dãy Fibonacci ($u_0 = 0, u_1 = 1, u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, n \geq 1$).

Chứng minh.
Với $r = 0$ ta có $F(2^0) = F(1) = 1 = u_1$;
Với $r = 1$ ta có $F(2^1) = F(2) = 1 = u_2 = u_{1+1}$;
Với $r = 2$ ta có $F(2^2) = F(4) = 2 = u_3 = u_{2+1}$;
Với $r = 3$ ta có $F(2^3) = F(8) = 3 = u_4 = u_{3+1}$;
Với $r = 4$ ta có $F(2^4) = F(16) = 5 = u_5 = u_{4+1}$.
Giả sử khẳng định trên đúng với mọi $1 \leq k \leq r$. Ta sẽ chứng minh nó đúng cho $r + 1$. Điều này dễ dàng suy ra từ (i), từ giả thiết quy nạp và từ định nghĩa của dãy Fibonacci:

$$F(2^{r+1}) = F(4.2^{r-1}) = F(2.2^{r-1}) + F(2^{r-1}) = u_{r+1} + u_{(r-1)+1} = u_{r+2}.$$

Quan sát bảng giá trị của $F(n)$ tính theo n và u_n dưới đây.

n	u_n	$(n)_2$	$F(n)$	$F(n) = a_k u_{k+1} + \cdots + a_0 u_1$
0	0	0_2	0	$F(0) = 0.u_1 = 0$
1	1	1_2	1	$F(1) = 1.u_1 = 1$
2	1	10_2	1	$F(2) = 1.u_2 + 0.u_1 = 1$
3	2	11_2	2	$F(3) = 1.u_2 + 1.u_1 = 2$
4	3	100_2	2	$F(4) = 1.u_3 + 0.u_2 + 0.u_1 = 2$
5	5	101_2	3	$F(5) = 1u_3 + 0.u_2 + 1.u_1 = 3$
6	8	110_2	3	$F(6) = 1.u_3 + 1.u_2 + 0.u_1 = 3$
7	13	111_2	4	$F(7) = 1.u_3 + 1.u_2 + 1.u_1 = 4$
8	21	1000_2	3	$F(8) = 1.u_4 + 0.u_3 + 0.u_2 + 0.u_1 = 3$
9	34	1001_2	4	$F(9) = 1.u_4 + 0.u_3 + 0.u_2 + 1.u_1 = 4$
10	55	1010_2	4	$F(10) = 1.u_4 + 0.u_3 + 1.u_2 + 0.u_1 = 4$
11	89	1011_2	5	$F(11) = 1.u_4 + 0.u_3 + 1.u_2 + 1.u_1 = 5$
12	144	1100_2	5	$F(12) = 1.u_4 + 1.u_3 + 0.u_2 + 0.u_1 = 5$
13	233	1101_2	6	$F(13) = 1.u_4 + 1.u_3 + 0.u_2 + 1.u_1 = 6$
14	377	1110_2	6	$F(14) = 1.u_4 + 1.u_3 + 1.u_2 + 0.u_1 = 6$
15	610	1111_2	7	$F(15) = 1.u_4 + 1.u_3 + 1.u_2 + 1.u_1 = 7$
16	987	10000_2	5	$F(16) = 1.u_5 + 0.u_4 + 0.u_3 + 0.u_2 + 0.u_1 = 5$

Ta thấy $F(n)$ được biểu diễn dưới dạng tổng của các số hạng của dãy Fibonacci. Hơn nữa, ta có Bổ đề sau.

Bổ đề 2. Nếu n có biểu diễn cơ số 2 là $n = (a_k...a_0)_2$ thì

$$F(n) = a_k u_{k+1} + \cdots + a_0 u_1. \qquad (*)$$

Chứng minh. Ta chứng minh rằng $F(n)$ được xác định theo công thức $(*)$ sẽ thỏa mãn cả ba điều kiện (i), (ii), (iii) với mọi $n \geq 0$. Thật vậy, nếu

$n = (a_k...a_0)_2$ thì $4n = (a_k...a_00)_2$; $4n + 2 = (a_k...a_010)_2$; $2n = (a_k...a_00)_2$, do đó $F(4n) = a_k u_{k+3} + \ldots + a_0 u_3$ và

$$F(2n) = a_k u_{k+2} + \ldots + a_0 u_2.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} F(4n) &= a_k(u_{k+2} + u_{k+1}) + \ldots + a_0(u_2 + u_1) \\ &= (a_k u_{k+2} + \ldots + a_0 u_2) + (a_k u_{k+1} + \ldots + a_0 u_1) = F(2n) + F(n). \end{aligned}$$

Vậy (i) được chứng minh. Vì $u_2 = 1$ nên ta cũng có

$$F(4n + 2) = a_k u_{k+3} + \ldots + a_0 u_3 + u_2 = F(4n) + 1,$$

hay (ii) được chứng minh. Và cuối cùng, vì $u_1 = 1$ nên

$$F(2n + 1) = a_k u_{k+2} + \ldots + a_0 u_2 + u_1 = F(2n) + 1,$$

tức là (iii) đúng. Do (i)-(iii) xác định duy nhất $F(n)$ nên $(*)$ chính là công thức tổng quát của $F(n)$.

Bổ đề 3. Nếu trong biểu diễn nhị phân của n không có hai chữ số 1 đứng liền nhau (ta gọi là chữ số 1 cô lập) thì $F(3n) = F(4n)$.

Chứng minh. Giả sử trong biểu diễn nhị phân của $n = (a_k \ldots a_0)_2$ không có hai chữ số 1 liên tiếp. Vì $3n = 2n + n$, mà $2n = (a_k \ldots a_0 0)_2$, nên

$$3n = 2n + n = (a_k \ldots a_0 0)_2 + (a_k \ldots a_0)_2.$$

Vì trong biểu diễn nhị phân của $n = (a_k \ldots a_0)_2$ không có hai chữ số 1 liên tiếp nên phép cộng trên là không có nhớ từ hàng này sang hàng sau, tức là nếu $n = (a_k \ldots a_0)_2$ thì

$$\begin{aligned} 3n = 2n + n &= (a_k \ldots a_0 0)_2 + (a_k \ldots a_0)_2 \\ &= a_k(a_{k-1} + a_k) \ldots (a_{i-1} + a_i) \ldots (a_0 + a_1)a_0. \end{aligned}$$

Do đó $F(n) = a_k u_{k+1} + \ldots + a_0 u_1$ và

$$\begin{aligned} F(3n) &= a_k u_{k+2} + (a_{k-1} + a_k)u_{k+1} + \ldots + (a_{i-1} + a_i)u_{i+1} + \ldots + a_0 u_1 \\ &= a_k(u_{k+2} + u_{k+1}) + a_{k-1}(u_{k+1} + u_k) + \ldots + a_{i-1}(u_{i+1} + u_i) + \\ &\quad + \ldots + a_0(u_2 + u_1) = a_k u_{k+3} + \ldots + a_0 u_3 = F(4n). \end{aligned}$$

Bổ đề 4. Với mọi n thì $F(3n) \leq F(4n)$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi trong biểu diễn số nhị phân của n là mọi chữ số 1 là cô lập.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh Bổ đề 4 đúng với mọi $0 \leq n \leq 2^m$ bằng quy nạp theo $m \geq 1$. Với $m = 1, 2, 3, 4$ ($0 \leq n \leq 16$) điều này dễ dàng thấy được qua bảng trên. Thật vậy:
Với $n = 1 = 1_2$: $F(3) = F(4) = 2$;

Với $n = 2 = 10_2$: $F(6) = F(8) = 3$;
Với $n = 3 = 11_2$: $F(9) = 4 < 5 = F(12)$;
Với $n = 4 = 100_2$: $F(12) = F(16) = 5$.
Giả sử Bổ đề 4 đúng với mọi $k \le m$. Ta sẽ chứng minh nó đúng với $k = m+1$.
Giả sử $2^m \le n < 2^{m+1}$. Khi ấy $n = 2^m + p$ với $0 \le p < 2^m$. Giả sử

$$n = 2^m + p = \left(1\underbrace{00\ldots00}_{m}\right)_2 + (a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_1a_0)_2$$
$$= (1a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_1a_0)_2.$$

Vì $p = (a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_1a_0)_2$ (hệ số a_{m-1} không nhất thiết bằng 0) nên

$$4p = (a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_1a_000)_2$$

và $4n = (1a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_1a_000)_2$. Do (*) ta có

$$F(4n) = u_{m+3} + a_{m-1}u_{m+2} + a_{m-2}u_{m+1} + \ldots + a_1u_4 + a_0u_3$$
$$= u_{m+3} + F(4p).$$

Xét ba trường hợp.
1) $0 \le p < \dfrac{2^m}{3}$. Khi ấy $3p < 2^m$, do đó $3p = (b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_0)_2$ và

$$3n = 3(2^m + p) = 2^{m+1} + 2^m + 3p$$
$$= \left(1\underbrace{00\ldots00}_{m+1}\right)_2 + \left(1\underbrace{00\ldots00}_{m}\right)_2 + (b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_0)_2$$
$$= (11b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_0)_2.$$

Vì $0 \le p < 2^m$ nên theo giả thiết quy nạp ta có $F(3p) \le F(4p)$. Do đó, từ (*) suy ra

$$F(3n) = u_{m+2} + u_{m+1} + b_{m-1}u_m + b_{m-2}u_{m-1} + \ldots + b_1u_2 + b_0u_1$$
$$= u_{m+3} + F(3p) \le u_{m+3} + F(4p) = F(4n).$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow F(3p) = F(4p)$, nghĩa là nếu các chữ số 1 của p là cô lập. Nhưng vì $n = 2^m + p$ với $0 \le p < 2^m$ nên các chữ số 1 của n cũng là cô lập. Vậy $F(3n) = F(4n)$ khi và chỉ khi các chữ số 1 của n là cô lập.
2) $\dfrac{2^m}{3} \le p < \dfrac{2^{m+1}}{3}$. Khi ấy $3p = 2^m + h$ với $0 \le h < 2^m$ nên ta có biểu diễn nhị phân: $3p = \left(1\underbrace{0\ldots0}_{m}\right)_2 + (h_{m-1}h_{m-2}\ldots h_1h_0)_2 = (1h_{m-1}h_{m-2}\ldots h_1h_0)_2$.
Do đó:

$$F(3p) = u_{m+1} + h_{m-1}u_m + h_{m-2}u_{m-1} + \ldots + h_1u_2 + h_0u_1 = u_{m+1} + F(h).$$

Vì

$$3n = 3(2^m + p) = 2^{m+1} + 2^m + 3p$$
$$= \left(1\underbrace{00\ldots00}_{m+1}\right)_2 + \left(1\underbrace{00\ldots00}_{m}\right)_2 + \left(1h_{m-1}h_{m-2}\ldots h_1h_0\right)_2$$
$$= \left(100h_{m-1}h_{m-2}\ldots h_1h_0\right)_2,$$

nên theo (*) và quy nạp ta có

$$F(3n) = u_{m+3} + h_{m-1}u_m + h_{m-2}u_{m-1} + \ldots + h_1u_2 + h_0u_1$$
$$= u_{m+3} + F(h) = u_{m+3} + F(3p) - u_{m+1} = u_{m+2} + F(3p)$$
$$\le u_{m+2} + F(4p) < u_{m+3} + F(4p) = F(4n).$$

Trong trường hợp này dấu bằng không bao giờ xảy ra.
3) $\dfrac{2^{m+1}}{3} \le p < 2^m$. Khi ấy $2^{m+1} \le 3p < 3.2^m$ và $3p = 2^{m+1} + q$ với $0 \le q < 2^m$ nên ta có biểu diễn nhị phân

$$3p = \left(1\underbrace{0\ldots0}_{m+1}\right)_2 + \left(q_{m-1}q_{m-2}\ldots q_1q_0\right)_2 = \left(10q_{m-1}q_{m-2}\ldots q_1q_0\right)_2.$$

Do đó $F(3p) = u_{m+2} + q_{m-1}u_m + q_{m-2}u_{m-1} + \ldots + q_1u_2 + q_0u_1 = u_{m+2} + F(q)$.
Vì

$$3n = 3(2^m + p) = 2^{m+1} + 2^m + 3p$$
$$= \left(1\underbrace{00\ldots00}_{m+1}\right)_2 + \left(1\underbrace{00\ldots00}_{m}\right)_2 + \left(10q_{m-1}q_{m-2}\ldots q_1q_0\right)_2$$
$$= \left(101q_{m-1}q_{m-2}\ldots q_1q_0\right)_2,$$

nên theo (*) và quy nạp ta có

$$F(3n) = u_{m+3} + u_{m+1} + q_{m-1}u_m + q_{m-2}u_{m-1} + \ldots + q_1u_2 + q_0u_1$$
$$= u_{m+3} + u_{m+1} + F(q) = u_{m+3} + u_{m+1} + F(3p) - u_{m+2}$$
$$< u_{m+3} + F(4p) = F(4n).$$

Dấu bằng không xảy ra.
Như vậy, trong mọi trường hợp ta đều có $F(3n) \le F(4n)$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $0 \le p < \dfrac{2^m}{3}$ và p chỉ có các chữ số 1 cô lập. Lúc đó các chữ số 1 trong n cũng là cô lập. Bây giờ ta còn phải chứng minh rằng có $u_{m+2} = F(2^{m+1})$ số nguyên dương n trong khoảng $[0; 2^m)$, với các chữ số 1 bị cô lập trong biểu diễn nhị phân của chúng. Thật vậy, với $m = 1$ ta có

hai số 0 và 1 và $u_3 = 2$; với $m = 2$ ta có ba số 0; 1 và $3 = (10)_2$ là những số với các chữ số 1 bị cô lập trong biểu diễn nhị phân và $u_4 = 3$. Giả sử điều này đúng với mọi $k = m$. Ta chứng minh nó đúng với $k = m$. Giả sử $n < 2^m$ và $n = (a_{m-1} \dots a_0)_2$. Khi ấy $n < 2^{m-1}$ khi và chỉ khi $a_{m-1} = 0$. Trong trường hợp này theo quy nạp ta có u_{m+1} số với các chữ số 1 cô lập. Nếu $2^{m-1} \le n < 2^m$ thì $a_{m-1} = 1$, do đó $a_{m-2} = 0$ và lại theo quy nạp ta có u_m số với các chữ số 1 cô lập. Vậy trong tất cả các số trong khoảng $0 \le n < 2^m$ có tổng cộng $u_{m+1} + u_m = u_{m+2} = F(2^{m+1})$ số với các chữ số 1 cô lập.

4.2 Áp dụng một số tính chất của dãy số và hàm số để giải phương trình hàm

4.2.1 Số hạng tổng quát của dãy số

Xét phương trình hàm trên $\mathbb{Z}$ dạng $\sum_{i \in \mathbb{N}^*} a_i f^{[i]} = g(n)$, trong đó vế phải là một đa thức biến n nguyên và vế trái là các hàm hợp của f xác định bởi

$$f^{[1]}(n) = f(n),\ f^{[2]}(n) = f(f(n)),\ f^{[i+1]}(n) = f\left(f^{[i]}(n)\right).$$

Một phương pháp để giải phương trình hàm dạng này là, trước hết, phải xác định được công thức tổng quát của dãy

$$a_1 = \alpha,\ a_i = f^{[i]}(n),$$

với α là một số bất kì thuộc tập xác định của hàm số. Ta cần lưu ý đến tập xác định và tập giá trị của hàm số để khống chế dãy số để tạo ra các điều kiện có lợi.

Lưu ý. Kĩ thuật xét dãy số như thế này sẽ được sử dụng tiếp trong bài 5.1: Phương trình hàm dạng $\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x) + g(x) = 0$ (ở trang 515).

Bài toán 4.31 (Pan African Olympiad 2002). *Tìm các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn:*

$$f(f(n)) = f(n) + 1,\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

và $\min\{f(0), f(1), f(2), \dots\} = 1$.

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn yêu cầu bài toán. Với n là số tự nhiên bất kì, xét dãy số (a_n) như sau: $a_0 = n$ và $a_{n+1} = f(a_n)$. Khi đó $a_n \ge 0, \forall n$ và từ (1) thay n bởi a_n ta được

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 1,\ \forall n = 0, 1, 2, \dots \tag{2}$$

Sử dụng (2) liên tiếp, ta được:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 1 \\ a_3 &= a_2 + 1 \\ a_4 &= a_3 + 1 \\ &\dots\dots\dots \\ a_n &= a_{n-1} + 1. \end{aligned}$$

Cộng lại, ta được: $a_n = a_1 + (n-1),\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Bài toán 4.32. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn*

$$f(f(f(n))) + f(f(n)) = 3f(n) - n,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn yêu cầu bài toán. Với n là số tự nhiên bất kì, xét dãy số (a_n) như sau: $a_0 = n$ và $a_{n+1} = f(a_n)$. Khi đó $a_n \ge 0, \forall n$ và từ (1) thay n bởi a_n ta được

$$a_{n+3} + a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Phương trình đặc trưng $\lambda^3 + \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1, -1 \pm \sqrt{2}\}$. Do đó

$$a_n = C + A\left(-1 - \sqrt{2}\right)^n + B\left(-1 + \sqrt{2}\right)^n,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Vì $\left|-1 + \sqrt{2}\right| < 1 < \left|-1 - \sqrt{2}\right|$ nên $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-1 + \sqrt{2}\right)^n = 0$ và

$$\lim_{n \to +\infty} \left(-1 - \sqrt{2}\right)^{2n+1} = -\infty,\ \lim_{n \to +\infty} \left(-1 - \sqrt{2}\right)^{2n} = +\infty.$$

Do đó từ (2), nếu $A > 0$ ta cho n lẻ và đủ lớn sẽ có $a_n < 0$, vô lí, nếu $A < 0$ ta cho n chẵn và đủ lớn sẽ có $a_n < 0$, vô lí. Do đó $A = 0$. Vậy

$$a_n = C + B\left(-1 + \sqrt{2}\right)^n,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Từ (3) ta có $n = a_0 = C + B$ và

$$f(n) = f(a_0) = a_1 = C + B\left(-1 + \sqrt{2}\right) = n + \left(\sqrt{2} - 2\right)B. \tag{4}$$

Thay (4) vào (1) ta được $\left(\sqrt{2} - 2\right)B = 0 \Leftrightarrow B = 0$. Do đó (4) trở thành $f(n) = n,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 4.33. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3k,\ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

trong đó k là số tự nhiên cho trước.

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn yêu cầu bài toán. Đặt $a_1 = n$ và với $n \geq 1$ ta đặt $a_{n+1} = f(a_n)$. Khi đó từ (1) ta được

$$2a_n + 3k = a_{n+1} + a_{n+2}. \tag{2}$$
$$2a_{n+1} + 3k = a_{n+2} + a_{n+3}. \tag{3}$$

Lấy (3) trừ (2) vế theo vế ta có $a_{n+3} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$. Suy ra

$$a_n = \lambda_1 + n\lambda_2 + \lambda_3(-2)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{4}$$

Nhưng từ (4), nếu $\lambda_3 > 0$ ta cho n lẻ và đủ lớn sẽ có $a_n < 0$, vô lí, nếu $\lambda_3 < 0$ ta cho n chẵn và đủ lớn sẽ có $a_n < 0$, vô lí. Do đó $\lambda_3 = 0$. Hay $a_n = \lambda_1 + n\lambda_2$. Thay vào (2), ta được

$$2\lambda_1 + 2n\lambda_2 + 3k = \lambda_1 + (n+1)\lambda_2 + \lambda_1 + (n+2)\lambda_2.$$

Từ đó $\lambda_2 = k$. Bây giờ chú ý tới

$$a_2 - a_1 = \lambda_1 + 2k - (\lambda_1 + k) = k \Rightarrow f(n) - n = k.$$

Vậy $f(n) = n + k$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Thử lại ta thấy $f(n) = n + k$, $\forall n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài toán 4.34. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(f(f(n))) + 6f(n) = 3f(f(n)) + 4n + 2007, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử hàm f thỏa mãn yêu cầu bài toán. Với k là số tự nhiên bất kì, xét dãy (x_n) như sau: $x_0 = k$, và $x_{n+1} = f(x_n)$. Từ (2) thay n bởi x_n, ta được

$$x_{n+3} = 3x_{n+2} - 6x_{n+1} + 4x_n + 2007, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Phương trình đặc trưng $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 6\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1, 1 \pm \sqrt{3}i\}$. Số hạng tổng quát của dãy (x_n) là

$$x_n = A + 2^n\left(B\cos\frac{n\pi}{3} + C\sin\frac{n\pi}{3}\right) + Dn, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ta có $k = x_0 = A + B$, suy ra

$$f(k) = f(x_0) = x_1 = A + B + C\sqrt{3} + D \Rightarrow f(k) = k + C\sqrt{3} + D. \tag{3}$$

Thay (3) vào (1) được $D + C\sqrt{3} = 669$ và (3) trở thành

$$f(n) = n + 669, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 4.35 (Romania District Olympiad 2010, Grade 10). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện*

$$3f(f(f(n))) + 2f(f(n)) + f(n) = 6n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Hướng dẫn. Xem lại lời giải các bài toán 4.32, 4.34.

Bài toán 4.36 (Balkan MO 2002). *Tìm các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn*

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 2001 \text{ hoặc } 2n + 2002, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Với k là số tự nhiên bất kì, xét dãy số (a_n) như sau: $a_0 = k$, và $a_{n+1} = f(a_n)$. Từ (2) thay n bởi a_n, ta được

$$a_{n+2} + a_{n+1} = 2a_n + 2001 \text{ hoặc } 2a_n + 2002, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Phương trình đặc trưng của dãy số (a_n) là

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1, -2\}.$$

Suy ra $a_n = A + B(-2)^n + Cn$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ta có $k = a_0 = A + B$, suy ra

$$f(k) = a_1 = A - 2B + C = A + B - 3B + C = k - 3B + C. \tag{2}$$

Thay $g(n) = n - 3B + C$ vào (1) được $-3B + C = 667$ hoặc $\frac{2002}{3}$. Vậy từ (2) ta có $f(n) = n + 667$ hoặc $f(n) = n + \frac{2002}{3}$ $\left(\text{loại, do } f(n) = (n + \frac{2002}{3}) \notin \mathbb{N}\right)$. Thử lại thấy $f(n) = n + 667$ thỏa mãn. Do đó có duy nhất một hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là $f(n) = n + 667$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Bài toán 4.37. *Tồn tại hay không hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn*

$$f\big(f(n)\big) + 3n = 2f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa điều kiện bài toán. Với mỗi $i \in \mathbb{N}^*$ ta xây dựng dãy $(a_n)_{n=1}^{+\infty} : a_1 = i$, $a_{n+1} = f(a_n)$. Khi đó

$$a_{n+1} = f(a_n) = f\big(f(a_{n-1})\big) = 2f(a_{n-1}) - 3a_{n-1} = 2a_n - 3a_{n-1}.$$

Vì thế

$$\begin{aligned} a_{n+4} &= 2a_{n+3} - 3a_{n+2} = 2\left(2a_{n+2} - 3a_{n+1}\right) - 3a_{n+2} = a_{n+2} - 6a_{n+1} \\ &= 2a_{n+1} - 3a_n - 6a_{n+1} = -4a_{n+1} - 3a_n. \end{aligned}$$

Do đó $a_{n+4} + 4a_{n+1} + 3a_n = 0$, $\forall n \geq 1$. Dãy là điều vô lí, vì $a_n > 0$, $\forall n \geq 1$. Vậy không tồn tại hàm số f thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài toán 4.38 (Olympic Toán Bulgaria-1996). *Tìm các hàm số f xác định trên $\mathbb{Z}$, nhận giá trị nguyên và thỏa mãn*

$$3f(n) - 2f(f(n)) = n,\ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Với $n \in \mathbb{Z}$ bất kì, ta cố định n và xét dãy số $(a_k)_{k=0}^{+\infty}$ như sau:

$$a_0 = n,\ a_1 = f(n),\ a_{k+1} = f(a_k)\ (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Trong (1) thay n bởi a_k ta được

$$2a_{k+2} - 3a_{k+1} + a_k = 0,\ \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

Phương trình đặc trưng $2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$. Suy ra

$$a_k = \alpha 1^k + \beta\left(\frac{1}{2}\right)^k = \alpha + \frac{\beta}{2^k},\ \forall k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Từ (2) ta có hệ $\begin{cases} \alpha + \beta = a_0 \\ 2\alpha + \beta = 2a_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2a_1 - a_0 \\ \beta = 2a_0 - 2a_1. \end{cases}$ Vì thế

$$a_k = 2a_1 - a_0 + \frac{2(a_0 - a_1)}{2^k},\ \forall k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Do $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ nên từ (3) suy ra với mọi $k \in \mathbb{N}$ thì $\frac{2(a_0 - a_1)}{2^k} \in \mathbb{Z}$, do đó $2(a_0 - a_1) = 0$ hay $a_0 = a_1$. Từ đây, sử dụng định nghĩa dãy số (a_k) suy ra $f(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Do n lấy tùy ý trong $\mathbb{Z}$ nên $f(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Thử lại đúng.

Bài toán 4.39. *Xác định số hạng tổng quát của dãy $\{x_n\}$, biết $x_1 = a$ và*

$$x_{m+n} = x_m + x_n + mn,\ \forall m, n \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Giải. Giả sử tồn tại dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn điều kiện bài toán. Từ phương trình (1) ta được $x_{n+1} = x_n + x_1 + n$, suy ra

$$\begin{cases} x_{n+1} - x_n = a + n \\ x_1 = a. \end{cases} \tag{2}$$

Phương trình $x_{n+1} - x_n = a + n$ là một phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất, cấp một. Vì phương trình đặc trưng là $\lambda = 1$ nên ta có nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $x_{n+1} - x_n = 0$ như sau: $\widehat{x}_n = c$. Nghiệm riêng của (2) có dạng $x_n^* = n(dn + e)$. Thay x_n^* vào (2), ta được

$$(n+1)[d(n+1) + e] - n(dn + e) = a + n$$

$$\Leftrightarrow 2dn + d + e = a + n \Rightarrow \begin{cases} d = \frac{1}{2} \\ e = a - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Suy ra $x_n^* = \frac{1}{2}n^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)n$. Vì $x_n = \widehat{x}_n + x_n^*$ nên nghiệm phương trình (2) là

$$x_n = c + \frac{1}{2}n^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)n.$$

Vì $x_1 = a$ nên ta có $c = 0$. Thay $c = 0$ vào ta được nghiệm của (2) là $x_n = \frac{1}{2}n^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)n$. Thử lại, ta thấy nghiệm $x_n = \frac{1}{2}n^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)n$ thỏa điều kiện bài toán.

Bài toán 4.40. *Tồn tại hay không một dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn điều kiện*

$$x_{m+n} = x_m + x_n + m + n,\ \forall m, n \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Giải. Giả sử tồn tại dãy $\{x_n\}$ thỏa (1). Khi đó $x_{n+1} = x_n + x_1 + n + 1$, suy ra

$$x_{n+1} - x_n = a + n \text{ với } a = x_1 + 1. \tag{2}$$

Phương trình $x_{n+1} - x_n = a + n$ là một phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất, cấp một. Vì phương trình đặc trưng là $\lambda - 1 = 0$ nên ta có nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $x_{n+1} - x_n = 0$ là $\widehat{x}_n = c$. Nghiệm riêng của (2) có dạng $x_n^* = n(dn + e)$ $(d \neq 0)$. Thay x_n^* vào (2) được

$$(n+1)[d(n+1) + e] - n(dn + e) = a + n$$

$$\Leftrightarrow 2dn + d + e = a + n \Rightarrow \begin{cases} d = \frac{1}{2} \\ e = a - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Suy ra $x_n^* = \frac{1}{2}n^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)n$. Vì $x_n = \widehat{x}_n + x_n^*$ nên ta có nghiệm của (2) là

$$x_n = c + \frac{1}{2}n^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)n. \tag{3}$$

Vì $x_1 = a - 1$ nên từ (3) ta có $c = -1$. Vì thế nên $x_n = \frac{1}{2}n^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)n - 1$. Thử lại, ta thấy nghiệm $x_n = \frac{1}{2}n^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)n - 1$ không thỏa (1). Do đó không tồn tại dãy số thỏa mãn (1).

Bài toán 4.41. *Xác định dãy các số dương $\{x_n\}$ thỏa mãn điều kiện*

$$x_{mn} = x_m x_n,\ \forall m, n \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Giải. Giả sử tồn tại dãy số dương $\{x_n\}$ thỏa (1). Ta có $x_{1.n} = x_1 x_n \Rightarrow x_1 = 1$. Nhận xét rằng: Nếu $n = p^k$ với p là số nguyên tố thì $x_n = x_p^k = (x_p)^k$. Ta chứng minh nhận xét trên bằng quy nạp. Với $k = 1$ ta có $x_n = x_{p^1} = (x_p)^1$. Giả sử nhận xét đúng tới $k = q$ $(q \geq 1)$. Khi đó, với $n = p^{k+1}$, ta có

$$x_n = x_{p^{k+1}} = x_{p^k} x_p = (x_p)^k x_p = (x_p)^{k+1}.$$

Do đó với $n = p^k$ thì $x_n = x_p^k = (x_p)^k$. Từ đây suy ra, nếu $n = p_1^{m_1} \dots p_s^{m_s}$ thì $x_n = (x_{p_1})^{m_1} \dots (x_{p_s})^{m_s}$. Vậy x_p có thể nhận giá trị dương tùy ý khi p là một số nguyên tố. Do vậy, ta kết luận như sau: x_p có thể nhận giá trị dương tùy ý khi p là một số nguyên tố và $x_n = (x_{p_1})^{m_1} \dots (x_{p_s})^{m_s}$ khi $n = p_1^{m_1} \dots p_s^{m_s}$.

Bài toán 4.42. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn*

$$f(m+n) + f(mn-1) = f(n)f(m) + 2, \ \forall m, n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Giải. Nếu $f(n) \equiv c$ (hàm hằng) thì thay vào (1) được $2c = c^2 + 2$, phương trình này vô nghiệm. Vậy f không phải là hàm hằng. Từ (1) cho $m = 0$ được

$$\begin{aligned} &f(n) + f(-1) = f(0)f(n) + 2, \ \forall n \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow\ &[f(0) - 1] f(n) = f(-1) - 2, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{2}$$

Nếu $f(0) - 1 \neq 0$ thì từ (2) suy ra f là hàm hằng, vô lí. Do đó $f(0) = 1$, suy ra $f(-1) = 2$. Từ (1) cho $m = -1$ ta được

$$f(n-1) + f(-n-1) = 2f(n) + 2, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Từ (3) thay n bởi $-n$ ta được

$$f(-n-1) + f(n-1) = 2f(-n) + 2, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Từ (3) và (4) suy ra $f(-n) = f(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, hay f là hàm chẵn trên $\mathbb{Z}$ và (3) trở thành

$$f(n-1) + f(n+1) = 2f(n) + 2, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Xét dãy số $(x_n)_{n=0}^{+\infty}$ như sau: $x_n = f(n)$, $\forall n = 0, 1, 2, \dots$ Từ (5) ta có

$$x_{n+1} + x_{n-1} = 2x_n + 2, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ của dãy số $(x_n)_{n=0}^{+\infty}$ có nghiệm kép $\lambda = 1$, do đó

$$x_n = (a + bn)\, 1^n + cn^2, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Do $x_0 = 1$, $x_1 = f(1) = f(-1) = 2$, $x_2 = 2x_1 - x_0 + 2 = 5$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b + c = 2 \\ a + 2b + 4c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1. \end{cases}$$

Vậy $x_n = n^2 + 1 \Rightarrow f(n) = n^2 + 1$, $\forall n = 0, 1, 2, \dots$ Do f là hàm chẵn trên $\mathbb{Z}$ nên suy ra $f(n) = n^2 + 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 4.43. *Tìm các hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện: f không phải là hàm hằng, $\sum_{k=1}^{17} f(k) \leq 2013$ và với mọi số nguyên x, y, z ta có*

$$f(x-y) + f(y-z) + f(z-x) = 3\,[f(x) + f(y) + f(z)] - f(x+y+z). \tag{1}$$

Giải. Kí hiệu $P(u, v, w)$ chỉ việc thay bộ $(x; y; z)$ bởi bộ (u, v, w) vào (1). $P(0,0,0) \Rightarrow f(0) = 0$.

$$P(x,0,0) \Rightarrow f(x) + f(-x) = 3f(x) - f(x) \Rightarrow f(-x) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

$$P(x,-x,0) \Rightarrow f(2x) + f(x) + f(x) = 6f(x) \Rightarrow f(2x) = 4f(x), \ \forall x \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Thực hiện $P(x+1, -1, -x-1)$ ta được

$$\begin{aligned} &f(x+2) + f(x) + f(2x+2) = 3\,[2f(x+1) + f(1)] - f(1) \\ \Rightarrow\ &f(x+2) + f(x) + 4f(x+1) = 6f(x+1) + 2f(1) \\ \Rightarrow\ &f(x+2) = 2f(x+1) - f(x) + 2f(1), \ \forall x \in \mathbb{Z} \qquad (4) \\ \Rightarrow\ &f(x+2) = 2f(x+1) - f(x) + 2f(1), \ \forall x \in \mathbb{N}. \qquad (5) \end{aligned}$$

Đặt $x_n = f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Từ (5) ta thu được dãy số (x_n) thỏa mãn $x_0 = 0$ và

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n + 2f(1), \ \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ của dãy số $(x_n)_{n=0}^{+\infty}$ có nghiệm kép $\lambda = 1$, do đó

$$x_n = (a + bn)\, 1^n + cn^2, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Do $x_0 = 1$ nên $a = 0$, suy ra $f(n) = x_n = bn + cn^2$, $\forall n = 0, 1, 2, \dots$ Thay vào (3) ta được $4cn^2 + 2bn = 4cn^2 + 4bn$, $\forall n = 0, 1, 2, \dots$ hay $b = 0$. Vậy

$$f(n) = cn^2, \ \forall n = 0, 1, 2, \dots \tag{6}$$

Từ đây kết hợp với (2) ta được $f(n) = cn^2$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Do $f(n) \in \mathbb{N}$ nên $c \geq 0$. Do f không phải là hàm hằng nên $c > 0$. Từ giả thiết $\sum_{k=1}^{17} f(k) \leq 2013$ ta có

$$c \sum_{k=1}^{15} k^2 \leq 2013 \Leftrightarrow 1784c \leq 2013 \Rightarrow c = 1 \ (\text{do } c = f(1) \in \mathbb{N}).$$

Vậy $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{Z}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

4.2.2 Áp dụng một số tính chất của hàm số

1. Tính đơn điệu của hàm số. Tính đơn điệu của hàm số đôi khi là một công cụ khá hiệu quả để giải một số bài toán về phương trình hàm trên tập số nguyên. Sau đây là một số lưu ý khi gặp hàm đơn điệu.

- Thiết lập "bất đẳng thức kẹp" để suy ra đẳng thức có lợi.
- Nếu hàm f đơn điệu trên $\mathbb{N}$ và có giá trị bằng nhau tại vô số điểm thì f là hàm hằng trên $\mathbb{N}$.
- Nếu $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ là hàm đơn điệu thì ta cố gắng khai thác triệt để tập giá trị của hàm f. Chẳng hạn: $2=f(2)<f(3)<f(4)=4\Rightarrow f(3)=3$; nếu $f(n)>f(n+1)$ thì $f(n)\geq f(n+1)+1$...

Bài toán 4.44. *Tìm tất cả các hàm số đồng biến $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn*

$$xf(y)+yf(x)=[xf(f(x))+yf(f(y))]f(xy),\ \forall x,y\in\mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Giải. Từ (1) cho $x=y=1$ ta được

$$2f(1)=2f(1)f(f(1))\overset{\text{do } f(1)\geq 1}{\Leftrightarrow} f(f(1))=1.$$

Do f là hàm đồng biến nên từ $1\leq f(1)$ ta có

$$1\leq f(1)\leq f(f(1))=1\Rightarrow f(1)=1.$$

Từ (1) cho $y=1$ ta được

$$\begin{aligned}&x+f(x)=[xf(f(x))+1]f(x),\ \forall x\in\mathbb{N}^*\\ \Leftrightarrow&x=xf(f(x))f(x),\ \forall x\in\mathbb{N}^*\\ \Leftrightarrow&f(f(x))f(x)=1,\ \forall x\in\mathbb{N}^*\\ \Rightarrow&f(x)=f(f(x))=1,\ \forall x\in\mathbb{N}^*\ (\text{do } f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*).\end{aligned}$$

Vậy $f(x)=1,\ \forall x\in\mathbb{N}^*$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 4.45. *Tìm tất cả các hàm số tăng thực sự $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:*
a) $f(2n)=f(n)+n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.
b) Nếu $f(n)$ là số chính phương thì n là số chính phương.

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Do $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ là hàm số tăng thực sự nên: $f(n+1)\geq f(n)+1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. (1)
Ta có: $f(n)<f(n+1)<\cdots<f(n+n)=f(2n)=f(n)+n$. (2)
Do tập hợp $\{f(n+1),f(n+2),\ldots,f(n+n)\}$ có n phần tử nên từ (1) và (2) suy ra

$$f(n+1)=f(n)+1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*. \tag{3}$$

Sử dụng (3) ta được:

$$\begin{aligned}f(2)&=f(1)+1\\ f(3)&=f(2)+1\\ &\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$f(n)=f(n-1)+1.$$

Cộng lại ta được: $f(n)=f(1)+(n-1)$. Đặt $a=f(1)\in\mathbb{N}^*$. Khi đó:

$$f(n)=n+a-1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*. \tag{4}$$

Từ (4) ta có: $f(a^2+a+2)=(a^2+a+2)+a-1=(a^2+2a+1)=(a+1)^2$. Do $(a+1)^2$ là số chính phương nên theo giả thiết b) suy ra a^2+a+2 là số chính phương. Mà $a^2<a^2+a+2<(a+2)^2$ nên:

$$a^2+a+2=(a+1)^2\Leftrightarrow a^2+a+2=a^2+2a+1\Leftrightarrow a=1.$$

Vậy $f(n)=n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 4.46. *Tìm tất cả các hàm số tăng thực sự $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn*

$$f(n+f(n))=2f(n),\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn điều kiện bài toán. Do f tăng thực sự nên

$$f(n+1)\geq f(n)+1\Rightarrow f(n+1)-n-1\geq f(n)-n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Suy ra $f(n)-n$ là một hàm số tăng. Mặt khác, đặt $a_0=1$, $a_{n+1}=a_n+f(a_n)$. Khi đó $a_0<a_1<\ldots$, và $f(a_{n+1})=2f(a_n)$, do đó $f(a_{n+1})-a_{n+1}=f(a_n)-a_n$. Suy ra có vô hạn bộ (m,n) sao cho $f(n)-n=f(m)-m$, mà $f(n)-n$ là hàm số tăng nên từ đây suy ra $f(n)-n$ là hàm hằng trên $\mathbb{N}^*$. Vậy

$$f(n)=n+k,\ \forall n\in\mathbb{N}^*\ (\text{với } k \text{ là hằng số nguyên dương}).$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 4.47 (Belarus 2000). *Tồn tại hay không hàm $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện:*

$$f(f(n-1))=f(n+1)-f(n),\ \forall n=2,3,\ldots \tag{1}$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn yêu cầu bài toán. Từ giả thiết (1) suy ra hàm f tăng thực sự với $n\geq 2$ vì $f(n+1)-f(n)=f(f(n-1))>0$.
Như vậy: $f(i+1)-f(i)\geq 1,\ \forall i=2,3,\ldots$ Do đó với $n\geq 2$ thì:

$$\begin{aligned}f(n)&=[f(n)-f(n-1)]+[f(n-1)-f(n-2)]+\cdots+[f(3)-f(2)]+f(2)\\ &\geq n-2+f(2)\end{aligned}$$

Do đó: $f(n)\geq n-1,\ \forall n=2,3,\ldots$ (2)
Từ (1) suy ra:

$$f(f(n-1))<f(n+1)\Rightarrow f(f(n))<f(n+2),\ \forall n=1,2,3,\ldots \tag{3}$$

Mà hàm f tăng thực sự nên từ (3) suy ra:

$$f(n) < n+2, \forall n = 2,3,\ldots \quad (4)$$

Từ (4) và (2) suy ra với mọi $n = 2,3,\ldots$ thì:

$$n-1 \le f(n) < n+2 \Rightarrow n-1 \le f(n) \le n+1.$$

Như vậy: $f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n) \le n+2-(n-1) = 3$. Nhưng từ (2) ta lại có:

$$f(f(n-1)) \ge f(n-1) - 1.$$

Suy ra: $f(n-1) - 1 \le 3 \Rightarrow n-2 \le f(n-1) \le 4 \Rightarrow n \le 6$, vô lí. Vậy không tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 4.48 (Baltic MO). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn*

$$f(0) = 0,\ f(1) = 1;$$
$$f(0) \le f(1) \le f(2) \le \cdots$$
$$f(x^2+y^2) = f^2(x) + f^2(y),\ \forall x, y \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn điều kiện bài toán. Ta có

$$f(2) = f(1+1) = 2; f(5) = f(1^2+2^2) = 5.$$

Xét dãy số (x_n) như sau: $x_0 = 1$, $x_{n+1} = x_n^2 + 1$. Dễ dàng chứng minh (x_n) là dãy tăng nghiêm ngặt và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được $f(x_n) = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Nếu $f(m) = f(m+1)$ thì

$$f\left((m+1)^2+1\right) = 1 + f^2(m+1) = 1 + f^2(m) = f(m^2+1). \quad (1)$$

Mà $f\left(m^2+1\right) \le f\left(m^2+2\right) \le \cdots \le f\left(m^2+2m+2\right)$ nên từ (1) suy ra

$$f(m^2+k) = f(m^2+1),\ k = 1,\ldots,2m+2.$$

Bằng quy nạp suy ra tồn tại vô hạn số m sao cho

$$f(m^2+k) = f(m^2+1),\ k = 1,\ldots,2m+2. \quad (2)$$

Chọn m đủ lớn sao cho tồn tại n để cho

$$x_n,\ x_{n+1} \in [m^2+1, m^2+2m+2].$$

Khi đó từ (2) suy ra $x_n = f(x_n) = f(x_{n+1}) = x_{n+1}$, điều này mâu thuẫn với (x_n) là dãy tăng nghiêm ngặt. Suy ra f là hàm tăng thực sự. Ta có $x_n > n$,

$$1 = f(1) < 2 = f(2) < f(3) < f(4) < \cdots < f(n) < \cdots < f(x_n) = x_n.$$

Suy ra $f(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Thử lại ta thấy hàm số $f(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài toán 4.49. *Tìm tất cả các cặp hàm số $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn hệ thức:*

$$f(n) + f(n+g(n)) = f(n+1),\ \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Giải. Từ (1) suy ra: $f(n+1) \ge f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ hay f là hàm số không giảm trên $\mathbb{N}$. Giả sử có $n \in \mathbb{N}$ sao cho $g(n) \ne 0 \Rightarrow g(n) \ge 1$. Khi đó:

$$f(n+1) = f(n) + f(n+g(n)) \ge f(n) + f(n+1) \Rightarrow f(n) \le 0 \Rightarrow f(n) = 0.$$

Từ đó: $f(0) = f(1) = \cdots = f(n-1) = f(n) = 0$.
Xét tập hợp $A = \{n \in \mathbb{N} | g(n) \ne 0\}$. Nếu A là tập vô hạn thì với mọi số tự nhiên n, luôn có $m > n$ sao cho $g(m) \ne 0$, suy ra $f(n) = 0$. Từ đó ta có

$$f(n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ta xét trường hợp A có hữu hạn phần tử. Gọi $m \in A$ là số lớn nhất của A. Khi đó: $g(n) = 0$, $\forall n > m$ và $f(0) = f(1) = \cdots = f(m-1) = f(m) = 0$.

- Xét trường hợp $m = 0$. Khi đó $g(0) \ne 0$, $g(n) = 0$, $\forall n = 1,2,\ldots$ và $f(0) = 0$, $f(n+1) = 2f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy $f(n) = 2^{n-1}.a$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (với $a = f(1) \in \mathbb{N}$), $f(0) = 0$.

- Xét trường hợp $m > 0$. Ta cần xác định giá trị hàm f tại các điểm $n > m$ và giá trị hàm g tại các điểm $n \le m$. Ta sẽ chứng minh rằng với $n > m$ thì $f(n) = 2^{n-m-1}b$, với $b = f(m+1)$. Thật vậy, với $n > m$, ta có $g(n) = 0$, suy ra $f(n+1) = f(n) + f(n+g(n)) = 2f(n)$, vậy

$$\begin{aligned} f(n) &= 2f(n-1) = 2^2 f(n-2) = \cdots = 2^{n-m-1} f(n-(n-m-1)) \\ &= 2^{n-m-1} f(m+1) = 2^{n-m-1} b \text{ (với } b = f(m+1)). \end{aligned}$$

Ta chỉ xét trường hợp $b = f(m+1) \ne 0$. Với $n < m$. Nếu $g(n) > m-n$ thì $g(n) + n \ge m+1$. Khi đó:

$$\begin{aligned} f(n+g(n)) \ge f(m+1) &\Rightarrow f(n) + f(n+g(n)) \ge f(n) + f(m+1) \\ &\Rightarrow f(n+1) \ge f(n) + f(m+1) = f(m+1). \end{aligned}$$

Mặt khác với $n < m$ ta lại có:

$$n+1 < m+1 \Rightarrow f(n+1) \le f(m+1) \Rightarrow f(n+1) = f(m+1) \text{ (vô lí)}.$$

Vậy ta phải có $g(n) \le m-n$. Thay $n = m$ vào (1) ta được:

$$\begin{aligned} &f(m) + f(m+g(m)) = f(m+1) \\ \Rightarrow &2^{m+g(m)-m-1} f(m+1) = f(m+1) \Rightarrow g(m) - 1 = 0 \Rightarrow g(m) = 1. \end{aligned}$$

Sau khi thử lại ta kết luận: các cặp hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$f(n)=0,\ \forall n\in\mathbb{N};\ g(n) \text{ tùy ý}$$

$$f(n)=\begin{cases}0 & \text{khi } n\le m\\ 2^{n-m-1}b & \text{khi } n>m\end{cases};g(n)=\begin{cases}k\le m-n & \text{khi } n<m\\ 0 & \text{khi } n>m\\ 0 & \text{khi } n=m.\end{cases}$$

2. Tính chất của ánh xạ.

Bài toán 4.50 (Đề nghị thi Olympic toán quốc tế - 1995). *Chứng minh rằng tồn tại một và chỉ một hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ sao cho:*

$$f(m+f(n))=n+f(m+95),\ \forall m,n\in\mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Giá trị của tổng $\sum_{k=1}^{19}f(k)$ bằng bao nhiêu ?

Giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Ta chứng minh hàm số f là đơn ánh. Thật vậy, giả sử $f(n_1)=f(n_2)$, ta có

$$f(f(n_1)+f(1))=f(f(n_2)+f(1))$$
$$\Rightarrow n_1+f(f(1)+95)=n_2+f(f(1)+95)\Rightarrow n_1=n_2.$$

Vậy f là đơn ánh. Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, ta có

$$f(f(n)+f(1))=n+f(f(1)+95)=n+1+f(95+95)=f(95+f(n+1)).$$

Suy ra $f(n+1)+95=f(n)+f(1)$. Từ đó với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ thì

$$f(n+1)-f(n)=f(1)-95=a,\ \text{với } a=f(1)-95.$$

Suy ra $f(n)-f(n-1)=\cdots=f(2)-f(1)=f(1)-95=a$, dẫn đến

$$f(n)-95=na\Rightarrow f(n)=na+95,\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Với $f(n)=na+95,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, thay vào phương trình hàm (1) ta có

$$f(m+f(n))=n+f(m+95)$$
$$\Leftrightarrow na^2+(m+95)a+95=n+(m+95)a+95;$$
$$\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=1 \text{ (vì nếu } a=-1 \text{ thì } f(n)\notin\mathbb{N}^* \text{ khi } n\ge 95).$$

Vậy $f(n)=n+95$. Thử lại, ta thấy $f(n)=n+95,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ thỏa mãn các yêu cầu bài toán và theo trên thì nó là hàm số duy nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài. Khi đó

$$\sum_{k=1}^{19}f(k)=\sum_{k=1}^{19}(k+95)=1995.$$

Bài toán 4.51. *Tìm tất cả các song ánh $f,g,h:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn*

$$f^3(n)+g^3(n)+h^3(n)=3ng(n)h(n),\ \forall n\in\mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Giải. Giả sử tồn tại các song ánh f, g, h thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Sử dụng (1) và bất đẳng thức Cauchy ta được

$$3ng(n)h(n)=f^3(n)+g^3(n)+h^3(n)\ge 3\sqrt[3]{f^3(n)g^3(n)h^3(n)}=3f(n)g(n)h(n),$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $f(n)=g(n)=h(n)$. Suy ra $f(n)\le n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. (2)

Do đó $f(1)\le 1$, mà $f(1)\in\mathbb{N}^*$ nên $f(1)=1$. Vì thế nên ta có $g(1)=h(1)=1$. Giả sử $f(k)=g(k)=h(k)=k,\ \forall k\le n$. Ta sẽ chứng minh

$$f(n+1)=n+1=g(n+1)=h(n+1).$$

Thật vậy, giả sử $f(n+1)=m$, theo (2) suy ra $f(n+1)\le n+1\Rightarrow m\le n+1$. Mặt khác, do f là song ánh nên từ $f(n+1)=m$ và giả thiết quy nạp suy ra $m\ge n+1$. Do đó $m=n+1$, hay $f(n+1)=n+1$. Từ đây kết hợp với việc dấu "=" trong bất đẳng thức Cauchy xảy ra ta có $g(n+1)=h(n+1)=n+1$. Vậy theo nguyên lí quy nạp suy ra $f(n)=g(n)=h(n)=n,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 4.52. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn*

$$f\left(f\left(f(n)\right)\right)+f\left(f(n)\right)+f(n)=3n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Từ (1) cho $n=1$ và sử dụng $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ ta được

$$f\left(f\left(f(1)\right)\right)+f\left(f(1)\right)+f(1)=3\Rightarrow f\left(f\left(f(1)\right)\right)=f\left(f(1)\right)=f(1)=1.$$

Giả sử $f(k)=k,\ \forall k\le n$, ta chứng minh $f(n+1)=n+1$. Giả sử $f(n_1)=f(n_2)$, từ (1) suy ra

$$3n_1=f\left(f\left(f(n_1)\right)\right)+f\left(f(n_1)\right)+f(n_1)=f\left(f\left(f(n_2)\right)\right)+f\left(f(n_2)\right)+f(n_2)=3n_2$$

do đó $n_1=n_2$, suy ra f là đơn ánh. Ta có $f(m)>n$, với $m>n$ (vì nếu $f(m)\le n$ thì theo giả thiết quy nạp, tồn tại $k\le n<m$ sao cho $f(m)=f(k)$, mâu thuẫn với f là đơn ánh). Sử dụng điều này ta được

$$f(n+1)>n\Rightarrow f(n+1)\ge n+1$$
$$\Rightarrow f\left(f(n+1)\right)\ge n+1\Rightarrow f\left(f\left(f(n+1)\right)\right)\ge n+1.$$
$$\Rightarrow f(n+1)+f\left(f(n+1)\right)+f\left(f\left(f(n+1)\right)\right)\ge 3(n+1). \tag{2}$$

Từ (1) suy ra dấu "=" ở (2) xảy ra, do đó

$$f(n+1)=f\left(f(n+1)\right)=f\left(f\left(f(n+1)\right)\right)=n+1.$$

Vậy theo nguyên lí quy nạp suy ra $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 4.53 (Romania National Olympiad 2013). *Tìm tất cả các đơn ánh* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *thỏa mãn:* $|f(x) - f(y)| \le |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$. (1)

Giải. Giả sử đơn ánh f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Trong (1) thay x bởi $y+1$, ta được $|f(y+1) - f(y)| \le 1$, $\forall y \in \mathbb{Z}$. Mà $|f(y+1) - f(y)| \in \mathbb{N}^*$ nên

$$|f(y+1) - f(y)| = 1, \forall y \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Đặt $f(0) = a$. Từ (2) ta có

$$|f(1) - f(0)| = 1 \Leftrightarrow |f(1) - a| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) = a+1 \\ f(1) = a-1. \end{array}\right.$$

• Trường hợp 1 : $f(1) = a+1$. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng

$$f(n) = a + n, \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Ta có $f(0) = a+0$, $f(1) = a+1$. Giả sử với $k \in \mathbb{N}$ thì

$$f(k) = a + k,\ f(k+1) = a + (k+1).$$

Khi đó sử dụng (2) ta được

$$\begin{aligned} &|f(k+2) - f(k+1)| = 1 \Leftrightarrow |f(k+2) - a - (k+1)| = 1 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(k+2) - a - k - 1 = 1 \\ f(k+2) - a - k - 1 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(k+2) = a + (k+2) \\ f(k+2) = a + k. \end{array}\right. \end{aligned} \quad (4)$$

Do f là đơn ánh và $f(k) = a + k$ nên từ (4) suy ra $f(k+2) = a + (k+2)$. Theo nguyên lí quy nạp suy ra

$$f(n) = a + n, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Sử dụng (2) ta được

$$|f(-1) - f(0)| = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(-1) - a = 1 \\ f(-1) - a = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(-1) = a+1 \\ f(-1) = a-1. \end{array}\right.$$

Mà $f(1) = a+1$ và f là đơn ánh nên $f(-1) = a-1$. Giả sử với $k \in \mathbb{N}$ thì

$$f(k) = a + k,\ f(k-1) = a + (k-1).$$

Khi đó sử dụng (2) ta được $|f(k-1) - f(k-2)| = 1$, hay

$$\left[\begin{array}{l} a + k - 1 - f(k-2) = 1 \\ a + k - 1 - f(k-2) = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(k-2) = a + (k-2) \\ f(k-2) = a + k. \end{array}\right.$$

Do f là đơn ánh và $f(k) = a + k$ nên $f(k-2) = a + (k-2)$. Theo nguyên lí quy nạp suy ra

$$f(n) = a + n, \forall n = 0, -1, -2, -3, \ldots \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra (3) đúng.

• Trường hợp 2 : $f(1) = a - 1$. Tương tự trường hợp 1, chứng minh được

$$f(n) = a - n, \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

Thử lại thấy hai hàm số xác định bởi (3) và (7) thỏa mãn các yêu cầu đề bài và đó cũng là tất cả các hàm số cần tìm.

Bài toán 4.54 (Olympic Toán CH Sec năm 2007). *Xét tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *thỏa mãn điều kiện:* $f(mf(n)) = nf(m)$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$. *Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của* $f(2007)$.

Giải. Gọi S là tập hợp các hàm số f thỏa điều kiện bài toán. Giả sử $f \in S$, đặt $a = f(1)$. Chọn $m = 1$ ta được

$$f(1.f(n)) = n.f(1) = na \Rightarrow f(f(n)) = na. \quad (1)$$

Chọn $n = 1$ ta được

$$f(mf(1)) = 1.f(m) \Rightarrow f(ma) = f(m). \quad (2)$$

Ta chứng minh f là đơn ánh. Thật vậy, giả sử $f(n_1) = f(n_2)$, ta được

$$f(f(n_1)) = f(f(n_2)) \Rightarrow n_1 a = n_2 a \Rightarrow n_1 = n_2.$$

Vậy f là đơn ánh. Từ (2) ta có $f(na) = f(n) \Rightarrow na = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra $a = 1$ hay $f(1) = 1$. Ta có $f(f(m).f(n)) = n.f(f(m)) = nm = f(f(m.n))$. Suy ra

$$f(m.n) = f(m).f(n). \quad (3)$$

Với p là số nguyên tố bất kì, giả sử $f(p) = u.v$, với $u, v \in \mathbb{N}^*$. Ta có

$$p = f(f(p)) = f(u.v) = f(u).f(v).$$

Do đó $f(u) = 1$ hoặc $f(v) = 1$. Giả sử $f(u) = 1$, ta được

$$u = f(f(u)) = f(1) = 1.$$

Suy ra $f(p)$ là số nguyên tố. Khi đó $f(n)$ là hàm chuyển các số nguyên tố khác nhau thành các số nguyên tố khác nhau. Ta lại có $2007 = 3^2.223$ và $f(2007) = f^2(3).f(223)$. Do đó để nhận được giá trị nhỏ nhất của $f(2007)$ ta phải chọn hàm $f(n)$ sao cho $f(3), f(223)$ là các số nguyên tố nhỏ nhất, khác nhau. Hiển nhiên, nếu ta chọn được hàm $\overline{f}(n)$ sao cho

$$\overline{f}(3) = 2, \overline{f}(2) = 3, \overline{f}(223) = 5, \overline{f}(5) = 223$$

thì giá trị nhỏ nhất của $f(2007) = 2^2.5 = 20$ (vì $f(n) \geq \overline{f}(n)$). Ta xây dựng hàm $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ như sau:

$$f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2, f(5) = 223, f(223) = 5,$$
$$f(p) = p, \forall p \in P \backslash \{2; 3; 5; 223\},$$
và với $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ thì $f(n) = f^{k_1}(p_1) f^{k_2}(p_2) \dots f^{k_m}(p_m)$.

Khi đó $f(n)$ thỏa các điều kiện:

$$f(1) = 1;\ f(f(n)) = n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*; f(mn) = f(m).f(n),\ \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Do đó $f(n) \in S$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(2007) = 20$.

4.3 Cấp số cộng và phương trình hàm trên $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$

Trong bài này ta sẽ trình bày một số kĩ thuật cơ bản để giải phương trình hàm trên $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ có liên quan đến cấp số cộng. Sau đây là một số lưu ý khi giải toán.

- Nếu $f(n+1) - f(n) = f(n) - f(n-1), \forall n \in \mathbb{N}^*$ (hay $f(n+1) - f(n)$ là hằng số) thì dãy số $\{f(n)\}_n$ là cấp số cộng.
- Nếu dãy số $\{f(n)\}_{n=1}^{+\infty}$ là cấp số cộng thì nó có số hạng đầu $f(1)$, công sai $d = f(2) - f(1)$, số hạng tổng quát $f(n) = f(1) + (n-1)[f(2) - f(1)]$, hay có dạng $f(n) = an + b$.
- Một dấu hiệu để dự đoán dãy số $\{f(n)\}_n$ lập thành một cấp số cộng là bậc của các biến không vượt quá 1.

Bài toán 4.55. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ sao cho*

$$f(f(m) + f(n)) = m + n,\ \forall m, n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số $f(n)$ thỏa yêu cầu bài toán. Khi đó f là đơn ánh. Thật vậy, giả sử $f(n_1) = f(n_2)$. Ta có

$$f(f(n_1) + f(1)) = f(f(n_2) + f(1)) \Leftrightarrow n_1 + 1 = n_2 + 1 \Leftrightarrow n_1 = n_2.$$

Vậy $f(n)$ là đơn ánh. Từ (1), chọn $m = n$, ta được

$$f(2f(n)) = 2n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (2)$$

Từ (2) ta có

$$f(2f(n)) = 2n = (n+1) + (n-1) = f(f(n+1) + f(n-1))$$

$$\Rightarrow 2f(n) = f(n+1) + f(n-1)$$
$$\Rightarrow f(n+1) - f(n) = f(n) - f(n-1),\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (3)$$

Từ (3) suy ra $f(n) - f(n-1) = \dots = f(2) - f(1) = a$. Do đó

$$f(n) = f(n-1) + a$$
$$f(n-1) = f(n-2) + a$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$f(2) = f(1) + a$$

Cộng lại ta được $f(n) = (n-1)a + f(1)$, thay vào (2), dẫn tới

$$f(2f(n)) = 2n \Leftrightarrow 2na^2 - 2a^2 + (2f(1) - 1)a + f(1) = 2n$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ -2a^2 + (2f(1) - 1)a + f(1) = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ f(1) = 1 \text{ (vì nếu } a = -1 \text{ thì } f(1) = -1 \notin \mathbb{N}^*). \end{cases}$$

Do đó $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ là hàm số cần tìm.

Nhận xét 4. *Từ (3) thấy rằng dãy số $\{f(n)\}_n$ là cấp số cộng, do đó theo công thức tổng quát của cấp số cộng ta có $f(n) = (n-1)a + f(1)$ và công việc còn lại chỉ là tính $f(1)$, a. Ta có thể chứng minh dãy số $\{f(n)\}_n$ là cấp số cộng theo cách khác như sau: Giả sử m, n, p, q là bốn số nguyên dương thỏa mãn $m + n = p + q$. Từ (1) ta có*

$$f(f(m) + f(n)) = f(f(p) + f(q)).$$

Do f là đơn ánh nên $f(m) + f(n) = f(p) + f(q)$. Từ đây suy ra

$$f(n) - f(n-1) = f(n-1) - f(n-2) = \dots = f(2) - f(1).$$

Vậy dãy $\{f(n)\}_n$ là cấp số cộng với số hạng đầu $f(1)$, công sai $a = f(2) - f(1)$.

Bài toán 4.56. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn*

$$f(f(m) + f(n) + f(p)) = m + n + p,\ \forall m, n, p \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số $f(n)$ thỏa yêu cầu bài toán. Khi đó $f(n)$ là đơn ánh. Thật vậy, giả sử $f(n_1) = f(n_2)$. Ta có

$$f(f(n_1) + f(1) + f(1)) = f(f(n_2) + f(1) + f(1)) \Leftrightarrow n_1 + 1 + 1 = n_2 + 1 + 1.$$

Hay $n_1 = n_2$, do đó f là đơn ánh. Từ (1) cho $n = p$ ta được

$$f(f(m) + 2f(n)) = m + 2n,\ \forall m, n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Vì $m+2n=(m+2)+2(n-1)$ nên từ (2) suy ra

$$f\left(f(m)+2f(n)\right)=f\left(f(m+2)+2f(n-1)\right).$$

Mà f là đơn ánh nên

$$f(m)+2f(n)=f(m+2)+2f(n-1). \tag{3}$$

Từ (3) thay n bởi $m+2$ ta được

$$\begin{aligned} &f(m)+2f(m+2)=f(m+2)+2f(m+1)\\ \Leftrightarrow &f(m+2)-f(m+1)=f(m+1)-f(m). \end{aligned} \tag{4}$$

Từ (4) suy ra dãy số $\{f(m)\}_m$ là cấp số cộng, do đó $f(m)=am+b,\ \forall m\in\mathbb{N}$ (a, b là các hằng số tự nhiên). Từ (1) cho $n=m$ và $p=m$ ta được

$$f\left(3f(m)\right)=3m,\ \forall m\in\mathbb{N}. \tag{5}$$

Thay $f(m)=am+b,\ \forall m\in\mathbb{N}$ vào (5) ta được

$$\begin{aligned} &a\left(3am+3b\right)+b=3m,\ \forall m\in\mathbb{N}\\ \Leftrightarrow &3a^2m+3ab+b=3m,\ \forall m\in\mathbb{N}\\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 3a^2=3\\ 3ab+b=0 \end{cases} \overset{\text{do } a\in\mathbb{N},\,b\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a=1\\ b=0. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $f(m)=m,\ \forall m\in\mathbb{N}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 4.57 (Moroccan Mathematical Olympiad-2012). *Tìm các hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn*

$$f(f(a)+f(b))=a+b-1,\ \forall a,b\in\mathbb{Z}. \tag{1}$$

Giải. Từ (1) cho $b=1$ được $f\left(f(a)+f(1)\right)=a,\forall a\in\mathbb{Z}$, như vậy dễ thấy f là một song ánh trên $\mathbb{Z}$. Đặt $f^{-1}(-1)=k$; $f^{-1}(0)=l$, ta có $k\neq l$ và vì

$$\begin{cases} f\left(f(a)+f(-a)\right)=-1 & =f(k)\\ f\left(f(a)+f(1-a)\right)=0 & =f(l) \end{cases} (\forall a\in\mathbb{Z})$$

nên ta có $f(a)+f(-a)=k$; $f(a)+f(1-a)=l,\forall a\in\mathbb{Z}$, điều đó dẫn đến

$$f(a)=l-f(1-a)=l-\left[k-f(a-1)\right]=l-k+f(a-1),\ \forall a\in\mathbb{Z}.$$

Vậy dãy $f(0),f(1),\ldots,f(a-1),f(a)$ lập thành cấp số cộng với công sai $l-k$. Từ đây, nếu đặt $f(0)=m$, thế thì theo công thức về cấp số cộng có ngay

$$f(a)=(l-k)a+m,\forall a\in\mathbb{Z}.$$

Từ đó $f(x)=(l-k)x+m,\ \forall x\in\mathbb{Z}$, suy ra

$$f\left(f(x)+f(0)\right)=f\left((l-k)x+2m\right)=(l-k)^2x+2m(l-k)+m.$$

Kết hợp với (1) ta được

$$(l-k)^2x+2m(l-k)+m=x+0-1,\ \forall x\in\mathbb{Z}. \tag{2}$$

Đồng nhất để có $(l-k)^2=1$; $2m(l-k)+m=-1$, việc $(l-k)^2=1$ có thể dẫn đến khả năng $l-k=1$ tuy nhiên nếu thế thì từ (2) dẫn đến điều không thể xảy ra là $3m=-1$. Tóm lại là $l-k=-1$ và $m=1$, thử lại thì thấy rằng hàm số $f(x)=1-x,\ \forall x\in\mathbb{Z}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 4.58. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn*

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{Z}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài, khi đó ta có (1).

Cách 1. Trong (1) lấy $x=y=0$ ta được $f(0)=0$, lấy $y=-x$ ta được

$$f(-x)=-f(x),\forall x\in\mathbb{Z}. \tag{*}$$

Trong (1) lấy $x=n\in\mathbb{N}^*$ và $y=1$ ta được

$$f(n+1)=f(n)+f(1),\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Như vậy, dãy số $f(1),f(2),\ldots,f(n),\ldots$ lập thành cấp số cộng có công sai $d=f(1)$, số hạng đầu $f(1)$, do đó

$$f(n)=f(1)+(n-1)f(1)=f(1)n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Kết hợp với $f(0)=0$, suy ra $f(n)=f(1)n,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Với $n\in\mathbb{Z},n<0$, ta có

$$f(n)=f\left(-(-n)\right)\overset{\text{do }(*)}{=}-f(-n)\overset{\text{do }-n>0}{=}-f(1)(-n)=f(1)n.$$

Suy ra $f(n)=cn,\ \forall n\in\mathbb{Z}$ (c là hằng số nguyên). Thử lại thấy thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Cách 2. Trong (1) lấy $y=x$ ta được

$$f(2x)=2f(x),\forall x\in\mathbb{Z}. \tag{2}$$

Trong (2) lấy $x=0$ ta được $f(0)=0$. Từ (1) và (2) và bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được

$$f(nx)=nf(x),\forall x\in\mathbb{Z},\forall n\in\mathbb{N}. \tag{3}$$

Trong (1) lấy $y=-x$ và sử dụng $f(0)=0$ ta được

$$f(-x)=-f(x),\forall x\in\mathbb{Z}. \tag{4}$$

Bởi vậy khi $n=-1,-2,\ldots$, sử dụng (3) và (4) ta có

$$f(nx)=f(-n(-x))=-nf(-x)=nf(x),\forall x\in\mathbb{Z}. \tag{5}$$

Từ (3) và (5) suy ra

$$f(nx) = nf(x), \forall x \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Từ (6) lấy $x = 1$ ta được $f(n) = cn$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ ($c = f(1)$ là hằng số). Thử lại thấy hàm số $f(n) = cn$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ (c là hằng số nguyên) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Lưu ý.

- Kỹ thuật giải của bài toán 2.214 ở trang 278 đã được lặp lại ở cách 2 của bài toán 4.58.
- Kết quả của bài toán 4.58 rất quan trọng, được dùng để giải nhiều phương trình hàm trên $\mathbb{Z}$, chẳng hạn các bài toán 4.82 4.83.

Bài toán 4.59 (Indonesia Mathematics Olympiad 2008). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn*

$$f(mn) + f(m+n) = f(m)f(n) + 1, \ \forall m, n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Giải. Đặt $x = f(1)$, $y = f(2)$, $z = f(3)$, $t = f(4)$. Kí hiệu $P(u, v)$ chỉ việc thay m bởi u và thay n bởi v vào (1).

$$P(1,1) \Rightarrow x + y = x^2 + 1 \quad (2)$$
$$P(1,2) \Rightarrow y + z = xy + 1 \quad (3)$$
$$P(1,3) \Rightarrow z + t = xz + 1 \quad (4)$$
$$P(2,2) \Rightarrow 2t = y^2 + 1. \quad (5)$$

Thay (4) vào (5) ta được $2z + y^2 + 1 = 2xz + 2 \Leftrightarrow z = \dfrac{y^2 - 1}{2(x-1)}$. Từ đây kết hợp với (2) và (3) ta được

$$x^2 - x + 1 + \frac{(x^2 - x + 1)^2 - 1}{2(x-1)} = x(x^2 - x + 1) + 1$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{(x^2 - x + 1)^2 - 1}{2(x-1)} = x^3 - x^2 + x$$
$$\Rightarrow 2x^3 - 4x^2 + 2x + (x^2 - x + 1)^2 - 1 = 2(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x)$$
$$\Rightarrow 6x^3 - 8x^2 + 4x + (x^2 - x + 1)^2 - 1 = 2x^4$$
$$\Rightarrow 6x^3 - 8x^2 + 4x + x^4 + x^2 - 2x^3 - 2x + 2x^2 = 2x^4$$
$$\Rightarrow x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(x-1)^2(x-2) = 0 \Rightarrow x \in \{1, 2\} \ (\text{do } x = f(1) \in \mathbb{N}^*).$$

Thực hiện $P(1, n)$, ta được

$$f(n) + f(n+1) = f(1)f(n) + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow f(n+1) = [f(1) - 1]\, f(n) + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (6)$$

- Khi $f(1) = 1$, từ (6) suy ra $f(n) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Thử lại thấy thỏa mãn.
- Khi $f(1) = 2$, từ (6) suy ra

$$f(n+1) = f(n) + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$$
$$\Rightarrow f(n) = f(1) + (n-1) = n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Kết luận : Các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ và } f(n) = n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Nhận xét 5. *Khi giải phương trình hàm trong $\mathbb{Z}$, ta thường dùng một kĩ thuật đánh giá rất đặc trưng của tập $\mathbb{Z}$, đó là: $a > b \Leftrightarrow a \geq b + 1$.*

Bài toán 4.60. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn:*

$$f(n+1) \geq f(n), \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$
$$f(f(n)) = n + 2016, \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (2)$$

Giải. Nếu tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(n+1) = f(n)$ thì

$$f(f(n+1)) = f(f(n)) \overset{\text{do (2)}}{\Rightarrow} (n+1) + 2016 = n + 2016 \ (\text{vô lí}).$$

Vậy $f(n+1) > f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra $f(n+1) \geq f(n) + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó

$$n + 2016 = f(f(n)) \Rightarrow f(n + 2016) = f(f(f(n))) = f(n) + 2016 \quad (3)$$
$$f(n + 2016) \geq f(n + 2015) + 1 \geq f(n + 2014) + 2 \geq \cdots \geq f(n) + 2016. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $f(n+1) = f(n) + 1 = f(n-1) + 2 = \cdots = f(1) + n$. Do đó $f(n) = n + a$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ($a = f(1) - 1$). Thay vào (2) ta được

$$n + 2a = n + 2016 \Leftrightarrow a = 1008.$$

Vậy $f(n) = n + 1008$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 4.61. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn*

$$f(2x + 3y) = 2f(x) + 3f(y) + 4, \ \forall x, y \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Giải. Kí hiệu $P(u, v)$ chỉ việc thay x bởi u, thay y bởi v vào (1).

$$P(x+3, y) \Rightarrow f(2(x+3) + 3y) = 2f(x+3) + 3f(y) + 4, \ \forall x, y \in \mathbb{N}^*. \quad (2)$$
$$P(x, y+2) \Rightarrow f(2x + 3(y+2)) = 2f(x) + 3f(y+2) + 4, \ \forall x, y \in \mathbb{N}^*. \quad (3)$$

Lấy (2) trừ (3) theo vế ta được

$$2[f(x+3) - f(x)] = 3[f(y+2) - f(y)], \ \forall x, y \in \mathbb{N}^*. \quad (4)$$

Từ (4) cho $y=1$ ta được

$$2\,[f(x+3)-f(x)]=3\,[f(3)-f(1)],\ \forall x\in\mathbb{N}^*. \tag{5}$$

Do 2 và 3 nguyên tố cùng nhau nên từ (5) suy ra $f(x+3)-f(x)$ là hằng số và chia hết cho 3: $f(x+3)-f(x)=3c,\ \forall x\in\mathbb{N}^*$ (c là hằng số). Thay vào (4): $3\,[f(y+2)-f(y)]=6c,\ \forall y\in\mathbb{N}^*$ hay $f(y+2)-f(y)=2c,\ \forall y\in\mathbb{N}^*$. Tóm lại

$$\begin{cases} f(x+2)=f(x)+2c,\ \forall x\in\mathbb{N}^* \\ f(x+3)=f(x)+3c,\ \forall x\in\mathbb{N}^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x+3)=f(x+1)+2c,\ \forall x\in\mathbb{N}^* \\ f(x+3)=f(x)+3c,\ \forall x\in\mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Suy ra $f(x+1)=f(x)+c,\ \forall x\in\mathbb{N}^*$. Vậy dãy số $\{f(x)\}_{x=1}^{+\infty}$ lập thành cấp số cộng, do đó $f(x)=cx+d,\ \forall x\in\mathbb{N}^*$. Thay vào (1) ta được

$$c(2x+3y)+d=2(cx+d)+3(cy+d)+4,\ \forall x\in\mathbb{N}^*.$$

Hay $d=-1$. Vậy hàm số cần tìm có dạng $f(x)=cx-1,\ \forall x\in\mathbb{N}^*$, với c là hằng số nguyên, $c>1$.

Chú ý 1. *Ta ghi nhớ các kết quả sau: Cho a,b,c là các số nguyên dương, khi đó*

$$\begin{cases} ca\vdots b \\ (a,b)=1 \end{cases} \Rightarrow c\vdots b\ ; \qquad \begin{cases} c\vdots a \text{ và } c\vdots b \\ (a,b)=1 \end{cases} \Rightarrow c\vdots ab.$$

Bài toán 4.62. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn*

$$f^3(1)+f^3(2)+\cdots+f^3(n)=[f(1)+f(2)+\cdots+f(n)]^2,\ \forall n=1,2,\ldots \tag{1}$$

Giải. Từ (1) lấy $n=1$ ta được $f^3(1)=f^2(1)\Leftrightarrow f(1)=1$ (do $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$). Từ (1) ta có

$$\begin{aligned} &f^3(1)+f^3(2)+\cdots+f^3(n)+f^3(n+1)\\ =&[f(1)+f(2)+\cdots+f(n)+f(n+1)]^2\\ =&[f(1)+f(2)+\cdots+f(n)]^2\\ &+2f(n+1)\,[f(1)+f(2)+\cdots+f(n)]+f^2(n+1). \end{aligned} \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned} &f^3(n+1)=2f(n+1)\,[f(1)+f(2)+\cdots+f(n)]+f^2(n+1)\\ \Leftrightarrow&f^2(n+1)=2\,[f(1)+f(2)+\cdots+f(n)]+f(n+1). &(3)\\ \Rightarrow&f^2(n+2)=2\,[f(1)+f(2)+\cdots+f(n)+f(n+1)]+f(n+2). &(4) \end{aligned}$$

Lấy (4) trừ (3) ta được

$$f^2(n+2)-f^2(n+1)=f(n+2)+f(n+1)$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow[f(n+2)+f(n+1)]\,[f(n+2)-f(n+1)-1]=0\\ &\Leftrightarrow f(n+2)-f(n+1)-1=0\Leftrightarrow f(n+2)=f(n+1)+1. \end{aligned} \tag{5}$$

Từ (5) ta có

$$\begin{aligned} &f(1)=1\\ &f(2)=f(1)+1\\ &f(3)=f(2)+1\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &f(n)=f(n-1)+1. \end{aligned}$$

Cộng lại ta được $f(n)=n,\ \forall n=1,2,\ldots$ Ta có $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. Mặt khác bằng quy nạp ta chứng minh được

$$1^3+2^2+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,\ \forall n=1,2,\ldots$$

Vì thế nên $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2,\ \forall n=1,2,\ldots$ Do đó hàm số $f(n)=n,\ \forall n=1,2,\ldots$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Lưu ý. Bạn đọc hãy liên hệ bài toán 4.62 này với bài toán 3.33 ở trang 407.

4.4 Phương trình hàm trên tập số hữu tỉ

- Ta biết rằng tập số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ là tập hợp các số có dạng $\dfrac{m}{n}$, với $m\in\mathbb{Z}$ và $n\in\mathbb{N}^*$. Do $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$ nên việc tìm hàm f trên $\mathbb{Q}$ thường được tiến hành theo các bước sau:
  - Tìm hàm f trên $\mathbb{N}$.
  - Tìm hàm f trên $\mathbb{Z}$.
  - Tìm hàm f trên $\mathbb{Q}$.
- Khi đã tìm được hàm f trên $\mathbb{Z}$, để tìm được hàm f trên $\mathbb{Q}$ ta thường qua bước trung gian đó là tìm $f\left(\dfrac{1}{n}\right)$, với $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.
- Khi đã tìm được công thức của hàm f trên $\mathbb{N}$ (công thức của hàm f trên $\mathbb{Q}^+$), ta thường dùng tính chẵn, lẻ của hàm số để suy ra công thức của hàm f trên $\mathbb{Z}$ (công thức của hàm f trên $\mathbb{Q}$).
- Việc giải phương trình hàm trên $\mathbb{Q}$ là rất quan trọng vì khi giải phương trình hàm trên $\mathbb{R}$ mà có thêm giả thiết liên tục, đơn điệu,..., nếu đã tìm được hàm f trên $\mathbb{Q}$ thì dùng dãy số ta sẽ suy ra được hàm f trên $\mathbb{R}$

(chẳng hạn bài toán 2.214 ở trang 278, bài toán 2.264 ở trang 321, bài toán 2.167 ở trang 217...).

Bài toán 4.63. *Tìm các hàm số $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ thỏa mãn điều kiện:*

$$f(x+y)-f(x-y)=2f(y),\forall x,y\in\mathbb{Q}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) cho $x=y=0$ ta được $f(0)=0$. Cho $x=0$ ta được:

$$f(-y)=-f(y),\forall y\in\mathbb{Q}.$$

Cho $y=x$, ta được: $f(2x)=2f(x),\forall x\in\mathbb{Q}$.
Cho $x=2y$ ta được $f(3y)-f(y)=2f(y),\forall y\in\mathbb{Q}$, hay

$$f(3x)=3f(x),\forall x\in\mathbb{Q}.$$

Ta sẽ chứng minh với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ thì: $f(nx)=nf(x),\forall x\in\mathbb{Q}$. (2)
Hiển nhiên (2) đúng khi $n=1$, $n=2$. Giả sử (2) đúng tới $n=k$ $(k\in\mathbb{N}^*)$, tức là: $f(kx)=kf(x),\forall x\in\mathbb{Q}$. Khi đó:

$$f[(k+1)x]=f(kx+x)=f[(k-1)x]+2f(x)=(k+1)f(x),\forall x\in\mathbb{Q}.$$

Vậy (2) cũng đúng khi $n=k+1$. Theo nguyên lý quy nạp suy ra (2) đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. Trong (2) lần lượt cho $x=1, x=\dfrac{m}{n},\forall m,n\in\mathbb{N}^*$, ta được

$$f(n)=nf(1), f(m)=nf(\frac{m}{n}).$$

Suy ra: $f(\dfrac{m}{n})=(\dfrac{m}{n})f(1)\Rightarrow f(x)=ax,\forall x\in\mathbb{Q},x>0$ $(a=f(1)\in\mathbb{Q})$.
Với $x\in\mathbb{Q},x<0$, ta có: $f(x)=-f(-x)=-a(-x)=ax$. Lại do $f(0)=0$ nên

$$f(x)=ax,\forall x\in\mathbb{Q},a\in\mathbb{Q},$$

hàm này thỏa mãn điều kiện bài toán. Vậy nghiệm của bài toán là:

$$f(x)=ax,\forall x\in\mathbb{Q}\ (a \text{ là hằng số hữu tỉ}).$$

Bài toán 4.64 (Đề thi chính thức Olympic 30/04/2012). *Tìm các hàm số $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm*

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{Q}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) cho $x=y=0$ ta được $f(0)=0$. Cho $x=0$ ta được

$$f(-y)=f(y),\forall y\in\mathbb{Q}.$$

Cho $y=x$, ta được

$$f(2x)=4f(x),\forall x\in\mathbb{Q}.$$

Cho $x=2y$ ta được $f(3y)+f(y)=2f(2y)+2f(y),\forall y\in\mathbb{Q}$, suy ra

$$f(3x)=9f(x),\forall x\in\mathbb{Q}.$$

Ta sẽ chứng minh với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ thì

$$f(nx)=n^2f(x),\forall x\in\mathbb{Q}. \quad (2)$$

Hiển nhiên (2) đúng khi $n=1$. Giả sử (2) đúng tới $n=k$ $(k\in\mathbb{N}^*)$, tức là

$$f(kx)=k^2f(x),\forall x\in\mathbb{Q}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}f((k+1)x)&=f(kx+x)=-f((k-1)x)+2f(kx)+2f(x)\\&=-(k-1)^2f(x)+2k^2f(x)+2f(x)=(k+1)^2f(x),\ \forall x\in\mathbb{Q}.\end{aligned}$$

Vậy (2) cũng đúng khi $n=k+1$. Theo nguyên lý quy nạp suy ra (2) đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. Từ (2) suy ra với mọi $m,n\in\mathbb{N}^*$, ta có

$$f(1)=f\left(n.\frac{1}{n}\right)=n^2f\left(\frac{1}{n}\right)\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{f(1)}{n^2}$$

$$f(m)=f\left(n.\frac{m}{n}\right)=n^2f\left(\frac{m}{n}\right)\Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{f(m)}{n^2}=\frac{m^2}{n^2}f(1)$$

Do đó

$$f(\frac{m}{n})=(\frac{m}{n})^2f(1)\Rightarrow f(x)=ax^2,\forall x\in\mathbb{Q},x>0\ (a=f(1)).$$

Với $x\in\mathbb{Q},x<0$, ta có $f(x)=f(-x)=a(-x)^2=ax^2$. Lại do $f(0)=0$ nên

$$f(x)=ax^2,\forall x\in\mathbb{Q},a\in\mathbb{R},$$

hàm này thỏa mãn điều kiện bài toán. Vậy nghiệm của bài toán là:

$$f(x)=ax^2,\forall x\in\mathbb{Q}\ (a \text{ là hằng số}).$$

Lưu ý. Nếu thay tập xác định $\mathbb{Q}$ bởi $\mathbb{R}$ thì thêm giả thiết hàm f liên tục (xem bài toán 2.273 ở trang 329).

Bài toán 4.65. *Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ sao cho $f(1)=2$ và*

$$f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1,\forall x,y\in\mathbb{Q}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) lấy $y=1$ ta được

$$f(x)=2f(x)-f(x+1)+1,\forall x\in\mathbb{Q}$$

$\Leftrightarrow f(x+1) = f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow f(x+n) = f(x) + n, \forall x \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f(n) = f(1 + (n-1)) = f(1) + n - 1 = n + 1, \forall n \in \mathbb{Z}.$

Trong (1) thay $x = \dfrac{1}{n}$, $y = n$, ta được

$$f\left(\frac{1}{n}.n\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) f(n) - f\left(\frac{1}{n} + n\right) + 1$$

$$\Rightarrow 1 = (n+1) f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) - n$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{n} \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + 1.$$

Với mỗi $x \in \mathbb{Q}$ thì $x = \dfrac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$f(x) = f\left(m.\frac{1}{n}\right) = f(m).f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(m + \frac{1}{n}\right) + 1$$

$$= (m+1)\left(\frac{1}{n} + 1\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) - m + 1$$

$$= (m+1)\left(\frac{1}{n} + 1\right) - \left(\frac{1}{n} + 1\right) - m + 1 = \frac{m}{n} + 1 = x + 1.$$

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Lưu ý. Trong bài toán này, nếu thay giả thiết $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ bởi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thì bài toán sẽ rất khó, tuy nhiên đã được giải quyết ở bài toán 2.198 ở trang 254.

Bài toán 4.66 (Balkan 2003). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây với mọi $x, y \in \mathbb{Q}$:*

(1) $f(1) + 1 > 0$

(2) $f(x+y) - xf(y) - yf(x) = f(x)f(y) - x - y + xy$

(3) $f(x) = 2f(x+1) + x + 2$.

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Đặt $g(x) = f(x) + x$. Khi đó từ giả thiết suy ra hàm số $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(4) $g(1) > 0$

(5) $g(x+y) = g(x)g(y), \forall x, y \in \mathbb{Q}$

(6) $g(x) = 2g(x+1), \forall x, y \in \mathbb{Q}$.

Theo các điều kiện (4), (5), (6), ta có:

$$g(1) = 2g(2) = 2g(1+1) = 2[g(1)]^2 \Rightarrow g(1) = \frac{1}{2}.$$

$$g(1) = g(1+0) = g(1)g(0) \Rightarrow g(0) = 1.$$

$$1 = g(0) = g(x-x) = g(x)g(-x) \Rightarrow g(-x) = \frac{1}{g(x)}, \forall x \in \mathbb{Q}. \quad (7)$$

Từ (7) suy ra chỉ cần tìm hàm g trên tập hợp $\mathbb{Q}^+$ các số hữu tỉ dương ta sẽ suy ra được hàm g trên $\mathbb{Q}$. Ta có:

$$g(n) = g\left(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\text{có } n \text{ số } 1}\right) = [g(1)]^n = \frac{1}{2^n}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

$$\frac{1}{2} = g(1) = g\left(n.\frac{1}{n}\right) = g\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{\text{có } n \text{ số } \frac{1}{n}}\right) = \left[g\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n.$$

Suy ra: $g\left(\dfrac{1}{n}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}, \forall n = 1, 2, \ldots$

Với mọi $r \in \mathbb{Q}^+$, khi đó tồn tại $m, n \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $r = \dfrac{m}{n}$. Do đó:

$$g(r) = g\left(\frac{m}{n}\right) = g\left(m.\frac{1}{n}\right) = \left[g\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^r = 2^{-r}. \quad (8)$$

Với $x \in \mathbb{Q}, x < 0$, khi đó $-x \in \mathbb{Q}^+$, sử dụng (7) và (8) ta được:

$$g(x) = \frac{1}{g(-x)} = \frac{1}{2^{-(-x)}} = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}. \quad (9)$$

Từ (8) và (9) và $f(0) = 1$ suy ra: $g(x) = 2^{-x}, \forall x \in \mathbb{Q}$.
Như vậy: $f(x) = -x + 2^{-x}, \forall x \in \mathbb{Q}$. Thử lại thấy thỏa mãn.
Kết luận: hàm số cần tìm: $f(x) = -x + 2^{-x}, \forall x \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 4.67. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(f(x) + y) = x + f(y), \forall x, y \in \mathbb{Q}. \quad (1)$$

Giải. Ta có f là đơn ánh. Thật vậy, nếu $f(a) = f(b)$ thì

$$a + f(y) = f(f(a) + y) = f(f(b) + y) = b + f(y) \Rightarrow a = b.$$

Trong (1), cho $x = 0$, ta được

$$f(f(0) + y) = f(y) \Rightarrow y + f(0) = y \Rightarrow f(0) = 0.$$

Trong (1), cho $y = 0$, ta được $f(f(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$. Trong (1) thay x bởi $f(x)$ và sử dụng $f(f(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$, ta được

$$f(x + y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

Tương tự như bài toán 2.214 ở trang 278, suy ra $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{Q}$. Thay vào (1) ta rút ra $a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$. Thử lại thấy $f(x) \equiv x$ và $f(x) \equiv -x$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 4.68. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau ($\mathbb{Q}^+$ là tập các số hữu tỉ dương):*

$$f(x + 1) = f(x) + 1,\ \forall x \in \mathbb{Q}^+ \quad (1)$$

$$f(x^3) = f^3(x),\ \forall x \in \mathbb{Q}^+. \quad (2)$$

Giải. Trong (2) lấy $x = 1$, ta được $f(1) = [f(1)]^3$, mà $f(1) > 0$ nên $f(1) = 1$. Do đó sử dụng phương pháp quy nạp và (1) suy ra

$$f(n) = n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*;\ f(x + n) = f(x) + n,\ \forall x \in \mathbb{Q}^+, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Ta tính $f(r)$, với $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$ bằng cách tính bằng hai cách giá trị $f\left((r + q^2)^3\right)$.

Ta có

$$f\left((r + q^2)^3\right) = \left[f\left(r + q^2\right)\right]^3 = \left[f(r) + q^2\right]^3. \quad (3)$$

Mặt khác, do $(r + q^2)^3 = r^3 + 3r^2q^2 + 3rq^4 + q^6$, $3r^2q^2 + 3rq^4 + q^6 \in \mathbb{N}^*$ nên

$$f\left((r + q^2)^3\right) = f(r^3) + 3r^2q^2 + 3rq^4 + q^6. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$\begin{aligned} &f^3(r) + 3f^2(r)q^2 + 3f(r)q^4 + q^6 = f(r^3) + 3r^2q^2 + 3rq^4 + q^6 \\ \Leftrightarrow &3f^2(r)q^2 + 3f(r)q^4 = 3r^2q^2 + 3rq^4 \Leftrightarrow f^2(r) + f(r)q^2 = r^2 + rq^2 \\ \Leftrightarrow &[f(r) - r]\left[f(r) + r + q^2\right] = 0 \Leftrightarrow f(r) = r. \end{aligned}$$

Thử lại, ta kết luận: Có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{Q}^+.$$

Lưu ý. Do dự đoán được $f(x) = x$ nên ta cố gắng làm xuất hiện $f(r) - r$ trong phép biến đổi thành tích như ở trên. Trong việc giải phương trình hàm thì kĩ thuật tính bằng hai cách như trong lời giải trên thường được sử dụng. Mục đích của việc tính bằng hai cách là dẫn đến một hệ phương trình, từ đó rút ra $f(x)$. Bạn đọc hãy tìm hiểu thêm kĩ thuật này bài 2.2: Phương pháp tính theo hai cách (ở trang 160).

Bài toán 4.69. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau ($\mathbb{Q}^+$ là tập các số hữu tỉ dương):*

$$f(x + 1) = f(x) + 1,\ \forall x \in \mathbb{Q}^+$$

$$f(x^2) = f^2(x),\ \forall x \in \mathbb{Q}^+.$$

Hướng dẫn. Tương tự bài toán 4.68.

Bài toán 4.70 (Đề chính thức Olympic 30/04/2003). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và*

$$f(xy + y) = f(x)f(y) - f(x + 1) + 2,\ \forall x, y \in \mathbb{Q}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) cho $y = 1$, ta được

$$\begin{aligned} &f(x + 1) = 2f(x) - f(x + 1) + 2,\ \forall x \in \mathbb{Q} \\ \Leftrightarrow &f(x + 1) = f(x) + 1,\ \forall x \in \mathbb{Q}. \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (2) và sử dụng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được

$$f(x + n) = f(x) + n,\ \forall x \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Từ (1) cho $y = x$, ta được

$$f(x^2 + x) = f^2(x) - f(x + 1) + 2,\ \forall x \in \mathbb{Q}. \quad (4)$$

Với mọi $r \in \mathbb{Q}$, đặt $r = \dfrac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$. Sử dụng (4) và (3) ta được

$$\begin{aligned} f\left((r + q)^2 + (r + q)\right) &= [f(r + q)]^2 - f(r + q + 1) + 2 \\ &= [f(r) + q]^2 - f(r) - q - 1 + 2 \\ &= [f(r)]^2 + (2q - 1)f(r) + q^2 - q + 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} f\left((r + q)^2 + (r + q)\right) &= f\left(r^2 + r + 2rq + q^2 + q\right) \\ &= f\left(r^2 + r\right) + 2rq + q^2 + q \\ &= [f(r)]^2 - f(r + 1) + 2 + 2rq + q^2 + q \\ &= [f(r)]^2 - f(r) + 2rq + q^2 + q + 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Từ (5) và (6) cho ta

$$\begin{aligned} &[f(r)]^2 + (2q - 1)f(r) + q^2 - q + 1 = [f(r)]^2 - f(r) + 2rq + q^2 + q + 1 \\ \Leftrightarrow &2qf(r) - q = 2rq + q \Leftrightarrow 2f(r) - 1 = 2r + 1 \Leftrightarrow f(r) = r + 1. \end{aligned}$$

Thử lại, ta kết luận: Có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{Q}^+.$$

Bài toán 4.71. *Cho $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ và xét hàm số $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ thỏa mãn*

$$f(x^n + y) = x^{n-1} f(x) + f(f(y)),\ \forall x, y \in \mathbb{Q}. \tag{1}$$

a) Giả sử rằng $f(2014) \neq 0$. Tính $f(2014)$.
b) Tìm hàm số f.

Giải. Từ (1) cho $x = 0$ ta được $f(y) = f(f(y)),\ \forall y \in \mathbb{Q}$. Với $x = 1$ và $y = 0$ ta được $f(f(0)) = 0 \Rightarrow f(0) = f(f(0)) = 0$. Trong (1) cho $x = 1$ ta được

$$f(1 + y) = f(1) + f(y),\ \forall y \in \mathbb{Q}. \tag{2}$$

a) Từ (2) chứng minh quy nạp ta được

$$f(n) = nf(1),\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{3}$$

Ta có $0 = f(0) = f(1 + (-1)) \overset{\text{do (2)}}{=} f(1) + f(-1) \Rightarrow f(-1) = -f(1)$. Từ đó

$$f(x - 1) \overset{\text{do (2)}}{=} f(x) + f(-1) = f(x) - f(1),\ \forall x \in \mathbb{Q}. \tag{4}$$

Từ (4), chứng minh quy nạp ta được

$$f(-n) = -nf(1),\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{5}$$

Kết hợp với (3), (5) và $f(0) = 0$ ta được

$$f(n) = nf(1),\ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Đặt $f(1) = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$. Với $n \in \mathbb{N}^*$ và n là bội của q ta có $nf(1) \in \mathbb{Z}$ và

$$f(f(n)) = f(n) \Rightarrow f(nf(1)) = nf(1) \Rightarrow n[f(1)]^2 = nf(1) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(1) = 1. \end{array}\right.$$

Do đó từ (6) và từ giả thiết $f(2014) \neq 0$ suy ra $f(2014) = 2014$.
b) Từ (1) cho $y = 0$ ta được

$$f(x^n) = x^{n-1} f(x),\ \forall x \in \mathbb{Q}. \tag{7}$$

Từ (1) và (7) suy ra

$$f(x^n + y) = f(x^n) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{Q}. \tag{8}$$

• Nếu $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$ thì với mọi $x \neq 0$, từ (7) ta có

$$f(x) = \frac{f(x^n)}{x^{n-1}},\ f(-x) = \frac{f(x^n)}{-x^{n-1}} = -f(x). \tag{8}$$

• Nếu $n = 2l - 1$, $l \in \mathbb{N}^*$ thì từ (8) cho $y = -x^n$ ta được

$$0 = f(x^n) + f(-x^n),\ \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Bởi thế nên với mọi $x \neq 0$ ta có

$$f(-x) = \frac{f((-x)^n)}{(-x)^{n-1}} = \frac{f(-x^n)}{x^{n-1}} = \frac{-f(x^n)}{x^{n-1}} = -f(x).$$

Vậy $f(-x) = -f(x),\ \forall x \in \mathbb{Q}$. Từ (8) và bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được

$$f(px^n) = pf(x^n),\ \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Với mọi $p \in \mathbb{N}^*$, ta có $f(-px^n) = -f(px^n) = -pf(x^n),\ \forall x \in \mathbb{Q}$. Vậy

$$f(px^n) = pf(x^n),\ \forall p \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Q}. \tag{9}$$

Với mọi $\frac{u}{v} \in \mathbb{Q}$, $u \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$f\left(\frac{u}{v}\right) = f\left(\frac{u.v^{n-1}}{v^n}\right) = uv^{n-1} f\left(\frac{1}{v^n}\right). \tag{10}$$

Mà $f(1) = f\left(\frac{v^n}{v^n}\right) = v^n f\left(\frac{1}{v^n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{v^n}\right) = \frac{f(1)}{v^n}$ nên từ (10) suy ra $f\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u}{v} f(1)$. Hay

$$f(x) = f(1)x,\ \forall x \in \mathbb{Q}. \tag{11}$$

Ở câu a) ta đã chứng minh được $f(1) = 0$ hoặc $f(1) = 1$. Do đó từ (11) suy ra $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{Q}$ hoặc $f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{Q}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy có hai hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là:

$$f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{Q};\ f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Bài toán 4.72. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ thỏa mãn*

$$xf(yz) + yf(z) + z = f(f(x)yz + f(y)z + f(z)),\ \forall x, y, z \in \mathbb{Q}. \tag{1}$$

Giải. Kí hiệu $P(u, v, w)$ chỉ việc thay x bởi u, thay y bởi v, thay z bởi w vào (1). Thực hiện $P(x, 0, 0)$ ta được $xf(0) = f(f(0)),\ \forall x \in \mathbb{Q}$. Suy ra $f(0) = 0$. Thực hiện $P(0, 0, x)$ ta được $f(f(x)) = x,\ \forall x \in \mathbb{Q}$. Từ đây dễ dàng chứng minh được f là song ánh trên $\mathbb{Q}$.

$$P(-1, 1, 1) \Rightarrow 1 = f(f(-1) + 2f(1)) \Rightarrow f(f(-1) + 2f(1)) = f(f(1))$$
$$\Rightarrow f(-1) + 2f(1) = f(1) \Rightarrow f(-1) = -f(1).$$

Do đó $P(0,-1,1) \Rightarrow -f(1)+1=0 \Rightarrow f(1)=1$. Thực hiện $P(0,x,1)$ được

$$\begin{aligned} &x+1=f(f(x)+1),\ \forall x\in\mathbb{Q}\\ \Rightarrow &f(f(x)+1)=f(f(x+1)),\ \forall x\in\mathbb{Q}\\ \Rightarrow &f(x)+1=f(x+1),\ \forall x\in\mathbb{Q}. \end{aligned} \tag{2}$$

Từ (2), bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được

$$f(x+n)=f(x)+n,\ \forall x\in\mathbb{Q},\forall n\in\mathbb{Z}. \tag{3}$$

Từ (3) lấy $x=0$ được $f(n)=n,\ \forall n\in\mathbb{Z}$. Với p,q là các số nguyên và $q\neq 0$:

$$\begin{aligned} &P\left(0,f\left(\frac{p}{q}\right),q\right)\Rightarrow f\left(\frac{p}{q}\right)f(q)+q=f\left(\frac{p}{q}.q+f(q)\right)=f(p+q)\\ &\Rightarrow f\left(\frac{p}{q}\right)q+q=p+q\Rightarrow f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p}{q}. \end{aligned}$$

Vậy $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{Q}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 4.73 (Đề thi chọn học sinh giỏi các trường Chuyên khu vực Duyên Hải và Đồng Bằng Bắc Bộ). *Tìm tất cả các hàm số $f:Q_+^*\to Q_+^*$ (Q_+^* là tập hợp các số hữu tỉ dương) thỏa mãn:*

$$f(x)+f(y)+2xyf(xy)=\frac{f(xy)}{f(x+y)},\ \forall x,y\in Q_+^*. \tag{1}$$

Giải.

Bước 1. Chứng minh $f(1)=1$. Cho $y=1$ vào (1) và đặt $f(1)=a$ ta có

$$f(x)+a+2xf(x)=\frac{f(x)}{f(x+1)}\Rightarrow f(x+1)=\frac{f(x)}{(1+2x)f(x)+a}. \tag{2}$$

Suy ra

$$f(2)=\frac{a}{4a}=\frac{1}{4}\ ;\ f(3)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}+a}=\frac{1}{5+4a}\ ;\ f(4)=\frac{1}{7+5a+4a^2}.$$

Mặt khác, cho $x=y=2$ vào (1) ta được $2f(2)+8f(4)=\dfrac{f(4)}{f(4)}=1$. Suy ra

$$\frac{1}{2}+\frac{8}{7+5a+4a^2}=1\Rightarrow a=1\Rightarrow f(1)=1.$$

Bước 2. Bằng quy nạp, ta chứng minh với mọi $n=1,2,\ldots$ thì

$$f(x+n)=\frac{f(x)}{(n^2+2nx)f(x)+1}. \tag{3}$$

Từ (2) suy ra (3) đúng với $n=1$. Giả sử (3) đúng tới $n=k$ ($k\in\mathbb{N}^*$). Khi đó

$$\begin{aligned} f(x+k+1)&=\frac{f(x+k)}{[1+2(x+k)]f(x+k)+1}=\frac{\frac{f(x)}{(k^2+2kx)f(x)+1}}{\frac{[1+2(x+k)]f(x)}{(k^2+2kx)f(x)+1}+1}\\ &=\frac{f(x)}{\left[(k+1)^2+2(k+1)x\right]f(x)+1}\ (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

Vậy từ (3) ta có $f(n+1)=\dfrac{f(1)}{(n^2+2n)f(1)+1}=\dfrac{1}{(n+1)^2}$. Hay

$$f(n)=\frac{1}{n^2}\ \forall n=1,2,\ldots \tag{4}$$

Bước 3. Chứng minh $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=n^2=\dfrac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^2},\forall n=1,2,\ldots$ (5)

Trong (3) thay $x=\dfrac{1}{n}$ được $f\left(n+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{(n^2+2)f\left(\frac{1}{n}\right)+1}$. Cho $y=\dfrac{1}{x}$ trong (1) ta được

$$\begin{aligned} &f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)+2=\frac{1}{f\left(x+\frac{1}{x}\right)}\\ \Rightarrow &f(n)+f\left(\frac{1}{n}\right)+2=\frac{1}{f\left(n+\frac{1}{n}\right)}=n^2+2+\frac{1}{f\left(\frac{1}{n}\right)}. \end{aligned}$$

Mà $f(n)=\dfrac{1}{n^2}$ nên $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=n^2$.

Bước 4. Chứng minh: Nếu $q=\dfrac{n}{m}$, $(m,n)=1$, m và n thuộc $\mathbb{N}^*$ thì $f(q)=\dfrac{1}{q^2}$. Thật vậy với $(n,m)=1$, đặt $x=n$, $y=\dfrac{1}{m}$ trong (1) ta có

$$f\left(\frac{1}{m}\right)+f(n)+\frac{2n}{m}f\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{f\left(\frac{n}{m}\right)}{f\left(n+\frac{1}{m}\right)}.$$

Cho $x=\frac{1}{m}$ trong (3) ta có

$$f\left(n+\frac{1}{m}\right)=\frac{f\left(\frac{1}{m}\right)}{\left(n^2+\frac{2n}{m}\right)f\left(\frac{1}{m}\right)+1}=\frac{1}{n^2+\frac{2n}{m}+\frac{1}{m^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2}+m^2+\frac{2n}{m}f\left(\frac{n}{m}\right)=\left(n^2+\frac{2n}{m}+\frac{1}{m^2}\right)f\left(\frac{n}{m}\right)$$

$$\Rightarrow \left(n^2+\frac{1}{m^2}\right)f\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{1}{n^2}+m^2 \Rightarrow f\left(\frac{n}{m}\right)=\left(\frac{m}{n}\right)^2$$

$$\Rightarrow f(q)=\frac{1}{q^2},\ \forall q\in\mathbb{Q},\ q>0.$$

Cuối cùng dễ kiểm tra $f(x)=\frac{1}{x^2}$ thỏa mãn phương trình hàm đã cho.

4.5 Một số phương pháp khác và toán tổng hợp

Bài toán 4.74. *Tìm các hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$, $g:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn*

$$[f(x)]^{g(y)}+[f(y)]^{g(x)}=x+y,\ \forall x,y\in\mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Giải. Giả sử f và g là hai hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Trong (1) lấy $x=y=1$, ta được

$$[f(1)]^{g(1)}=1\Rightarrow f(1)=1\ (\text{do } g(1)\neq 0).$$

Trong (1) lấy $x=2$, $y=1$, ta được

$$[f(2)]^{g(1)}+[f(1)]^{g(2)}=3\Rightarrow [f(2)]^{g(1)}=2\Rightarrow \begin{cases} f(2)=2\\ g(1)=1.\end{cases}$$

Trong (1), cho $y=1$, ta được $f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{N}^*$. Từ đó, trong (1) lấy $x=y\geq 2$, ta được $[f(x)]^{g(x)}=x$, $\forall x\in\mathbb{N}^*, x\geq 2$. Mà $f(x)=x$ nên $g(x)\equiv 1$. Thử lại thấy hai hàm số $f(x)\equiv x$, $g(x)\equiv 1$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 4.75. *Tìm các bộ ba hàm số $(f;g;h)$ xác định trên $\mathbb{N}^*$, nhận giá trị trong $\mathbb{N}^*$ và thỏa mãn điều kiện*

$$[f(x)]^{g(y)}+[g(y)]^{h(z)}+[h(z)]^{f(x)}=x+y+z,\ \forall x,y,z\in\mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Giải. Trong (1) lấy $x=y=z=1$ ta được

$$[f(1)]^{g(1)}+[g(1)]^{h(1)}+[h(1)]^{f(1)}=3$$

$$\Rightarrow \left([f(1)]^{g(1)};[g(1)]^{h(1)};[h(1)]^{f(1)}\right)=(1;1;1)\Rightarrow f(1)=g(1)=h(1)=1.$$

Trong (1) lấy $y=z=1$, ta được $f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{N}^*$. Tương tự, ta được

$$g(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{N}^*;\ h(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{N}^*.$$

Thử lại thấy không thỏa mãn, vì đẳng thức $x^y+y^z+z^x=x+y+z$ không đúng khi ta chọn $(x;y;z)=(2;2;2)$. Vậy không tồn tại bộ ba hàm số $(f;g;h)$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 4.76. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ thỏa mãn*

$$f(m+n)=\frac{1}{f(\frac{1}{m})+f(\frac{1}{n})},\ \forall m,n\in\mathbb{Q}^*. \tag{1}$$

Giải. Kí hiệu $P(u,v)$ để chỉ việc thay m bởi u và thay n bởi v vào (1).

$$P(\frac{1}{m},\frac{-1}{m})\Rightarrow f(0)[f(m)+f(-m)]=1,\ \forall m\in\mathbb{Q}^*$$

$$\Rightarrow f(-m)=\frac{1}{f(0)}-f(m),\ \forall m\in\mathbb{Q}^*. \tag{2}$$

Ta có $P(-m,-n)\Rightarrow f(-m-n)=\dfrac{1}{f(-\frac{1}{m})+f(-\frac{1}{n})}$, $\forall m,n\in\mathbb{Q}^*$. Kết hợp với (1) và (2) thu được

$$\frac{1}{f(0)}-f(m+n)=\frac{1}{\frac{1}{f(0)}-f(\frac{1}{m})+\frac{1}{f(0)}-f(\frac{1}{n})},\ \forall m,n\in\mathbb{Q}^*$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(0)}-f(m+n)=\frac{1}{\frac{2}{f(0)}-\frac{1}{f(m+n)}},\ \forall m,n\in\mathbb{Q}^*. \tag{3}$$

Từ (3) thay n bởi $-m$ và đặt $c=\dfrac{1}{f(0)}\in\mathbb{Q}$, ta được

$$c-\frac{1}{c}=\frac{1}{c}\Leftrightarrow c=\frac{2}{c}\Leftrightarrow c^2=2\Leftrightarrow c=\pm\sqrt{2},$$

mâu thuẫn với $c\in\mathbb{Q}$. Vậy không tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài toán 4.77. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn $f(1)=1$ và*

$$f(xf(yf(f(z))))=zf(y)f(f(x)),\ \forall x,y,z\in\mathbb{Z}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử hàm f thỏa mãn yêu cầu đề bài. Trong (1) cho $x = z = 1$ được

$$f(f(yf(f(1)))) = f(y)f(f(1)) \Rightarrow f(f(y)) = f(y),\ \forall y \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Trong (1) cho $x = y = 1$ ta được

$$f(f(f(f(z)))) = z \overset{\text{do (2)}}{\Rightarrow} f(f(y)) = y,\ \forall y \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{Z}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 4.78. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn:*

$$f(x + yf(x)) = f(x) + xf(y),\ \forall x, y \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Hướng dẫn. Kí hiệu $P(u, v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (1). Dễ thấy $f(x) \equiv 0$ là nghiệm hàm của bài toán. Tiếp theo giả sử $f(x) \neq 0$, ta sẽ chứng minh $f(x) \equiv x$. Ta có

$$P(x, 0) \Rightarrow xf(0) = 0,\ \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Suy ra $f(0) = 0$. Nếu $f(1) \neq 1$ thì $P\left(1, \dfrac{1}{1 - f(1)}\right) \Rightarrow f(1) = 0$, mâu thuẫn.

Do đó $f(1) = 1$.

$$P(1, y) \Rightarrow f(1 + y) = 1 + f(y),\ \forall y \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Do $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ nên từ (2), bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được: $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 4.79. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn*

$$f(C_n^m) = C_{f(n)}^{f(m)},\ \forall m, n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq m. \quad (1)$$

Giải. Từ (1) ta có $f(1) = f\left(C_1^1\right) = C_{f(1)}^{f(1)} = 1$. Với $n \geq 2$, ta có

$$f(n) = f\left(C_n^{n-1}\right) = C_{f(n)}^{f(n-1)} \Rightarrow C_{f(n)}^{f(n)-1} = C_{f(n)}^{f(n-1)}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(n) - 1 = f(n-1) \\ f(n) - 1 = f(n) - f(n-1) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} f(n) = f(n-1) + 1 & (2) \\ f(n-1) = 1. & (3) \end{array}\right.$$

Từ (3) suy ra $f(n) = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Thử lại thấy thỏa mãn. Từ (2) ta có

$$\begin{aligned} &f(1) = 1 \\ &f(2) = f(1) + 1 \\ &f(3) = f(2) + 1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &f(n) = f(n-1) + 1. \end{aligned}$$

Cộng lại ta được $f(n) = n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy có hai hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là $f(n) = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $f(n) = n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bài toán 4.80. *Kí hiệu $\mathbb{Q}^+$ là tập hợp các số hữu tỉ dương. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ thỏa mãn:*

$$f\left(x + \frac{y}{x}\right) = f(x) + \frac{f(y)}{f(x)} + 2y,\ \forall x, y \in \mathbb{Q}^+. \quad (1)$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Thay $y = x$ vào (1) ta được: $f(x + 1) = f(x) + 2x + 1,\ \forall x \in \mathbb{Q}^+$ (2)

Thay $x = 1$ vào (1) ta được:

$$f(1 + y) = f(1) + \frac{f(y)}{f(1)} + 2y \Rightarrow f(x + 1) = f(1) + \frac{f(x)}{f(1)} + 2x,\ \forall x \in \mathbb{Q}^+. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra:

$$\begin{aligned} &f(x) + 2x + 1 = f(1) + \frac{f(x)}{f(1)} + 2x,\ \forall x \in \mathbb{Q}^+ \\ \Leftrightarrow &f(x) + 1 = f(1) + \frac{f(x)}{f(1)},\ \forall x \in \mathbb{Q}^+ \\ \Leftrightarrow &f(x)\left[1 - \frac{1}{f(1)}\right] = f(1) - 1,\ \forall x \in \mathbb{Q}^+ \\ \Leftrightarrow &[f(1) - 1][f(x) - f(1)] = 0,\ \forall x \in \mathbb{Q}^+. \end{aligned} \quad (4)$$

Rõ ràng hàm số $f(x) = f(1), \forall x \in \mathbb{Q}^+$ không thỏa mãn (1) nên từ (4) suy ra $f(1) = 1$. Do (2) nên với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\begin{aligned} &f(2) = f(1) + 3 \\ &f(3) = f(2) + 5 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &f(n) = f(n-1) + 2n - 1. \end{aligned}$$

Cộng lại ta được:

$$f(n) = f(1) + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Như vậy: $f(n) = n^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. (5)

Từ (2) ta có:

$$\begin{aligned} &f(x+1) = f(x) + 2x + 1 \\ &f(x+2) = f(x+1) + 2(x+1) + 1 \\ &f(x+3) = f(x+2) + 2(x+2) + 1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &f(x+n) = f(x+n-1) + 2(x+n-1) + 1. \end{aligned}$$

Cộng lại ta được:

$$\begin{aligned} f(x+n) &= f(x) + 2\left[x + (x+1) + \cdots + (x+n-1)\right] + n \\ &= f(x) + 2\left(nx + \frac{n(n-1)}{2}\right) + n \\ &= f(x) + 2nx + n^2, \forall x \in \mathbb{Q}^+, n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned} \tag{6}$$

Từ (6) ta có:

$$f\left(m + \frac{n}{m}\right) = f\left(\frac{n}{m}\right) + 2m.\frac{n}{m} + m^2 = f\left(\frac{n}{m}\right) + 2n + m^2. \tag{7}$$

Từ (1) và (5) suy ra:

$$f\left(m + \frac{n}{m}\right) = f(m) + \frac{f(n)}{f(m)} + 2n \overset{\text{do (5)}}{=} m^2 + \frac{n^2}{m^2} + 2n. \tag{8}$$

Từ (7) và (8), suy ra với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$f\left(\frac{n}{m}\right) + 2n + m^2 = m^2 + \frac{n^2}{m^2} + 2n \Leftrightarrow f\left(\frac{n}{m}\right) = \left(\frac{n}{m}\right)^2.$$

Vậy $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{Q}^+$. Thử lại thấy thỏa mãn.
Kết luận: có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{Q}^+.$$

Bài toán 4.81 (Pan African 2010). *Tồn tại hay không hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn: $f\big(x + f(y)\big) = f(x) - y, \forall x, y \in \mathbb{Z}$.* (1)

Giải. Giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn (1). Ta chứng minh f là song ánh. Giả sử $f(x_1) = f(x_2)$. Khi đó:

$$f(x) - x_1 \overset{\text{do (1)}}{=} f\big(x + f(x_1)\big) = f\big(x + f(x_2)\big) \overset{\text{do (1)}}{=} f(x) - x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Vậy f là đơn ánh. Giả sử $t \in \mathbb{Z}$, khi đó tồn tại $k = 1 + f\big(f(1) - t\big) \in \mathbb{Z}$ và:

$$f(k) = f\Big(1 + f\big(f(1) - t\big)\Big) \overset{\text{do (1)}}{=} f(1) - [f(1) - t] = t.$$

Vậy f là toàn ánh, suy ra f là song ánh. Từ (1) cho $x = 1$ và $y = 0$, ta được: $f\big(1 + f(0)\big) = f(1)$. Mà f là song ánh nên từ đây suy ra: $1 + f(0) = 1$ hay $f(0) = 0$. Từ (1) cho $x = 0$, ta được: $f\big(f(y)\big) = -y, \forall y \in \mathbb{Z}$. Như vậy (1) trở thành:

$$f\big(x + f(y)\big) = f(x) + f\big(f(y)\big), \forall x, y \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Mà f là song ánh nên từ (2) suy ra:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Từ (3), áp dụng kết quả bài toán 4.58 ở trang 483, suy ra:

$$f(x) = ax, \ \forall x \in \mathbb{Z} \ \big(a = f(1) \text{ là hằng số nguyên}\big).$$

Thay vào (1) được:

$$\begin{aligned} &a\,(x + ay) = ax - y, \forall x, y \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow &a^2 y = -y, \forall x, y \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow &a^2 = -1. \end{aligned}$$

Điều vô lí này chứng tỏ không tồn tại hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn (1).

Bài toán 4.82 (France Team Selection Test 2007). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn:*

$$f\,(x - y + f(y)) = f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Giải. Kí hiệu $P(u, v)$ chỉ phép thay x bởi u và y bởi v vào (1). Đặt $f(0) = a$.

$$\begin{aligned} &P(0,0) \Rightarrow f(a) = 2a \Rightarrow f(a) - a = a. \\ &P(0,a) \Rightarrow f(a) = a + f(a) \Rightarrow a = 0 \Rightarrow f(0) = 0. \\ &P(0,x) \Rightarrow f\,(f(x) - x) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{2}$$

Thực hiện $P\,(x, f(y) - y)$ ta được

$$f\,(x - f(y) + y + f\,(f(y) - y)) = f(x) + f\,(f(y) - y), \ \forall x, y \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Thay (2) vào (3) ta được $f\,(x + y) = f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{Z}$. Từ đây, áp dụng kết quả bài toán 4.58 ở trang 483, suy ra

$$f(x) = ax, \ \forall x \in \mathbb{Z} \ \big(a = f(1) \text{ là hằng số nguyên}\big).$$

Thay vào (1) ta được:

$$\begin{aligned} &a\,(x - y + ay) = ax + ay, \ \forall x, y \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow &\left(a^2 - 2a\right) y = 0, \ \forall y \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Vậy $a \in \{0, 2\}$, do đó có hai hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{Z} \text{ và } f(x) = 2x, \ \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Bài toán 4.83 (Hong Kong Team Selection Tests 2008). *Giả sử hàm số* $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ *thỏa mãn* $f(1)=1, f(2)=20, f(-4)=-4$ *và*

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+axy(x+y)+bxy+c(x+y)+4, \forall x,y\in\mathbb{Z}, \quad (1)$$

trong đó a,b,c *là những hằng số nguyên.*
a) Tìm hàm số f.
b) Giả sử $f(x)\geq mx^2+(5m+1)x+4m, \forall x\in\mathbb{N}$. *Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của* m.

Giải. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (1).
a) $P(0;0)\Rightarrow f(0)=-4$; $P(0;y)\Rightarrow cy=0,\ \forall y\in\mathbb{Z}$, suy ra $c=0$.

$$P(1;-1)\Rightarrow -4=1+f(-1)-b+4\Rightarrow f(-1)=b-9.$$
$$P(-1;-1)\Rightarrow f(-2)=2f(-1)-2a+b+4=-2a+3b-14$$
$$P(-2;-2)\Rightarrow f(-4)=2f(-2)-16a+4b+4=-20a+10b-24.$$

Do đó $-4=-20a+10b-24\Leftrightarrow 20a-10b=-20\Leftrightarrow 2a-b=-2.$ (2)

$$P(1;1)\Rightarrow f(2)=2f(1)+2a+b+4\Rightarrow 2a+b=14. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta có $a=3$, $b=8$. Vậy:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)+8xy+4,\ \forall x,y\in\mathbb{Z}. \quad (4)$$

Xét hàm số $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ như sau:

$$g(x)=f(x)-(x^3+4x^2-4)\Leftrightarrow f(x)=g(x)+(x^3+4x^2-4).$$

Thay vào (4), suy ra, với mọi $x\in\mathbb{Z}$ và $y\in\mathbb{Z}$, ta có

$$\begin{aligned}&g(x+y)+x^3+y^3+3xy(x+y)+4(x+y)^2-4\\ =&g(x)+g(y)+(x^3+4x^2-4)+(y^3+4y^2-4)\\ &+3xy(x+y)+8xy+4\\ =&g(x)+g(y)+x^3+y^3+3xy(x+y)+4(x+y)^2-4.\end{aligned}$$

Như vậy $g(x+y)=g(x)+g(y), \forall x,y\in\mathbb{Z}$. Từ đây, áp dụng kết quả bài toán 4.58 ở trang 483, suy ra

$$g(x)=ax,\ \forall x\in\mathbb{Z}\ \ (a=g(1)\text{ là hằng số nguyên}).$$

Mà $g(1)=f(1)-1=0$ nên $a=0$. Do đó $g(x)=0, \forall x\in\mathbb{Z}$ hay

$$f(x)=x^3+4x^2-4, \forall x\in\mathbb{Z}.$$

Thử lại thấy hàm số $f(x)=x^3+4x^2-4, \forall x\in\mathbb{Z}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.
b) $f(x)\geq mx^2+(5m+1)x+4m,\ \forall x\in\mathbb{N}$. Khi đó

$$x^3+4x^2-4\geq mx^2+(5m+1)x+4m, \forall x\in\mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow x^3+4x^2-x-4\geq m(x^2+5x+4), \forall x\in\mathbb{N}$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x+4)\geq m(x+1)(x+4), \forall x\in\mathbb{N}$$
$$\Leftrightarrow x-1\geq m, \forall x\in\mathbb{N}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của m là -1, đạt được khi $x=0$.

Bài toán 4.84 (Canada-2008). *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ *thỏa mãn:*

$$f\left(2f(x)+f(y)\right)=2x+y,\ \forall x,y\in\mathbb{Q}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) cho $y=x$ ta được: $f\left(3f(x)\right)=3x,\ \forall x\in\mathbb{Q}$. (2)
Trong (2) thay x bởi $3f(x)$ ta được: $f(9x)=9f(x),\ \forall x\in\mathbb{Q}$. (3)
Từ (3) cho $x=0$, thu được: $f(0)=0$. Cho $x=0$ và (1) ta được:

$$f\left(f(y)\right)=y,\ \forall y\in\mathbb{Q}. \quad (4)$$

Cho $y=0$ vào (1) thu được: $f\left(2f(x)\right)=2x,\ \forall x\in\mathbb{Q}$. Như vậy (1) viết lại:

$$f\left(2f(x)+f(y)\right)=f\left(2f(x)\right)+f\left(f(y)\right),\ \forall x,y\in\mathbb{Q}. \quad (5)$$

Từ (4) ta chứng minh được f là song ánh (tương tự bài toán 1.4 ở trang 6), do đó với mọi $u,v\in\mathbb{Q}$, luôn có $x,y\in\mathbb{Q}$ sao cho: $2f(x)=u$ và $f(y)=v$. Từ đó, ta có: $f(u+v)=f\left(2f(x)+f(y)\right)=f\left(2f(x)\right)+f\left(f(y)\right)=f(u)+f(v)$.
Như vậy: $f(u+v)=f(u)+f(v),\ \forall u,v\in\mathbb{R}$. (6).
Từ (6), tương tự như bài toán 2.214 ở trang 278, suy ra $f(x)=ax,\ \forall x\in\mathbb{Q}$.
Thay vào (1) ta rút ra $a^2=1\Leftrightarrow a=\pm 1$.
Kết luận: $f(x)\equiv x$ và $f(x)\equiv -x$.

Bài toán 4.85. *Tìm các* $f,g:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ *thỏa mãn*

$$f\left(x+g(y)\right)=g(x)+2y+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{Q}. \quad (1)$$

Giải. Nhận xét rằng nếu $f(x)$ thỏa mãn (1) thì $f(x)+c$ (c là hằng số hữu tỉ) cũng thỏa (1). Vì vậy có thể giả sử $f(0)=0$. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u và y bởi v vào (1).

$$P\left(-g(0),0\right)\Rightarrow f(0)=g\left(-g(0)\right)+f(0)\Leftrightarrow g\left(-g(0)\right)=0.$$
$$P\left(-g(0),-g(0)\right)\Rightarrow f\left(-g(0)\right)=-2g(0)+f\left(-g(0)\right)\Leftrightarrow g(0)=0.$$

Thực hiện $P(x,0)$ ta được $f(x)=g(x),\ \forall x\in\mathbb{Q}$. Như vậy (1) trở thành

$$f\left(x+f(y)\right)=f(x)+2y+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{Q}. \quad (2)$$

Kí hiệu $Q(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u và y bởi v vào (2).

$$Q\left(x-f(x),x\right)\Rightarrow f(x)=f\left(x-f(x)\right)+2x+f(x),\ \forall x\in\mathbb{Q}.$$

Suy ra $f(x-f(x))=-2x,\ \forall x\in\mathbb{Q}$. Từ đây chứng minh được f là song ánh trên $\mathbb{Q}$. Từ (2) cho $x=0$ ta được

$$f(f(y))=2y+f(y),\ \forall y\in\mathbb{Q}. \tag{3}$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$f(x+f(y))=f(x)+f(f(y)),\ \forall x,y\in\mathbb{Q}. \tag{4}$$

Do f là song ánh trên $\mathbb{Q}$ nên từ (4) ta có

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{Q}. \tag{5}$$

Từ (5), tương tự như bài toán 2.214 ở trang 278 ta chứng minh được

$$f(x)=ax,\ \forall x\in\mathbb{Q}\ \left(a=f(1)\text{ là hằng số hữu tỉ}\right).$$

Thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned}&a(x+ay)=ax+2y+ay,\ \forall x,y\in\mathbb{Q}\\ \Leftrightarrow&a^2y=2y+ay,\ \forall x,y\in\mathbb{Q}\\ \Leftrightarrow&a^2-a-2=0\Leftrightarrow a\in\{-1,2\}.\end{aligned}$$

Vậy

$$f(x)\equiv 2x+c \text{ và } g(x)=2x\ \left(c\text{ là hằng số hữu tỉ}\right). \tag{5}$$

$$f(x)\equiv -x+c \text{ và } g(x)=-x\ \left(c\text{ là hằng số hữu tỉ}\right). \tag{6}$$

Thử lại, thấy f và g xác định bởi (5) và (6) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 4.86. *Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho tồn tại đúng k hàm số $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ thỏa mãn*

$$f(x+y)=kf(x)f(y)+f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{Q}. \tag{1}$$

Giải. Đặt $h(x)=kf(x)+1,\ \forall x\in\mathbb{Q}$. Khi đó (1) trở thành

$$\begin{aligned}&\frac{h(x+y)-1}{k}=k\frac{h(x)-1}{k}\frac{h(y)-1}{k}+\frac{h(x)-1}{k}+\frac{h(y)-1}{k},\ \forall x,y\in\mathbb{Q}\\ \Leftrightarrow&h(x+y)=h(x)h(y),\ \forall x,y\in\mathbb{Q}.\end{aligned} \tag{2}$$

Dễ thấy các hàm $h(x)\equiv 0$, $h(x)\equiv 1$ thỏa mãn (2). Tiếp theo xét $h(x)\not\equiv 0$. Khi đó tồn tại $x_0\in\mathbb{Q}$ sao cho $h(x_0)\neq 0$. Theo (2) ta có

$$h(x_0)=h(x+(x_0-x))=h(x).h(x_0-x),\forall x\in\mathbb{Q}.$$

Suy ra $h(x)\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{Q}$ và $h(x)=h\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\left[h\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2>0,\forall x\in\mathbb{Q}$. Như vậy ta đặt $\ln h(x)=g(x)$ $\left(h(x)=e^{g(x)}\right)$. Khi đó hàm g xác định trên $\mathbb{Q}$ và

$$\begin{aligned}&e^{g(x+y)}=e^{g(x)}.e^{g(y)},\ \forall x,y\in\mathbb{Q}\\ \Leftrightarrow&e^{g(x+y)}=e^{g(x)+g(y)},\ \forall x,y\in\mathbb{Q}\\ \Leftrightarrow&g(x+y)=g(x)+g(y),\ \forall x,y\in\mathbb{Q}.\end{aligned}$$

Tương tự như bài toán 2.214 ở trang 278 ta chứng minh được

$$g(x)=g(1)x,\ \forall x\in\mathbb{Q}.$$

Vậy $h(x)=e^{g(1)x},\ \forall x\in\mathbb{Q}$. Nhưng hàm $h(x)$ này không thỏa mãn điều kiện $h:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$. Do đó $k=2$.

Bài toán 4.87. *Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn*

$$f(m+f(n))=f(m+n)+2n+1,\ \forall m,n\in\mathbb{Z}. \tag{1}$$

Giải. Từ (1) thay m bởi $m-n$ ta được

$$f(m+[f(n)-n])=f(m)+2n+1,\ \forall m,n\in\mathbb{Z}.$$

Từ đây, bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được

$$f(m+k[f(n)-n])=f(m)+k(2n+1),\ \forall m,n,k\in\mathbb{Z}. \tag{2}$$

Từ (2) lấy $k=f(p)-p$ ta được

$$\begin{aligned}&f(m+[f(p)-p][f(n)-n])=f(m)+[f(p)-p](2n+1),\ \forall m,n,p\in\mathbb{Z}\\ \Rightarrow&f(m+[f(n)-n][f(p)-p])=f(m)+[f(n)-n](2p+1),\ \forall m,n,p\in\mathbb{Z}\\ \Rightarrow&[f(p)-p](2n+1)=[f(n)-n](2p+1),\ \forall n,p\in\mathbb{Z}\\ \Rightarrow&\frac{f(n)-n}{2n+1}=\frac{f(p)-p}{2p+1},\ \forall n,p\in\mathbb{Z}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}\\ \Rightarrow&\frac{f(n)-n}{2n+1}=c,\ \forall n\in\mathbb{Z}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}\ (c=f(0)\in\mathbb{Z})\\ \Rightarrow&f(n)=c(2n+1)+n,\ \forall n\in\mathbb{Z}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}\\ \Rightarrow&f(n)=(2c+1)n+c,\ \forall n\in\mathbb{Z}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}.\end{aligned} \tag{3}$$

(4)

Từ (3) cho $p=-\frac{1}{2}$ ta được $\left[f\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right](2n+1)=0,\ \forall n\in\mathbb{Z}$. Suy ra $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$. Kết hợp với (4) ta được

$$f(n)=(2c+1)n+c,\ \forall n\in\mathbb{Z}. \tag{5}$$

Thay (5) vào (1) được

$$(2c+1)\,[m+(2c+1)\,n+c]+c=(2c+1)\,(m+n)+c+2n+1,\ \forall m,n\in\mathbb{Z}.$$

Chọn $m=n=0$ suy ra

$$(2c+1)\,c=1\Leftrightarrow 2c^2+c-1=0\Leftrightarrow c=-1\ (\text{do } c=f(0)\in\mathbb{Z}).$$

Vậy $f(x)=-x-1,\ \forall x\in\mathbb{Z}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 4.88 (Romania National Olympiad 2008, Grade 9). *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn:*

$$f\left(x^2+f(y)\right)=xf(x)+y,\ \forall x,y\in\mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Giải. Từ (1) lấy $x=1,y=1$, ta được $f\,(1+f(1))=f(1)+1$. Đặt $c=1+f(1)$, khi đó $f(c)=c$. Từ (1) lấy $x=1$, ta được

$$f\,(1+f(y))=f(1)+y,\ \forall y\in\mathbb{N}^*. \tag{2}$$

Từ (2) thay y bởi $f(y)+1$ ta được

$$\begin{aligned}&f\,(1+f(1)+y)=f(1)+f(y)+1,\ \forall y\in\mathbb{N}^*\\ \Rightarrow&f(y+c)=f(y)+c,\ \forall y\in\mathbb{N}^*.\end{aligned}$$

Giả sử $f(y+kc)=f(y)+kc,\ \forall y\in\mathbb{N}^*\ (k\in\mathbb{N}^*)$. Khi đó

$$\begin{aligned}f\,(y+(k+1)c)&=f\,(y+c+kc)=f(y+c)+kc=f(y)+c+kc\\&=f(y)+(k+1)c,\ \forall y\in\mathbb{N}^*.\end{aligned}$$

Theo nguyên lý quy nạp suy ra

$$f(x+kc)=f(x)+kc,\ \forall x\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\in\mathbb{N}^*. \tag{3}$$

Từ (3) lấy $x=c$, ta được

$$\begin{aligned}&f\,((k+1)c)=f(c)+kc,\ \forall k\in\mathbb{N}^*\\ \Rightarrow&f\,((k+1)c)=(k+1)c,\ \forall k\in\mathbb{N}^*.\end{aligned}$$

Suy ra $f\,(kc)=kc,\ \forall k\in\mathbb{N}^*$. Từ (1) cho $y=c$, ta được

$$\begin{aligned}&f\left(x^2+c\right)=xf(x)+c,\ \forall x\in\mathbb{N}^*\\ \Rightarrow&f(x^2)+c=xf(x)+c,\ \forall x\in\mathbb{N}^*\ (\text{do sử dụng (3)}).\end{aligned}$$

Như vậy $f(x^2)=xf(x),\ \forall x\in\mathbb{N}^*$. Từ đây thay x bởi $c+1$, ta được

$$f(c^2+2c+1)=(c+1)f(c+1)\Rightarrow f(c^2+1)+2c=(c+1)[f(1)+c]. \tag{4}$$

Theo (3) thì $f(c^2+1)=f(1+c.c)=f(1)+c^2$. Thay vào (4), ta được

$$\begin{aligned}&f(1)+c^2+2c=(c+1)[f(1)+c]\\ \Rightarrow&f(1)+c^2+2c=cf(1)+c^2+f(1)+c\Rightarrow c=cf(1).\end{aligned}$$

Mà $c\in\mathbb{N}^*$ nên suy ra $f(1)=1$ và $c=2$. Do đó theo (3) thì

$$f(x+2)=f(x)+2,\ \forall x\in\mathbb{N}^*. \tag{5}$$

Từ $f(1)=1,f(2)=2$ và (5), bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{N}^*. \tag{6}$$

Thử lại thấy rằng hàm số xác định bởi (6) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 4.89 (International Zhautykov Olympiad-2012). *Tồn tại hay không hai số nguyên m, n và hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:*

$$f(f(x))=2f(x)-x-2,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

$$m\le n \text{ và } f(m)=n. \tag{2}$$

Giải. Giả sử tồn tại hai số nguyên m, n và hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đã nói trong đề bài. Đặt $n-m=k$ với $k\in\mathbb{N}$. Từ (2) ta có $f(m)=m+k$. Đặt $m_1=f(m)$. Khi thay m vào (1), ta thu được:

$$f(m_1)=m_1+(k-2).$$

Đặt $m_2=f(m_1)$. Khi thay m_1 vào (1), ta thu được $f(m_2)=m_2+(k-2.2)$.

• Cứ đặt liên tiếp kiểu $m_p=f(m_{p-1})$ và thế vào (1), ta sẽ thu được

$$f(m_p)=m_p+(k-2p),\ \forall p\in\mathbb{N}^*.$$

• Có 2 khả năng xảy ra:

◦ Nếu k chẵn, tức là $k=2r$, thì khi đó $f(m_r)=m_r$, thế m_r vào (1) ta có:

$$m_r=2m_r-m_r-2\Rightarrow 0=-2\ (\text{vô lý}).$$

◦ Nếu k lẻ, tức là $k=2r+1$, thì khi đó $f(m_r)=m_r+1$, thế m_r vào (1) ta có $f(m_r+1)=m_r$. Từ đây lại thế m_r+1 vào (1) rút ra

$$m_r+1=2m_r-(m_r+1)-2\Rightarrow 0=-4\ (\text{vô lý}).$$

Vậy câu trả lời là không tồn tại.

Bài toán 4.90. *Cho hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn*

$$f\,(x+|f(y)|)=x+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Đặt $m=\min\{f(x)|x\in\mathbb{N}^*\}$. Chứng minh rằng $f(x)=x,\ \forall x>m$.

Giải. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u và y bởi v vào (1).

• Giả sử tồn tại $a \in \mathbb{N}^*$ sao cho $|f(a)| < a$.

$$P(a-|f(a)|, a) \Rightarrow f(a) = a - |f(a)| + f(a) \Leftrightarrow |f(a)| = a \text{ (mâu thuẫn)}.$$

Vì thế $|f(x)| \geq x$, $\forall x \in \mathbb{N}^*$. (2)

• Giả sử tồn tại $a \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(a) < 0$. Thực hiện $P(-f(a), a)$ ta được $f(-2f(a)) = 0$, điều này mâu thuẫn với (2), vì $-2f(a) \in \mathbb{N}^*$, do đó

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{N}^*. \quad (3)$$

Từ (3) và (1) suy ra $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ và

$$f(x + f(y)) = x + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{N}^*. \quad (4)$$

Do $m = \min\{f(x) | x \in \mathbb{N}^*\}$ nên tồn tại $y \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(y) = m$. Với mọi $x > m$, ta có $x - m = x_0 \in \mathbb{N}^*$ và

$$f(x) = f(x_0 + m) = f(x_0 + f(y)) = x_0 + f(y) = x_0 + m = x.$$

Bài toán 4.91. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn $f(x) \neq 0$ với mọi $x \neq 0$ và* $\dfrac{f(x+y)}{f(xy)} = \dfrac{1}{f(x)} + \dfrac{1}{f(y)}$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$. (1)

Giải. Kí hiệu $P(x,y)$ là phép thế $(x;y)$ vào (1).

$$P(1,1) \Rightarrow \frac{f(2)}{f(1)} = \frac{2}{f(1)} \Rightarrow f(2) = 2.$$

Trường hợp 1: $f(0) \neq 0$.

$$P(0,0) \Rightarrow 1 = \frac{2}{f(0)} \Rightarrow f(0) = 2.$$

$$P(1,0) \Rightarrow \frac{f(1)}{2} = \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{2} \Rightarrow [f(1)+1][f(1)-2] = 0.$$

• Xét $f(1) = -1$.

$$P(x,1) \Rightarrow \frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{1}{f(x)} - 1 \Rightarrow f(x) + f(x+1) = 1, \forall x \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Từ (2) cho $x = 2$ ta được: $f(2) + f(3) = 1 \Rightarrow f(3) = -1$.
Từ (2) cho $x = 3$ ta được: $f(3) + f(4) = 1 \Rightarrow f(4) = 2$.
Bằng quy nạp, ta chứng minh được:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{khi } x = 2k, k \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{khi } x = 2n+1, n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (3)$$

Thử lại: giả sử hàm f xác định bởi (3). Khi đó:

– Khi x và y cùng chẵn, ta có: $\dfrac{1}{f(x)} + \dfrac{1}{f(y)} = 1$, $\dfrac{f(x+y)}{f(xy)} = 1$, vậy hàm f xác định bởi (3) thỏa mãn (1).

– Khi x và y cùng lẻ, ta có: $\dfrac{1}{f(x)} + \dfrac{1}{f(y)} = -2$, $\dfrac{f(x+y)}{f(xy)} = \dfrac{2}{-1} = -2$, vậy hàm f xác định bởi (3) thỏa mãn (1).

– Khi x và y khác tính chẵn lẻ, ta có:

$$\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)} = -\frac{1}{2}, \ \frac{f(x+y)}{f(xy)} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2},$$

vậy hàm f xác định bởi (3) thỏa mãn (1).

Như vậy hàm f xác định bởi (3) thỏa mãn (1).

• Xét $f(1) = 2$.

$$P(x,1) \Rightarrow \frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{2} \Rightarrow f(x+1) = 1 + \frac{f(x)}{2}, \ \forall x \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Từ (4) suy ra nếu $f(x) = 2$ thì $f(x+1) = 2$, $f(x-1) = 2f(x) - 2 = 2$. Do đó $f(x) = 2$, $\forall x \in \mathbb{Z}$. Thử lại thấy đúng.

Trường hợp 2: $f(0) = 0$.

$$P(x,-x) \Rightarrow 0 = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(-x)} \Rightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{Z}$$

$$P(2,-1) \Rightarrow \frac{f(1)}{-2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{f(1)} \Rightarrow [f(1)]^2 + f(1) - 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(1) = -2. \end{array}\right.$$

• Xét $f(1) = 1$.

$$P(x,1) \Rightarrow \frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{1}{f(x)} + 1 \Rightarrow f(x+1) = f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Từ đây bằng quy nạp, ta chứng minh được: $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$. Dễ thấy hàm này thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

• Xét $f(1) = -2$. $P(2,1) \Rightarrow \dfrac{f(3)}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0 \Rightarrow f(3) = 0$, trái với giả thiết $f(x) \neq 0$ với mọi $x \neq 0$.

Kết luận: các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$f(x) = 2, \forall x \in \mathbb{Z}; \ f(x) = x, \forall x \in \mathbb{Z}; \ f(x) = \begin{cases} 2 & \text{khi } x = 2k, k \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{khi } x = 2n+1, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Bài toán 4.92 (Đề thi Olympic Toán Quốc tế năm 2012). *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn : với a,b,c là các số nguyên sao cho $a+b+c=0$ thì*

$$f(a)^2+f(b)^2+f(c)^2=2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a). \quad (1)$$

Giải. Từ (1), lấy $a=b=c=0$, ta được $3f(0)^2=6f(0)^2\Leftrightarrow f(0)=0$. Với $b=-a$, $c=0$, suy ra, với mọi $a\in\mathbb{Z}$, ta có

$$f(a)^2+f(-a)^2=2f(a)f(-a)\Leftrightarrow[f(a)-f(-a)]^2=0\Leftrightarrow f(-a)=f(a).$$

Với $c=-a-b$, ta được

$$f(a)^2+f(b)^2+f(a+b)^2=2f(a)f(b)+2f(a+b).[f(a)+f(b)],\ \forall a,b\in\mathbb{Z}. \quad (2)$$

Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay a bởi u và thay b bởi v vào (2). Thực hiện $P(a,-b)$, ta được

$$f(a)^2+f(b)^2+f(a-b)^2=2f(a)f(b)+2f(a-b)[f(a)+f(b)]. \quad (3)$$

Lấy (2) trừ (3), ta được

$$f(a+b)^2-f(a-b)^2=2[f(a)+f(b)][f(a+b)-f(a-b)].$$

Như vậy, với mọi số nguyên a và b thì $f(a+b)=f(a-b)$ hoặc

$$f(a+b)+f(a-b)=2[f(a)+f(b)].$$

Với $a=b=1$ ta được $f(2)=0$ hoặc $f(2)=4f(1)$.

Trường hợp 1 : $f(2)=0$. Thực hiện $P(a,2)$, ta được

$$\begin{aligned}&f(a)^2+f(a+2)^2=2f(a+2)f(a),\ \forall a,b\in\mathbb{Z}\\ \Leftrightarrow&[f(a)-f(a+2)]^2=0,\ \forall a,b\in\mathbb{Z}\\ \Leftrightarrow&f(a)=f(a+2),\ \forall a,b\in\mathbb{Z}.\end{aligned} \quad (4)$$

Nếu a chẵn ($a=2k,k\in\mathbb{Z}$) thì từ (4) suy ra $f(a)=f(2)=0$. Nếu a lẻ thì từ (4) suy ra $f(a)=f(1)$, do đó $f(a)=e$, với e là hằng số nguyên.

Trường hợp 2 : $f(2)=4f(1)$. Đặt $f(1)=e$. Ta có $f(0)=0^2e$, $f(1)=1^2e$, $f(2)=2^2e$. Giả $f(k)=k^2e$, với $k\in\{1,2,\ldots,n\}$. Thực hiện $P(1,n)$, ta được

$$\begin{aligned}&c^2+n^4c^2+f(n+1)^2=2n^2c^2+2(n^2+1)f(n+1)e\\ \Leftrightarrow&[f(n+1)-(n+1)^2e][f(n+1)-(n-1)^2e]=0.\end{aligned}$$

- Nếu $f(n+1)=(n-1)^2e$ thì thực hiện $P(n+1,1-n)$, ta được

$$\begin{aligned}&2(n-1)^4e^2+16e^2=2(n-1)^4e^2+16(n-1)^2e^2\\ \Leftrightarrow&16e^2=16(n-1)^2e^2\Leftrightarrow(n-1)^2=1\Rightarrow n=2.\end{aligned}$$

Do đó $f(3)=e$. Thực hiện $P(1,3)$, ta được

$$2e^2+f(4)^2=2e^2+4f(4)e\Leftrightarrow f(4)^2=4ef(4)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f(4)=0\\ f(4)=4e=f(2).\end{array}\right.$$

Nếu $f(4)\neq0$ thì

$$\begin{aligned}P(2,2)&\Rightarrow f(2)^2+f(2)^2+f(4)^2=2f(2)^2+4f(2)f(4)\\ &\Rightarrow f(4)^2=4f(2)f(4)\Rightarrow f(4)=4f(2)\\ &\Rightarrow f(2)=4f(2)\Rightarrow f(2)=0,\end{aligned}$$

đến đây ta gặp mâu thuẫn vì đang xét $f(2)\neq0$. Vậy $f(4)=0$.

$$\begin{aligned}P(a,4)&\Rightarrow f(a)^2+f(a+4)^2=2f(a+4)f(a)\\ &\Rightarrow f(a)=f(a+4),\ \forall a\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Do đó $f(n)=\left\{\begin{array}{ll}0 & \text{khi } n=4k\\ e & \text{khi } n=4k+1\\ 4e & \text{khi } n=4k+2\\ e & \text{khi } n=4k+3.\end{array}\right.$

- Nếu $f(n+1)=(n+1)^2e$ thì theo nguyên lí quy nạp ta có $f(n)=n^2e,\forall n\in\mathbb{N}$, suy ra $f(n)=n^2e,\forall n\in\mathbb{Z}$.

Như vậy :

$$f(n)=en^2,\ \forall n\in\mathbb{Z}\ (e\text{ là hằng số nguyên}) \quad (5)$$

$$f(n)=\left\{\begin{array}{ll}0 & \text{khi } n=2k\\ e & \text{khi } n=2k+1\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z},e\text{ là hằng số nguyên}) \quad (6)$$

$$f(n)=\left\{\begin{array}{ll}0 & \text{khi } n=4k\\ e & \text{khi } n \text{ lẻ}\\ 4e & \text{khi } n=4k+2\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z},e\text{ là hằng số nguyên}). \quad (7)$$

Thử lại :

- Giả sử f là hàm số xác định bởi (5). Với a,b,c là các số nguyên thỏa mãn $a+b+c=0$, ta có

$$f(a)^2+f(b)^2+f(c)^2=e^2\left(a^4+b^4+c^4\right) \quad (8)$$

$$2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a)=2e^2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \quad (9)$$

Mà $a+b+c=0$ nên

$$\begin{aligned}&a^4+b^4+c^4=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\\ =&\left[(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\right]^2-2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\\ =&[-2(ab+bc+ca)]^2-2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\\ =&4\left[\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+2abc(a+b+c)\right]-2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\\ =&2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right).\end{aligned}$$

Do đó, từ (8) và (9) suy ra

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

Vậy hàm số xác định bởi (5) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

• Giả sử f là hàm số xác định bởi (6) và a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $a+b+c=0$. Khi đó, trong ba số a, b, c có hai số lẻ và 1 số chẵn. Vậy

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2e^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

Do đó hàm số xác định bởi (6) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

• Giả sử f là hàm số xác định bởi (7) và a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $a+b+c=0$. Do vai trò của a, b, c trong (1) là bình đẳng và $a+b+c=0$ nên chỉ cần xét các trường hợp sau :

◦ Trường hợp a lẻ, b lẻ, $c = 4k$. Khi đó

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2e^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

◦ Trường hợp a lẻ, b lẻ, $c = 4k+2$. Khi đó

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 18e^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

Vậy hàm số xác định bởi (7) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Kết luận: các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài được xác định bởi (5), (6), (7).

Chương 5

Sử dụng dãy số để giải một số dạng phương trình hàm

5.1 Phương trình hàm dạng $\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x) + g(x) = 0$

5.1.1 Cách giải.

Xét phương trình hàm:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x) + g(x) = 0, \text{ với } f_n(x) = \underbrace{f(f(\ldots(f}_{\text{có } n \text{ chữ } f}(x))\ldots))$$

(với $f(x)$ là hàm cần tìm; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số hằng số cho trước).

- Giả sử f là hàm số thỏa đề bài. Với mỗi x thuộc tập xác định của hàm số $f(x)$, ta xây dựng dãy số (u_n) như sau:

$$u_0 = x,\ u_1 = f(u_0) = f(x),$$
$$u_2 = f(u_1) = f(f(x)), \ldots, u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

- Tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n), từ đó suy ra u_0 và $u_1 = f(x)$.
- Thử lại và kết luận.

Lưu ý. Kĩ thuật xét dãy số như thế này đã được sử dụng trong mục 4.2.1: Áp dụng một số tính chất của dãy số (ở trang 464).

5.1.2 Các bài toán.

Bài toán 5.1. *Tìm tất cả các hàm số $f : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ thỏa mãn*

$$f(x) + f(f(x)) = 2x, \forall x \geq 0. \quad (1)$$

Giải. Với mỗi $x \in [0;+\infty)$ ta xây dựng dãy số $(u_n)_n$ như sau:

$$u_0 = x, u_1 = f(u_0) = f(x), u_2 = f(u_1), \ldots, u_{n+1} = f(u_n), \ldots$$

Do $u_n = f(u_{n-1}) \in [0;+\infty)$ nên $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Trong (1) lấy $x = u_n$ được

$$u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0, \forall n = 0, 1, 2, \ldots$$

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ có hai nghiệm là 1 và -2. Do đó

$$u_n = \alpha + \beta(-2)^n, \forall n = 0, 1, 2, \ldots$$

Cách 1. Ta có

$$0 \leq u_{2n} \Rightarrow 0 \leq \alpha + \beta.2^{2n} \Rightarrow \beta \geq -\alpha.\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$0 \leq u_{2n+1} \Rightarrow 0 \leq \alpha - \beta.2^{2n+1} \Rightarrow \beta \leq \alpha.\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}.$$

$$\Rightarrow -\alpha.\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \leq \beta \leq \alpha.\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}, \forall n = 0, 1, 2, \ldots \quad (2)$$

Từ (2) cho $n \to +\infty$ và sử dụng nguyên lí kẹp ta được $\beta = 0$. Vậy:

$$\begin{cases} u_0 \equiv \alpha \equiv x \\ u_1 \equiv \alpha \equiv x \end{cases} \Rightarrow f(x) = x.$$

Do x lấy tùy ý trong $[0;+\infty)$ nên:

$$f(x) = x, \ \forall x \in [0;+\infty).$$

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x) = x, \forall x \geq 0.$$

Cách 2. Do $u_0 = x, u_1 = f(x)$ nên

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ f(x) = \alpha - 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha;\beta) = \left(\frac{2x + f(x)}{3}; \frac{x - f(x)}{3}\right).$$

Do đó

$$u_n = \frac{2x + f(x)}{3} + \frac{x - f(x)}{3}(-2)^n, \ \forall n = 0, 1, 2, \ldots \quad (3)$$

- Nếu $x - f(x) > 0$ thì từ (3) ta có $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n+1} = -\infty$, suy ra tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $u_{2n+1} < 0$, mâu thuẫn.
- Nếu $x - f(x) < 0$ thì từ (3) ta có $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n} = -\infty$, suy ra tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $u_{2n} < 0$, mâu thuẫn.

Vậy $\beta = 0$ hay $f(x) - x = 0$. Do x lấy tùy ý trong $[0;+\infty)$ nên:

$$f(x) = x, \ \forall x \in [0;+\infty).$$

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x) = x, \forall x \geq 0.$$

Bài toán 5.2 (Dự tuyển IMO 1992). *Cho a, b là hai số thực dương. Tìm tất cả các hàm số $f : [0;+\infty) \to [0;+\infty)$. sao cho:*

$$f(f(x)) + af(x) = b(a+b)x, \forall x \in [0;+\infty). \quad (1)$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa đề bài, khi đó ta có (1). Với mọi $x \in [0;+\infty)$, ta cố định x và xây dựng dãy (u_n) như sau:

$$u_0 = x, \ u_1 = f(u_0) = f(x), u_2 = f(u_1) = f(f(x)), \ldots, u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Từ (1) thay x bởi $u_n \in [0;+\infty)$ ta được:

$$u_{n+2} + au_{n+1} - b(a+b)u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Phương trình đặc trưng của dãy số $\{u_n\}$ là $\lambda^2 + a\lambda - b(a+b) = 0$. Phương trình này có hai nghiệm là b và $-(a+b)$, do đó

$$u_n = \alpha.b^n + \beta\left[-(a+b)\right]^n, \forall n = 0, 1, 2, \ldots \ (\beta \text{ là hằng số sẽ tìm sau}).$$

Ta có $u_n = f(u_{n-1}) \in [0;+\infty)$. Vậy $u_n \geq 0, \forall n = 0, 1, 2, \ldots$ Ta có

$$0 \leq u_{2n} \Rightarrow \beta \geq -\left(\frac{b}{a+b}\right)^{2n} \alpha$$

$$0 \leq u_{2n+1} \Rightarrow \beta \leq \left(\frac{b}{a+b}\right)^{2n+1} \alpha.$$

Hơn nữa $0 < \dfrac{b}{a+b} < 1$ nên từ

$$-\left(\frac{b}{a+b}\right)^{2n} \alpha \leq \beta \leq \left(\frac{b}{a+b}\right)^{2n+1} \alpha, \forall n = 0, 1, 2, \ldots$$

cho $n \to +\infty$ và sử dụng nguyên lý kẹp ta được $\beta = 0$. Vậy $u_n = \alpha b^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Từ đây ta có:

$$\begin{cases} u_0 = \alpha = x \\ u_1 = \alpha b \end{cases} \Rightarrow f(x) = bx.$$

Thử lại thấy hàm số $f(x) = bx, \forall x \in [0;+\infty)$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 5.3. *Tìm tất cả các hàm số* $f:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$ *thỏa mãn*

$$f(f(x))+4f(x)-21x=2009,\forall x\in[0;+\infty) \quad (1)$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa đề bài, khi đó ta có (1). Với mọi $x\in[0;+\infty)$, ta cố định x và xây dựng dãy (u_n) như sau:

$$u_0=x,\ u_1=f(u_0)=f(x),u_2=f(u_1)=f(f(x))\ldots,u_{n+1}=f(u_n),\forall n\in\mathbb{N}.$$

Từ (1) thay x bởi $u_n\in[0;+\infty)$ ta được:

$$u_{n+2}+4u_{n+1}-21u_n=2009,\forall n=0,1,2,\ldots$$

Phương trình đặc trưng $\lambda^2+4\lambda-21=0$ có các nghiệm là 3 và -7 do đó:

$$u_n=\alpha.3^n+\beta(-7)^n+a,\forall n=0,1,2,\ldots$$

với β là hằng số sẽ tìm sau, còn số a thỏa mãn phương trình

$$a+4a-21a=2009\Leftrightarrow a=-\frac{2009}{16}$$

$$\Rightarrow u_n=\alpha.3^n+\beta(-7)^n-\frac{2009}{16},\forall n=0,1,\ldots$$

Vì $u_n=f(u_{n-1})\in[0;+\infty)$ nên $u_n\geq 0,\forall n\in\mathbb{N}$. Do đó với mọi $n\in\mathbb{N}$ ta có

$$0\leq u_{2n}\Rightarrow 0\leq\alpha.3^{2n}+\beta7^{2n}-\frac{2009}{16}\Rightarrow\beta\geq-\alpha\left(\frac{3}{7}\right)^{2n}+\frac{2009}{16.7^{2n}}.$$

$$0\leq u_{2n+1}\Rightarrow 0\leq\alpha.3^{2n+1}-\beta7^{2n+1}-\frac{2009}{16}\Rightarrow\beta\leq\alpha\left(\frac{3}{7}\right)^{2n+1}-\frac{2009}{16.7^{2n+1}}.$$

Bởi vậy

$$-\alpha\left(\frac{3}{7}\right)^{2n}+\frac{2009}{16.7^{2n}}\leq\beta\leq\alpha\left(\frac{3}{7}\right)^{2n+1}-\frac{2009}{16.7^{2n+1}},\forall n=0,1,2,\ldots$$

Từ đây cho $n\to+\infty$ và sử dụng nguyên lý kẹp ta được $\beta=0$. Vậy

$$u_n=\alpha.3^n-\frac{2009}{16},\forall n=0,1,2,\ldots$$

Do đó ta có

$$u_0=\alpha-\frac{2009}{16}=x,\ u_1=f(x)=3\alpha-\frac{2009}{16}=3\left(x+\frac{2009}{16}\right)-\frac{2009}{16}.$$

Vì x lấy bất kì trong tập xác định của hàm số f nên

$$f(x)=3x+\frac{2009}{8},\forall x\in[0;+\infty).$$

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x)=3x+\frac{2009}{8},\forall x\in[0;+\infty).$$

Bài toán 5.4. *Tìm tất cả các hàm số* $f:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$ *thỏa mãn*

$$f(f(x)+3)+2f(x)-35x=15,\ \forall x\in[0;+\infty). \quad (1)$$

Hướng dẫn. Đặt $f(x)+3=g(x)$ thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&f(g(x))+2[g(x)-3]-35x=15\\ \Leftrightarrow&g(g(x))-3+2[g(x)-3]-35x=15\\ \Leftrightarrow&g(g(x))+2g(x)-35x=24.\end{aligned}$$

Bài toán 5.5. *Tìm tất cả các hàm số* $f:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$ *thỏa mãn*

$$f(f(f(x)))+4f(f(x))-3f(x)-18x=0,\forall x\in[0;+\infty) \quad (1)$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa đề bài, khi đó ta có (1). Với mọi $x\in[0;+\infty)$, ta cố định x và xây dựng dãy (u_n) như sau:

$$u_0=x,\ u_1=f(u_0)=f(x),u_2=f(u_1)=f(f(x)),\ldots,u_{n+1}=f(u_n),\forall n\in\mathbb{N}.$$

Từ (1) thay x bởi $u_n\in[0;+\infty)$ ta được:

$$u_{n+3}+4u_{n+2}-3u_{n+1}-18u_n=0,\forall n=0,1,2,\ldots$$

Phương trình $\lambda^3+4\lambda^2-3\lambda-18=0$ có nghiệm $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=-3$, do đó

$$u_n=\alpha.2^n+(\beta n+\gamma)(-3)^n,\forall n=0,1,2,\ldots$$

Vì $u_n=f(u_{n-1})\in[0;+\infty)$, nên $u_n\geq 0,\forall n\in\mathbb{N}$. Do đó với mọi $n\in\mathbb{N}$ ta có

$$0\leq u_{2n}\Rightarrow 0\leq\alpha.2^{2n}+(2\beta n+\gamma)3^{2n}\Rightarrow 2\beta n3^{2n}\geq-\alpha.2^{2n}-\gamma3^{2n}$$

$$\Rightarrow\beta\geq-\left[\alpha\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}.\frac{1}{2n}+\gamma.\frac{1}{2n}\right]\overset{n\to+\infty}{\Rightarrow}\beta\geq 0.$$

Do $0\leq u_{2n+1}$ nên

$$0\leq\alpha.2^{2n+1}-(2\beta n+\gamma+\beta)3^{2n+1}\Rightarrow(2\beta n+\gamma)3^{2n+1}\leq\alpha.2^{2n+1}-\beta.3^{2n+1}$$

$$\Rightarrow 2\beta n+\gamma\leq\alpha.\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}-\beta\Rightarrow\beta\leq\left[\alpha\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}.\frac{1}{2n}-\beta.\frac{1}{2n}-\gamma.\frac{1}{2n}\right]. \quad (2)$$

Từ (2) cho $n\to+\infty$ ta được $\beta\leq 0$. Suy ra $\beta=0$. Do đó

$$u_n=\alpha.2^n+\gamma(-3)^n=2^n\left[\alpha+\gamma\left(-\frac{3}{2}\right)^n\right],\forall n=0,1,2,\ldots. \quad (3)$$

• Nếu $\gamma > 0$ thì do $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{3}{2}\right)^{2n+1} = -\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{2n+1} = -\infty$ nên từ (3) suy ra $u_n < 0$ với n lẻ và đủ lớn, đến đây ta gặp mâu thuẫn.

• Nếu $\gamma < 0$ thì do $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{3}{2}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{2n} = +\infty$ nên từ (3) suy ra $u_n < 0$ với n chẵn và đủ lớn, đến đây ta gặp mâu thuẫn.

• Vậy $\gamma = 0$ và $u_n = \alpha.2^n, \forall n = 0, 1, 2, \ldots$. Do $x = u_0 = \alpha$ và $f(x) = u_1 = 2\alpha$ nên $f(x) = 2x$. Do x lấy tùy ý trong $[0; +\infty)$ nên $f(x) = 2x$, $\forall x \in [0; +\infty)$. Thử lại đúng.

Lưu ý. Ta có thể chứng minh $\beta = 0$ tương tự như chứng minh $\gamma = 0$ như sau: Ta có

$$u_n = 2^n\left[\alpha + (\beta n + \gamma)\left(-\frac{3}{2}\right)^n\right], \forall n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

• Nếu $\beta > 0$ thì từ (4) suy ra $u_n < 0$ với n lẻ và đủ lớn.

• Nếu $\beta < 0$ thì từ (4) suy ra $u_n < 0$ với n chẵn và đủ lớn.

• Vậy $\beta = 0$.

Bài toán 5.6. *Tìm các hàm số $f : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ thỏa mãn*

$$f(f(x)) + f(x) = \left(26^{3^{2008}} + \left(26^{3^{2008}}\right)^2\right)x.$$

Hướng dẫn giải. Đặt $a = 26^{3^{2008}}$, ta thu được $f(x) = 26^{3^{2008}}x, \forall x \in [0; +\infty)$.

Bài toán 5.7. *Tìm tất cả các hàm số $f : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ thỏa mãn*

$$f(f(x) - x) = 2x, \ \forall x \geq 0. \tag{1}$$

Giải. Từ tập xác định của hàm f suy ra $f(x) \geq x, \forall x \geq 0$. Đặt:

$$g(x) = f(x) - x, \ \forall x \in [0; +\infty).$$

Kết hợp với (1) ta được:

$$g(g(x)) = f(g(x)) - g(x) = f(f(x) - x) - g(x) = 2x - g(x).$$

Như vậy hàm số $g : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ thỏa mãn:

$$g(x) + g(g(x)) = 2x, \forall x \geq 0. \tag{2}$$

Từ (2), sử dụng kết quả bài toán 5.1 ở trang 515, ta được:

$$g(x) = x, \ \forall x \in [0; +\infty).$$

Do đó: $f(x) = 2x, \forall x \in [0; +\infty)$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 5.8. *Tìm tất cả các hàm số $f : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ thỏa mãn*

$$f(xf(y)) + f(yf(x)) = 2xy, \forall x, y \in [0; +\infty). \tag{1}$$

Giải. Trong (1) cho $x = y = 0$ được $f(0) = 0$. Trong (1) cho $x = y \geq 0$ được

$$f(xf(x)) = x^2, \forall x \geq 0. \tag{2}$$

Ta sẽ chứng minh f là đơn ánh. Giả sử $f(x_1) = f(x_2)$. Khi đó

$$\begin{cases} f(x_1 f(x_1)) = f(x_1 f(x_2)) \\ f(x_2 f(x_2)) = f(x_2 f(x_1)) \end{cases} \overset{\text{theo}(2)}{\Rightarrow} \begin{cases} x_1^2 = f(x_1 f(x_2)) \\ x_2^2 = f(x_2 f(x_1)) \end{cases}$$

Cộng lại và sử dụng (1) ta được $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Vậy f là đơn ánh, suy ra $f(1) \neq f(0)$, hay $f(1) \neq 0$. Trong (2) cho $x = 1$ ta được

$$f(f(1)) = 1 \Rightarrow f(1).f(f(1)) = f(1).$$

Suy ra

$$f(f(1).f(f(1))) = f(f(1)) \overset{\text{theo}(2)}{\Rightarrow} [f(1)]^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(1) = -1 \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Vậy $f(1) = 1$. Trong (1) lấy $y = 1$ ta được

$$f(x) + f(f(x)) = 2x, \forall x \geq 0. \tag{3}$$

Theo bài toán 5.1 ở trang 515, ta được $f(x) = x$, $\forall x \in [0; +\infty)$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là $f(x) = x, \forall x \geq 0$.

Bài toán 5.9 (Đề thi chọn đội tuyển Singapore năm học 2001-2002). *Tìm tất cả các hàm $f : [0; 1) \to [0; 3)$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(f(x)) + f(x) = 12x, \forall x \geq 0. \tag{1}$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa đề bài, khi đó ta có (1). Với mọi $x \in [0; 1)$, ta cố định x và xây dựng dãy (u_n) như sau:

$$u_0 = x, \ u_1 = f(u_0) = f(x), u_2 = f(u_1) = f(f(x)), \ldots, u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Từ (1) thay x bởi $u_n \in [0; 1)$ ta được: $u_{n+2} + u_{n+1} - 12u_n = 0, \forall n = 0, 1, 2, \ldots$ Phương trình đặc trưng của dãy số $\{u_n\}$ là

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{3, -4\}.$$

Do đó: $u_n = \alpha.3^n + \beta(-4)^n, \forall n = 0, 1, 2, \ldots$ với β là hằng số sẽ tìm sau. Ta có

$$u_n = f(u_{n-1}) \in [0; 1).$$

Do đó với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$ ta có

$$0 \le u_{2n} \Rightarrow 0 \le \alpha.3^{2n} + \beta 4^{2n} \Rightarrow \beta \ge -\alpha\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}.$$

$$0 \le u_{2n+1} \Rightarrow 0 \le \alpha.3^{2n+1} - \beta 4^{2n+1} \Rightarrow \beta \le \alpha\left(\frac{3}{4}\right)^{2n+1}.$$

Bởi vậy $-\alpha\left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \le \beta \le \alpha\left(\frac{3}{4}\right)^{2n+1}, \forall n = 0, 1, 2, \ldots$ Từ đây cho $n \to +\infty$ và sử dụng nguyên lý kẹp ta được $\beta = 0$. Vậy $u_n = \alpha.3^n, \forall n = 0, 1, 2, \ldots$ Do đó ta có

$$u_0 = \alpha = x,\ u_1 = f(x) = 3\alpha = 3x.$$

Vì x lấy bất kì trong $[0; +\infty)$ nên $f(x) = 3x, \forall x \in [0; +\infty)$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x) = 3x, \forall x \in [0; 1).$$

5.1.3 Xây dựng dãy số thông qua hàm ngược.

Bài toán 5.10 (Đề thi HSG Quốc gia - 2012). *Tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

(1) *f là toàn ánh từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$;*

(2) *f là hàm số tăng trên $\mathbb{R}$;*

(3) *$f(f(x)) = f(x) + 12x$ với mọi số thực x.*

Giải. Nếu $f(x) = f(y)$ thì $f(f(x)) = f((f(y))$ nên từ (3) suy ra $12x = 12y$, do đó $x = y$. Vậy f là đơn ánh. Kết hợp với (1) ta có f là song ánh. Gọi f^{-1} là hàm ngược của f thì do (2) nên f^{-1} cũng là hàm tăng. Thay $x = 0$ vào (3) ta được $f(f(0)) = f(0)$. Do f là song ánh nên từ đây suy ra $f(0) = 0$. Lấy f^{-1} hai vế ta suy ra $f^{-1}(0) = 0$. Đặt $f_{-n}(x) = f^{-1}(f^{-1}...(f^{-1}(x)))$, n lần, dễ thấy f_{-n} là hàm tăng và $f_{-n}(0) = 0$. Xét dãy (a_n) với

$$a_0 = f(x), a_1 = x, a_n = f^{-1}(a_{n-1}) \text{ (với } n = 2, 3, \ldots).$$

Thay x bởi $f^{-1}(a_{n-1})$ vào (3), ta được $a_{n-2} = a_{n-1} + 12a_n$. Giải phương trình sai phân này, ta tìm được

$$f_{-n}(x) = f^{-1}(a_n) = a_{n+1} = \frac{4x - f(x)}{7}(-3)^{-n} + \frac{3x + f(x)}{7}4^{-n}.$$

Xét với $x > 0$, cố định. Khi đó $f_{-n}(x) > 0$ với mọi n (do f_{-n} là hàm tăng), $3x + f(x) > 0$. Cho $n = 2k$, $n = 2k + 1$, ta thu được

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-2k-1} > \frac{4x - f(x)}{3x + f(x)}, \left(\frac{4}{3}\right)^{-2k} > \frac{f(x) - 4x}{3x + f(x)}.$$

Cho $k \to +\infty$ ta thu được $4x \le f(x) \le 4x$, suy ra $f(x) = 4x$. Từ đó $f(x) = 4x$ với mọi $x > 0$. Với $x < 0$, cố định. Khi đó $f_{-n}(x) < 0$ với mọi n, $3x + f(x) < 0$. Hoàn toàn tương tự ta cũng suy ra $f(x) = 4x$ với mọi $x < 0$. Kết hợp các trường hợp ta được $f(x) = 4x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại ta thấy hàm này thỏa mãn phương trình hàm ban đầu. Vậy $f(x) \equiv 4x$ là hàm duy nhất thỏa mãn các yêu cầu bài toán.

Lưu ý. Vấn đề ở bài toán VMO 2012 là hàm số f xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$, phương trình đặc trưng $x^2 - x - 12 = 0$ có nghiệm -3 và 4 (nghiệm âm có trị tuyệt đối bé hơn nghiệm dương, các bài toán trước thì nghiệm âm có trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương), do đó nếu làm bằng phương pháp tương tự thì khi $n \to +\infty$ không suy ra được kết quả mong muốn. Vì thế ta phải cho $n \to -\infty$ và vì vậy cần dùng đến f^{-1}. Đó là điểm khác biệt căn bản và cũng là ý mới của bài VMO 2012.

Bài toán 5.11 (Brazilian MO, 2012). *Tìm tất cả các toàn ánh*

$$f : (0 : +\infty) \to (0 : +\infty)$$

thỏa mãn $2x.f(f(x)) = f(x)(x + f(f(x))),\ \forall x > 0.$ (1)

Giải. Ta có (1) tương đương với

$$2xf(f(x)) = xf(x) + f(x)f(f(x)),\ \forall x > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{f(x)} = \frac{1}{f(f(x))} + \frac{1}{x},\ \forall x > 0. \quad (2)$$

Nếu tồn tại $x > 0$ và $y > 0$ sao cho $f(x) = f(y)$ thì $f(f(x)) = f(f(y))$. Từ (2) ta có

$$\frac{1}{f(f(x))} + \frac{1}{x} = \frac{2}{f(x)} = \frac{2}{f(y)} = \frac{1}{f(f(y))} + \frac{1}{y} \Rightarrow x = y.$$

Vậy f là đơn ánh, suy ra f là song ánh, do đó tồn tại hàm số ngược f^{-1}. Với mọi $x \in (0; +\infty)$, ta cố định x và xây dựng dãy (u_n) như sau:

$$u_0 = \frac{1}{x}, u_1 = \frac{1}{f(u_0)}, \ldots, u_{n+1} = \frac{1}{f(u_n)}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Trong (1), thay x bởi $u_n = f(u_{n-1}) > 0$, ta được

$$2u_{n+1} = u_{n+2} + u_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Như vậy dãy số (u_n) là cấp số cộng có công sai $d = u_1 - u_0 = \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{x}$. Do đó

$$u_n = u_1 + (n-1)d = \frac{1}{f(x)} + (n-1)\left[\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{x}\right], \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

• Nếu $\frac{1}{f(x)} < \frac{1}{x}$ thì từ (3) suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, do đó tồn tại n đủ lớn sao cho $u_n < 0$, mâu thuẫn với giả thiết $f : (0 : +\infty) \to (0 : +\infty)$.

• Nếu $\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{x}$ thì ta xây dựng dãy số (a_n) như sau :

$$a_0 = \frac{1}{f(x)},\ a_1 = \frac{1}{x},\ a_{n+1} = \frac{1}{f^{-1}(a_n)},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Trong (2) thay x bởi $f^{-1}(a_{n+1})$ ta được $a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$. Tương tự như trên ta thu được

$$a_n = a_1 + (n-1)(a_1 - a_0) = \frac{1}{x} + (n-1)\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{f(x)}\right],\ \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Từ (4) và do $\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{x}$ nên ta suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, dẫn tới tồn tại n đủ lớn sao cho $a_n < 0$, mâu thuẫn với $f^{-1} : (0 : +\infty) \to (0 : +\infty)$.
Cả hai trường hợp đều dẫn tới mâu thuẫn. Vậy ta phải có

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = x.$$

Do ta lấy x tùy ý trong $(0; +\infty)$ nên suy ra $f(x) = x,\ \forall x \in (0; +\infty)$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 5.12. *Tìm các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(f(x)) = f(x) + 2x,\ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Nếu $f(x) = f(y)$ thì $f(f(x)) = f((f(y))$ nên từ (1) suy ra $2x = 2y$ hay $x = y$, do đó f là đơn ánh. Kết hợp với giả thiết f liên tục suy ra f là hàm đơn điệu thực sự trên $\mathbb{R}$. Từ (1) lấy $x = 0$ được $f(f(0)) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0$.
Trường hợp 1: f là hàm tăng thực sự trên $\mathbb{R}$. Ta chứng minh f là toàn ánh. Giả sử $a \in \mathbb{R}$. Nếu $f(x) \neq a,\ \forall x \in \mathbb{R}$ thì do f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x) > a,\ \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) < a,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Nếu $f(x) > a,\ \forall x \in \mathbb{R}$ thì

$$\begin{aligned}
&f(f(x)) > f(a) > a \Rightarrow f(x) = f(f(x)) - 2x > a - 2x\\
&\Rightarrow f(x) > a - 2x,\ \forall x \in \mathbb{R}\\
&\Rightarrow f(-n) > a + 2n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\\
&\Rightarrow 0 = f(0) > f(-n) > a + 2n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*
\end{aligned}$$

Mà $0 > a + 2n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ là điều vô lí nên không thể có $f(x) > a,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Nếu $f(x) < a,\ \forall x \in \mathbb{R}$ thì

$$f(f(x)) < f(a) < a \Rightarrow f(x) = f(f(x)) - 2x < a - 2x$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow f(x) < a - 2x,\ \forall x \in \mathbb{R}\\
&\Rightarrow 0 = f(0) < f(n) < a - 2n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*
\end{aligned}$$

Mà $0 < a - 2n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ là điều vô lí nên không thể có $f(x) < a,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Vậy tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) = a$, hay f là toàn ánh, suy ra f là song ánh, do đó tồn tại hàm số ngược f^{-1}. Do f là hàm tăng nên f^{-1} cũng là hàm tăng. Ta có

$$f(0) = 0 \Rightarrow f^{-1}(f(0)) = f^{-1}(0) \Rightarrow 0 = f^{-1}(0).$$

Từ (1) thay x bởi $f^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)$ ta được

$$\begin{aligned}
&f\left(f\left(f^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)\right)\right) = f\left(f^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)\right) + 2f^{-1}\left(f^{-1}(x)\right),\ \forall x \in \mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow x = f^{-1}(x) + 2f^{-1}\left(f^{-1}(x)\right),\ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)
\end{aligned}$$

Với $x > 0$ ta có $f^{-1}(x) > f^{-1}(0) = 0$ và với $x < 0$ ta có $f^{-1}(x) < f^{-1}(0) = 0$.
Với mỗi $x > 0$, ta xây dựng dãy số (u_n) như sau:

$$u_0 = x,\ u_1 = f^{-1}(x),\ u_2 = f^{-1}\left(f^{-1}(x)\right) = f^{-1}(u_1),\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n).$$

Dễ thấy rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $u_n > 0$. Từ (2) lấy $x = u_n$ ta được

$$2u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = 0,\ \forall n = 0, 1, 2, \ldots$$

Phương trình đặc trưng của dãy số (u_n) là

$$2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}.$$

Vậy $u_n = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2(-1)^n,\ \forall n = 0, 1, 2, \ldots$ Do $u_0 = x,\ u_1 = f^{-1}(x)$ nên

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x \\ \frac{1}{2}c_1 - c_2 = u_1 = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{2x + 2f^{-1}(x)}{3} \\ c_2 = \dfrac{x - 2f^{-1}(x)}{3}. \end{cases}$$

Như thế $u_n = \dfrac{2x + 2f^{-1}(x)}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \dfrac{x - 2f^{-1}(x)}{3}(-1)^n,\ \forall n = 0, 1, 2, \ldots$ (3)

• Nếu $x - 2f^{-1}(x) < 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \dfrac{x - 2f^{-1}(x)}{3} < 0$, suy ra tồn tại n sao cho $u_{2n} < 0$, mâu thuẫn.

• Nếu $x - 2f^{-1}(x) > 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -\dfrac{x - 2f^{-1}(x)}{3} < 0$, suy ra tồn tại n sao cho $u_{2n+1} < 0$, mâu thuẫn.

Vậy $x+2f^{-1}(x)>0,\ \forall x>0$ hay $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{2},\ \forall x>0$ hay $f(x)=2x,\ \forall x>0$.
Tương tự ta chứng minh được $f(x)=2x,\ \forall x<0$. Vậy $f(x)=2x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Thử lại thấy thỏa mãn.
Trường hợp 2: f là hàm giảm thực sự trên $\mathbb{R}$. Với $x>0$ ta có $f(x)<0$, với $x<0$ ta có $f(x)>0$. Với mỗi $x\neq 0$, ta xây dựng dãy số (v_n) như sau:

$$v_0=x,\ v_1=f(x),\ v_2=f\left(f(x)\right)=f(v_1),\ v_{n+1}=f(v_n).$$

Từ (1) lấy $x=v_n$ ta được

$$v_{n+2}-v_{n+1}-2v_n=0,\ \forall n=0,1,2,\ldots$$

Phương trình đặc trưng của dãy số (v_n) là

$$t^2-t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=2\end{array}\right.\Rightarrow v_n=c_1(-1)^n+c_2 2^n,\ \forall n=0,1,2,\ldots$$

Do $v_0=x,\ v_1=f(x)$ nên

$$\left\{\begin{array}{l}c_1+c_2=x\\c_1-2c_2=-f(x)\end{array}\right.\Leftrightarrow(c_1;c_2)=\left(\frac{2x-f(x)}{3};\frac{x+f(x)}{3}\right)$$

$$\Rightarrow v_n=\frac{[2x-f(x)](-1)^n+[x+f(x)]2^n}{3},\ \forall n=0,1,2,\ldots$$

Do f giảm thực sự nên $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\dfrac{f(v_n)}{v_n}=\dfrac{f(v_n)-f(0)}{v_n-0}<0,\ \forall n=0,1,2,\ldots$
Nếu $x+f(x)\neq 0$ thì

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{[f(x)-2x](-1)^n+2[x+f(x)]2^n}{[2x-f(x)](-1)^n+[x+f(x)]2^n}=2>0,$$

do đó với số tự nhiên n đủ lớn, ta có $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}>0$, đến đây ta gặp mâu thuẫn.
Như vậy:

$$f(x)=-x,\ \forall x\neq 0.$$

Kết hợp với $f(0)=0$ được $f(x)=-x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.
Các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x)=2x,\ \forall x\in\mathbb{R}\ ;f(x)=-x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 5.13. *Tìm các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f\left(f(x)\right)=f(x)+x,\ \forall x\in\mathbb{R}.\qquad(1)$$

Giải. Nếu $f(x)=f(y)$ thì $f(f(x))=f((f(y))$ nên từ (1) suy ra $x=y$, do đó f là đơn ánh. Kết hợp với giả thiết f liên tục suy ra f là hàm đơn điệu thực

sự trên $\mathbb{R}$. Từ (1) lấy $x=0$ được $f\left(f(0)\right)=f(0)\Rightarrow f(0)=0$.
• Trường hợp 1: f là hàm giảm. Lấy $x\in\mathbb{R}^*$ bất kì. Ta cố định x và xây dựng dãy số (a_n) như sau:

$$a_0=x,\ a_{n+1}=f(a_n),\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Từ (1) thay x bởi a_n ta được

$$a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Phương trình đặc trưng $r^2-r-1=0$ có 2 nghiệm $r_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ r_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Do đó $a_n=Ar_1^n+Br_2^n,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Từ $a_0=x$ và $a_1=f(x)$ ta có hệ

$$\left\{\begin{array}{l}A+B=x\\r_1A+r_2B=f(x)\end{array}\right.\Leftrightarrow(A;B)=\left(\frac{f(x)-r_2x}{r_1-r_2};\frac{r_1x-f(x)}{r_1-r_2}\right).$$

Vì thế

$$a_n=\frac{[f(x)-r_2x]\,r_1^n-[f(x)-r_1x]\,r_2^n}{r_1-r_2},\ \forall n\in\mathbb{N}.\qquad(2)$$

Do f đơn điệu thực sự nên $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ có dấu không đổi, dẫn tới $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ có dấu không đổi với mọi n. Vì thế $\dfrac{[f(x)-r_2x]\,r_1^{n+1}-[f(x)-r_1x]\,r_2^{n+1}}{[f(x)-r_2x]\,r_1^n-[f(x)-r_1x]\,r_2^n}$ có dấu không đổi với mọi n. Nếu $f(x)-r_1x\neq 0$ thì

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{[f(x)-r_2x]\,r_1^{n+1}-[f(x)-r_1x]\,r_2^{n+1}}{[f(x)-r_2x]\,r_1^n-[f(x)-r_1x]\,r_2^n}\right)=r_2>0,$$

do đó với số tự nhiên n đủ lớn, ta có $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>0$, suy ra $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$,
đặc biệt $\dfrac{a_1}{a_0}>0$, dẫn tới $\dfrac{f(x)}{x}>0$, điều này mâu thuẫn với f là hàm giảm.
Vậy

$$f(x)=r_1x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}x,\ \forall x\neq 0.$$

Kết hợp với $f(0)=0$ được $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.
• Trường hợp 2: f là hàm tăng. Tương tự như bài toán 5.12 ta chứng minh được f là song ánh nên tồn tại hàm ngược f^{-1}. Trường hợp này ta có thể trình bày giống hệt như ở bài toán 5.12 hoặc là trình bày như sau: Đặt $f_{-n}(x)=f^{-1}(f^{-1}\ldots(f^{-1}(x)))$, n lần, ta có $f_{-n}(0)=0$. Xét dãy (a_n) với

$$a_0=f(x),a_1=x,a_n=f^{-1}(a_{n-1})\ (\text{với } n=2,3,\ldots).$$

Thay x bởi $f^{-1}(a_{n-1})$ vào (1), ta được $a_{n-2} = a_{n-1} + a_n$. Phương trình đặc trưng $\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ của dãy số (a_n) có hai nghiệm $\lambda_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Do đó $a_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$. Vì $a_0 = f(x), a_1 = x$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} A + B = f(x) \\ \lambda_1 A + \lambda_2 B = x \end{cases} \Leftrightarrow (A;B) = \left(\frac{x - \lambda_2 f(x)}{\lambda_1 - \lambda_2}; \frac{\lambda_1 f(x) - x}{\lambda_1 - \lambda_2}\right).$$

Đặt $r_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, r_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Khi đó $\lambda_1 r_1 = 1,\ \lambda_2 r_2 = 1$. Ta có

$$f_{-n}(x) = f^{-1}(a_n) = a_{n+1} = \frac{x - \lambda_2 f(x)}{\lambda_1 - \lambda_2} r_1^{-n-1} + \frac{\lambda_1 f(x) - x}{\lambda_1 - \lambda_2} r_2^{-n-1}.$$

Vì $x = f\left(f^{-1}(x)\right) = f^{-1}\left(f(x)\right),\ \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$$x > y \Rightarrow f\left(f^{-1}(x)\right) > f\left(f^{-1}(y)\right) \Rightarrow f^{-1}(x) > f^{-1}(y).$$

Suy ra f^{-1} là hàm tăng, dẫn tới f_{-n} là hàm tăng. Xét với $x > 0$, cố định. Khi đó $f(x) > 0$, $f_{-n}(x) > 0$ với mọi n (do f, f_{-n} là những hàm tăng). Do đó

$$\begin{aligned} &\frac{x - \lambda_2 f(x)}{\lambda_1 - \lambda_2} r_1^{-n-1} + \frac{\lambda_1 f(x) - x}{\lambda_1 - \lambda_2} r_2^{-n-1} > 0 \\ &\Rightarrow [x - \lambda_2 f(x)]\, r_1^{-n-1} + [\lambda_1 f(x) - x]\, r_2^{-n-1} < 0 \\ &\Rightarrow [\lambda_1 f(x) - x]\, r_2^{-n-1} < [\lambda_2 f(x) - x]\, r_1^{-n-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Từ (2) lấy $n = 2k$ ta được

$$\begin{aligned} &[\lambda_1 f(x) - x]\, r_2^{-2k-1} < [\lambda_2 f(x) - x]\, r_1^{-2k-1} \\ \Rightarrow &\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{-2k-1} < \frac{\lambda_2 f(x) - x}{\lambda_1 f(x) - x} \ \left(\text{do } \lambda_1 f(x) - x < 0,\ r_1^{-2k-1} < 0\right). \end{aligned}$$

Từ (2) lấy $n = 2k - 1$ ta được

$$\begin{aligned} &[\lambda_1 f(x) - x]\, r_2^{-2k} < [\lambda_2 f(x) - x]\, r_1^{-2k} \\ \Rightarrow &\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{-2k} > \frac{\lambda_2 f(x) - x}{\lambda_1 f(x) - x} \ \left(\text{do } \lambda_1 f(x) - x < 0,\ r_1^{-2k} > 0\right). \end{aligned}$$

Như vậy ta có

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{-2k-1} < \frac{\lambda_2 f(x) - x}{\lambda_1 f(x) - x} < \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{-2k},\ \forall k = 1, 2, \ldots$$

Từ đây cho $k \to +\infty$ ta được

$$\lambda_2 f(x) - x = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{\lambda_2} \Rightarrow f(x) = r_2 x \Rightarrow f(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} x,\ \forall x > 0.$$

Lưu ý. Từ điều kiện $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là toàn ánh và tăng nghiêm ngặt trên $\mathbb{R}$, ta có thể chỉ ra f là hàm liên tục. Do đó bài toán 5.10 sẽ được giải tương tự như bài toán 5.12, 5.13. Sau đây ta sẽ đưa ra cách chứng minh kết quả vừa nói ở trên dưới dạng một bổ đề như sau:

Bổ đề. *Nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là toàn ánh và là hàm số tăng nghiêm ngặt trên $\mathbb{R}$ thì f là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.*

Chứng minh. Với mỗi dãy số (x_n) sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, ta cần chứng minh:

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a).$$

Đặt $u_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, $v_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Khi đó ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ lần lượt là giới hạn trên và giới hạn dưới của dãy số (x_n), suy ra:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = a.$$

Dễ thấy (u_n) là dãy giảm, (v_n) là dãy tăng và: $v_n \le x_n \le u_n,\ \forall n = 1, 2, \ldots$
Do f là hàm số tăng nên: $f(v_n) \le f(x_n) \le f(u_n),\ \forall n = 1, 2, \ldots$ (1)
Do (u_n) là dãy giảm và bị chặn dưới (bởi v_1) và f là hàm tăng nghiêm ngặt nên dãy $(f(u_n))$ dãy giảm và bị chặn dưới (bởi $f(v_1)$), do đó dãy $(f(u_n))$ hội tụ: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = b$. Mặt khác do f là toàn ánh nên $\exists z \in \mathbb{R} : f(z) = b$. Từ đó ta được:

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(z),\ f(u_n) \ge f(z) \Rightarrow u_n \ge z,\ \forall n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Do (v_n) là dãy tăng và bị chặn trên (bởi u_1) và f là hàm tăng nghiêm ngặt nên dãy $(f(v_n))$ tăng và bị chặn trên (bởi $f(u_1)$), do đó dãy $(f(v_n))$ hội tụ: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = c$. Mặt khác do f là toàn ánh nên $\exists t \in \mathbb{R} : f(t) = c$. Từ đó:

$$\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = f(t),\ f(v_n) \le f(t) \Rightarrow v_n \le t,\ \forall n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Mặt khác, $f(v_n) \le f(u_n),\ \forall n = 1, 2, \ldots$ nên chuyển qua giới hạn ta được:

$$f(t) \le f(z) \Rightarrow t \le z. \tag{4}$$

Từ (2), (3), (4) ta thu được: $v_n \le t \le z \le u_n,\ \forall n = 1, 2, \ldots$. (5)
Từ (5) chuyển qua giới hạn, ta được: $z = t = a$, suy ra:

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{n\to+\infty} f(v_n) = f(a). \tag{6}$$

Kết hợp (6) và (1) ta được: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$. Như vậy f là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chú ý 1. *Một số kiến thức đã được trình bày ở mục 2.6.1 (ở trang 259) và một số kết quả liên quan sẽ được nêu ra sau đây nhằm mục đích giúp bạn đọc hiểu thấu đáo, tường tận tất cả các chi tiết trong chứng minh bổ đề ở trên.*

- **Định nghĩa.** *Dãy con $\{x_{n_k}\}_k$ của dãy số $\{x_n\}_n$ là một dãy mà các phần của nó được trích từ dãy $\{x_n\}_n$ ra, trong đó các chỉ số n_k thỏa mãn điều kiện:*

$$\lim_{k\to+\infty} n_k = +\infty, \quad n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$$

- **Ví dụ.** *Xét dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Khi đó dãy $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ là dãy con của chính nó với các chỉ số $n_k = k$. Dãy số $\{x_{2n}\}_{n=1}^{+\infty}$ (tức là dãy số $x_2, x_4, x_6, \ldots$) là một dãy con của $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Dãy số $\{x_{2n-1}\}_{n=1}^{+\infty}$ (tức là dãy $x_1, x_3, x_5, \ldots$) là một dãy con của $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Hai dãy số $\{x_{2n}\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{x_{2n-1}\}_{n=1}^{+\infty}$ được gọi là hai dãy con kề nhau của dãy $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$.*

- **Định nghĩa.** *Nếu dãy con $\{x_{n_k}\}_k$ (của dãy số $\{x_n\}_n$) hội tụ thì giới hạn của nó được gọi là giới hạn riêng của dãy số $\{x_n\}_n$.*

- **Ví dụ.** *Xét dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ với $x_n = (-1)^n, \forall n = 1, 2, \ldots$ Khi đó dãy số này không có giới hạn, tuy nhiên 1 và -1 là các giới hạn riêng của $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, vì $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n} = 1$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n-1} = -1$.*

- **Định nghĩa.**
  - *Giới hạn riêng lớn nhất của dãy số $\{x_n\}_n$ được gọi là giới hạn trên của nó và kí hiệu là $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n$ (hay $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup x_n$).*
  - *Giới hạn riêng bé nhất của dãy số $\{x_n\}_n$ được gọi là giới hạn dưới của nó và kí hiệu là $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n$ (hay $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf x_n$).*

- **Quy ước.** *Nếu $\sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} = +\infty$ với mọi n thì $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = +\infty$.*

  Nếu $\inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} = -\infty$ với mọi n thì $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = -\infty$.

- **Định lý.** *Mọi dãy số thực (x_n) đều có giới hạn trên và giới hạn dưới.*

  Chứng minh. *Với mọi n, đặt:*

$$a_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}, \; b_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}.$$

Khi đó (a_n) là một dãy tăng, (b_n) là một dãy giảm và

$$a_n \le x_n \le b_n, \; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

(a_n có thể là $-\infty$ và b_n có thể là $+\infty$).

- *Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty$ thì do $x_n \le b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.*

  Vậy: $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = -\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$.

- *Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ thì dãy (x_n) không bị chặn trên. Do đó*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n = +\infty = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}.$$

- *Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Ta chứng minh b là giới hạn riêng lớn nhất của dãy (x_n). Giả sử l là một giới hạn riêng của (x_n), khi đó tồn tại một dãy con $(x_{k_n})_n$ của dãy (x_n) sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n} = l$. Vì $x_{k_n} \le b_{k_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên qua giới hạn ta được $l \le b$. Vậy chỉ cần chứng tỏ b cũng là một giới hạn riêng của dãy (x_n). Từ định nghĩa của b_1 suy ra rằng tồn tại phần tử x_{i_1} của dãy số (x_n) sao cho $b_1 - 1 < x_{i_1} \le b_1$. Giả sử j_2 là một số nguyên lớn hơn i_1. Vì $b_{j_2} = \sup\{x_{j_2}, x_{j_2+1}, \ldots\}$ nên tồn tại số nguyên $i_2 \ge j_2$ sao cho $b_{j_2} - \dfrac{1}{2} < x_{i_2} \le b_{j_2}$. Bằng quy nạp ta nhận được hai dãy số $(b_{j_n})_n$ và $(x_{i_n})_n$, những dãy con của $(b_n)_n$ và $(x_n)_n$ sao cho*

$$b_{j_n} - \frac{1}{n} < x_{i_n} \le b_{j_n}, \; \forall n = 2, 3, \ldots$$

Hiển nhiên $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{j_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(b_{j_n} - \dfrac{1}{n}\right) = b$. Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{i_n} = b$. Vậy b là một giới hạn riêng của dãy (x_n) và

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n = \lim_{n\to+\infty} \sup x_n = \lim_{n\to+\infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}.$$

Tương tự ta chứng minh được

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n = \lim_{n\to+\infty} \inf x_n = \lim_{n\to+\infty} \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}.$$

- **Lưu ý.** *Từ cách chứng minh trên ta thu được kết quả rất quan trọng:*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n = \lim_{n\to+\infty} \sup x_n = \lim_{n\to+\infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$$

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n = \lim_{n\to+\infty} \inf x_n = \lim_{n\to+\infty} \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}.$$

Điều này lí giải tại sao giới hạn trên của dãy (x_n) và giới hạn dưới của dãy (x_n) còn được kí hiệu lần lượt là:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup x_n, \; \lim_{n\to+\infty} \inf x_n.$$

• **Hệ quả.**

– *Với mọi dãy bị chặn (x_n), nếu x là giới hạn trên của dãy thì $\forall \varepsilon > 0$ chỉ tồn tại một số hữu hạn số hạng của dãy sao cho $x_n > x + \varepsilon$.*

– *Với mọi dãy bị chặn (x_n), nếu x là giới hạn dưới của dãy thì $\forall \varepsilon > 0$ chỉ tồn tại một số hữu hạn số hạng của dãy sao cho $x_n < x - \varepsilon$.*

Ta cũng có thể phát biểu hệ quả này như sau:

– *Với mọi dãy bị chặn (x_n), nếu x là giới hạn trên của dãy thì $\forall \varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho*

$$x_n < x + \varepsilon, \forall n > n_0.$$

– *Nếu x là giới hạn dưới của dãy thì $\forall \varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho*

$$x_n > x - \varepsilon, \forall n > n_0.$$

Chứng minh. *Ta chứng minh ý đầu của hệ quả, còn ý sau là tương tự. Gọi: $M = \sup\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Nếu $x = M$ thì*

$$x_n \leq M, \forall n = 1, 2, \ldots \Rightarrow x_n \leq M + \varepsilon, \forall n \geq 1, \forall \varepsilon > 0.$$

Nếu $x < M$, ta chỉ cần xét những $\varepsilon > 0$, đủ nhỏ sao cho $x + \varepsilon < M$. Nếu trong đoạn $[x + \varepsilon; M]$ có vô số số hạng của dãy (x_n) thì dãy (x_n) sẽ có giới hạn riêng lớn hơn x, điều này mâu thuẫn với định nghĩa của x.

• **Hệ quả.**

– *Với mọi dãy bị chặn (x_n), nếu x là giới hạn trên của dãy thì $\forall \varepsilon > 0$ và $\forall k \in \mathbb{N}$, tồn tại $n_k > k$ sao cho $x_{n_k} > x - \varepsilon$.*

– *Với mọi dãy bị chặn (x_n), nếu x là giới hạn dưới của dãy thì $\forall \varepsilon > 0$ và $\forall k \in \mathbb{N}$, tồn tại $n_k > k$ sao cho $x_{n_k} < x + \varepsilon$.*

Chứng minh. *Chẳng hạn ta chứng minh ý đầu. Giả sử phản chứng rằng tồn tại $\varepsilon > 0$ và tồn tại $k > 0$ sao cho $x_n \leq x - \varepsilon, \forall n > k$. Khi đó*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n \leq x - \varepsilon < x.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết.
Ta dễ dàng suy ra định lý sau đây.

• **Định lý.** *Dãy (x_n) hội tụ khi và chỉ khi nó bị chặn và*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n.$$

• **Định lý.** *Dãy (x_n) có giới hạn (hữu hạn hoặc $\pm\infty$) khi và chỉ khi*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup x_n = \lim_{n\to+\infty} \inf x_n.$$

Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \inf x_n$.

Chứng minh. *Điều kiện cần là hiển nhiên. Giả sử*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup x_n = \lim_{n\to+\infty} \inf x_n = l.$$

Khi đó: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = l$. Vì $a_n \leq x_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên sử dụng nguyên lí kẹp suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$.

Bài toán 5.14 (Olympic Châu Á Thái Bình Dương năm 1989). *Tìm tất cả các song ánh, tăng $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f(x) + f^{-1}(x) = 2x, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Kí hiệu f^{-1} chỉ hàm ngược của f.

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Từ (1) thay x bởi $f(x)$ ta được:

$$f(f(x)) - 2f(x) + x = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Lấy $x \in \mathbb{R}$ bất kì. Ta cố định x và xây dựng dãy số (a_n) như sau:

$$a_0 = x, \ a_{n+1} = f(a_n), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Từ (2) thay x bởi a_n ta được

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Phương trình đặc trưng $r^2 - 2r + 1 = 0$ có nghiệm kép $\lambda = 1$. Do đó:

$$a_n = An + B, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ta có: $\begin{cases} x = a_0 = B \\ f(x) = a_1 = A + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = x \\ A = f(x) - x. \end{cases}$

Vì vậy: $a_n = [f(x) - x]\, n + x$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (3)

Kí hiệu: $f^{(n)}(x) = a_n$. Khi đó (3) suy ra $f^{(n)}(0) = nf(0)$ và (3) viết lại:

$$f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0) = [f(x) - x]\, n + x - f^{(n)}(0)$$
$$\Rightarrow f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0) = [f(x) - x - f(0)]\, n + x. \tag{4}$$

Theo giả thiết ta có f là song ánh, tăng trên $\mathbb{R}$ nên $f^{(n)}(x) > f^{(n)}(0)$ nếu $x > 0$ và $f^{(n)}(x) < f^{(n)}(0)$ nếu $x < 0$. (5)

Với $x > 0$ thì $f(x) - x - f(0) \geq 0$, vì nếu $f(x) - x - f(0) < 0$ thì

$$\lim_{n\to+\infty} ([f(x) - x - f(0)]\, n + x) = -\infty,$$

theo (4) suy ra với n đủ lớn ta có $f^{(n)}(x) < f^{(n)}(0)$, mâu thuẫn với (5). Tương tự ta cũng chứng minh được $f(x) - x - f(0) \le 0$ với $x < 0$.
Vậy: với $x > 0$ thì $f(x) - x - f(0) \ge 0$, với $x < 0$ thì $f(x) - x - f(0) \le 0$. (*)
Trong (1) thay x bởi $f^{-1}(x)$ ta được:

$$f^{-1}\left(f^{-1}(x)\right) - 2f^{-1}(x) + x = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Lấy $x \in \mathbb{R}$ bất kì. Ta cố định x và xây dựng dãy số (b_n) như sau:

$$b_0 = x,\ b_{n+1} = f^{-1}(b_n),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Từ (6) thay x bởi b_n ta được:

$$b_{n+2} - 2b_{n+1} + b_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow b_n = Cn + D,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ta có: $\begin{cases} x = b_0 = D \\ 2x - f(x) = f^{-1}(x) = b_1 = C + D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = x \\ C = x - f(x). \end{cases}$
Vì vậy: $b_n = [x - f(x)]\, n + x,\ \forall n \in \mathbb{N}$. (7)
Kí hiệu: $f^{(-n)}(x) = b_n$. Khi đó (7) suy ra $f^{(-n)}(0) = -nf(0)$ và (7) viết lại:

$$f^{(-n)}(x) - f^{(-n)}(0) = -[f(x) - x]\, n + x - f^{(-n)}(0)$$
$$\Rightarrow f^{(-n)}(x) - f^{(-n)}(0) = -[f(x) - x - f(0)]\, n + x. \tag{8}$$

Ta có f là song ánh, tăng trên $\mathbb{R}$ nên f^{-1} cũng là song ánh, tăng trên $\mathbb{R}$, do đó $f^{(-n)}(x) > f^{(-n)}(0)$ nếu $x > 0$ và $f^{(-n)}(x) < f^{(-n)}(0)$ nếu $x < 0$. (9)
Từ (8) và (9), tương tự như trên ta chứng minh được:
Với $x > 0$ thì $f(x) - x - f(0) \le 0$, với $x < 0$ thì $f(x) - x - f(0) \ge 0$. (**)
Từ (*) và (**) suy ra: $f(x) = x + f(0), \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy hàm số

$$f(x) = x + \alpha,\ \forall x \in \mathbb{R}\ (\alpha \text{ là hằng số tùy ý})$$

thỏa mãn các yêu cầu đề bài.
Cách khác. Dễ thấy rằng hàm $f(x) \equiv x$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Tiếp theo giả sử $f(x) \not\equiv x$, tức là tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f(a) \ne a$. Khi đó tồn tại $b \ne 0$ sao cho $f(a) = a + b$. Theo (1) ta có

$$f\left(f(a)\right) + f^{-1}\left(f(a)\right) = 2f(a) \Rightarrow f(a+b) + a = 2(a+b) \Rightarrow f(a+b) = a + 2b.$$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$f(a + nb) = a + (n+1)b,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lấy x bất kỳ nằm giữa a và $a + b$. Giả sử $f(x) = x + c$. Lí luận tương tự như trên ta được

$$f(x + nc) = x + (n+1)c,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vì hàm f tăng thực sự nên $x+c$ phải nằm giữa $f(a) = a+b$ và $f(a+b) = a+2b$. Từ đó bằng quy nạp, ta cũng có $x + nc$ phải nằm giữa $a + nb$ và $a + (n+1)b$. Như thế c nằm giữa $b + \dfrac{a-x}{n}$ và $b + \dfrac{a+b-x}{n}$ với mọi n. Suy ra $c = b$. Do vậy $f(x) \equiv x + b$, thử lại thấy thỏa mãn. Vậy có hai hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x) \equiv x,\ f(x) \equiv x + b \text{ (với } b \text{ đã nói ở trên)}.$$

5.2 Phương trình hàm dạng $f(x) = f(g(x))$

Xét phương trình hàm dạng: $f(x) = f(g(x))$, trong đó g là hàm số cho trước, f là hàm số cần tìm với giả thiết liên tục trên tập xác định.
Cách giải.

- Lấy a là một giá trị tùy ý thuộc tập xác định của hàm số f và xây dựng dãy số thích hợp $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ với $x_1 = a$. Hơn nữa dãy (x_n) thỏa mãn đồng thời các điều kiện:
  - $f(a) = f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_n) = f(x_{n+1}) = \cdots$
  - Dãy (x_n) hội tụ về b.
- Sử dụng tính liên tục của f để suy ra $f(a) = f(b)$. Do đó f là hàm hằng.

Chú ý 2. *Thường thì ta xây dựng dãy số $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ như sau:*

$$x_1 = a,\ x_{n+1} = g(x_n) \text{ hoặc } x_1 = a,\ x_{n+1} = g^{-1}(x_n)\ (\forall n = 1, 2, \ldots)$$

(với $g^{-1}(x_n) = \{y : g(y) = x_n\}$).

Bài toán 5.15. *Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ sao cho f là hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ và:*

$$f(x) = f\left(\frac{2x+1}{x+4}\right), \forall x \in (0; +\infty).$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn đề bài. Với mỗi $a > 0$, ta xây dựng dãy số $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ như sau: $x_1 = a,\ x_{n+1} = \dfrac{1 + 2x_n}{4 + x_n}, \forall n = 1, 2, \ldots$ Khi đó

$$f(a) = f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_n) = f(x_{n+1}) = \cdots$$

Đặt $b = \sqrt{2} - 1$, khi đó $b = \dfrac{1 + 2b}{4 + b}$. Ta có

$$|x_{n+1} - b| = \left|\frac{1 + 2x_n}{4 + x_n} - \frac{1 + 2b}{4 + b}\right| = \left|\frac{4 + b + 8x_n + 2bx_n - 4 - x_n - 8b - 2bx_n}{(4 + b)(4 + x_n)}\right|$$

$$= \frac{7}{(4+b)(4+x_n)}|x_n - b|$$

Mà $b > 0$ và $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $\frac{7}{(4+b)(4+x_n)} < \frac{7}{16}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó

$$|x_{n+1} - b| < \frac{7}{16}|x_n - b| < \left(\frac{7}{16}\right)^2 |x_{n-1} - b| < \cdots < \left(\frac{7}{16}\right)^n |x_1 - b|.$$

Vậy $|x_n - b| < (\frac{7}{16})^{n-1}|a - b|$. Từ đây cho $n \to +\infty$ suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$. Vì f liên tục trên $(0; +\infty)$ nên ta có

$$f(a) = \lim_{n\to+\infty} f(a) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n) = f(\sqrt{2} - 1).$$

Vậy với mọi $a \in (0; +\infty)$ thì $f(a) = f(\sqrt{2}-1)$, tức là f không đổi trên khoảng $(0; +\infty)$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy tất cả các hàm số cần tìm có dạng:

$$f(x) = C, \forall x \in (0; +\infty) \text{ (với } C \text{ là hằng số dương).}$$

Lưu ý. Như vậy f là hàm hằng trên dãy số (x_n), sử dụng kết quả này và tính liên tục của hàm f, chuyển qua giới hạn ta suy ra được f là hàm hằng trên tập xác định của nó.

Bài toán 5.16 (Đề dự tuyển thi Olympic toán quốc tế-1982, đề thi HSG toán 12- TP Hồ Chí Minh năm học 2003-2004). *Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(x^2\right) + f\left(x\right) = x^2 + x, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn đề bài. Khi đó ta có (1). Ta đặt

$$f(x) - x = g(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

và chứng minh g là hàm hằng. Dễ thấy g là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$g\left(x\right) = -g\left(x^2\right), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Trong (2) lấy $x = 0$, ta được $g(0) = -g(0) \Leftrightarrow g(0) = 0$. Trong (2) lấy $x = 1$ ta được $g(1) = -g(1) \Leftrightarrow g(1) = 0$. Trong (2) thay x bởi $-x$, ta được

$$g\left(-x\right) = -g\left(x^2\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với (2) được $g\left(x\right) = g\left(-x\right), \forall x \in \mathbb{R}$. Như vậy g là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$, do đó ta chỉ cần chứng minh g là hàm hằng với $x > 0$. Trước hết ta chú ý rằng với $x > 0$ thì $g\left(x\right) = -g\left(x^2\right) = g\left(x^4\right)$, do đó $g\left(x\right) = g\left(x^4\right), \forall x > 0$.

Với mọi $x > 0$, thay x bởi $x^{\frac{1}{4}}$ ta được $g(x) = g\left(x^{\frac{1}{4}}\right), \forall x > 0$. Lấy $a > 0$ tùy ý, xét dãy $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ như sau:

$$x_1 = a,\ x_{n+1} = x_n^{\frac{1}{4}}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Khi đó

$$g\left(x_{n+1}\right) = g\left(x_n^{\frac{1}{4}}\right) = g\left(x_n\right) = g\left(x_{n-1}\right) = \cdots = g\left(x_1\right) = g\left(a\right).$$

$$x_n = \left(x_{n-1}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(x_{n-2}\right)^{\frac{1}{4^2}} = \cdots = \left(x_1\right)^{\frac{1}{4^{n-1}}} = a^{\frac{1}{4^{n-1}}}.$$

Mà g là hàm số liên tục nên ta có

$$g\left(a\right) = \lim_{n\to+\infty} g\left(x_n\right) = g\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = g\left(\lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{4^{n-1}}}\right) = g\left(1\right) = 0.$$

Vậy $g\left(x\right) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f\left(x\right) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Do đó duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là $f\left(x\right) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 5.17. *Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x) + f(x^2) = x^3 + x^6, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hướng dẫn. Tương tự bài toán 5.16 ở trang 536, có duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là: $f\left(x\right) = x^3, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 5.18. *Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x) + f(x^2) = 2x^2 + 2x + 2, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Hướng dẫn. Đặt $g(x) = f(x) - (x + 1)$. Thay vào (1) ta được

$$g(x) + x + 1 + g(x^2) + x^2 + 1 = 2x^2 + 2x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow g(x) + g(x^2) = x^2 + x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Theo lời giải bài toán 5.16 ở trang 536, ta có $g\left(x\right) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Bởi vậy

$$f\left(x\right) = 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lưu ý. Phép đặt $g(x) = f(x) - (x + 1)$ được tìm ra như sau: Đặt

$$g(x) = f(x) - (ax + b) \text{ (với } a, b \text{ tìm sau).}$$

Khi đó

$$f(x) + f(x^2) = g(x) + (ax + b) + g(x^2) + \left(ax^2 + b\right)$$

$$=g(x)+g(x^2)+ax^2+ax+2b, \forall x\in\mathbb{R}. \quad (2)$$

Ta cần tìm a và b sao cho sau khi thay (2) vào (1) ta được một phương trình hàm đơn giản hơn. Thay (2) vào (1) ta được

$$g(x)+g(x^2)+ax^2+ax+2b=2x^2+2x+2, \forall x\in\mathbb{R},$$
$$g(x)+g(x^2)=(2-a)x^2+(2-a)x+2-2b, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Để cho đơn giản, ta chọn a và b sao cho

$$\begin{cases} 2-a=1 \\ 2-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1. \end{cases}$$

Vậy ta đặt $g(x)=f(x)-(x+1)$.

Bài toán 5.19. *Cho $n\in\mathbb{N}$. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f(x)$ thỏa mãn*

$$C_n^0 f(x)+C_n^1 f\left(x^2\right)+\cdots+C_n^n f\left(x^{2^n}\right)=0, \ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Hướng dẫn. Xét hàm số $G_k(x)=C_k^0 f(x)+C_k^1 f\left(x^2\right)+\cdots+C_k^k f\left(x^{2^k}\right)$. Nhận thấy $G_k(x)$ liên tục và $G_k(x)+G_k\left(x^2\right)=G_{k+1}(x), \forall k\in\mathbb{N}$. Từ giả thiết có

$$G_n(x)=0\Rightarrow G_{n-1}(x)+G_{n-1}\left(x^2\right)=0.$$

Theo lời giải bài toán 5.16 thì $G_{n-1}(x)=0$. Tiếp tục như vậy cho đến khi

$$G_0(x)=0\Rightarrow f(x)=0, \forall x.$$

Bài toán 5.20. *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f(x^3)-x^2f(x)=\frac{1}{x^3}-x, \forall x\in(0;+\infty). \quad (1)$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow \frac{f(x^3)}{x^3}-\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{x^6}-\frac{1}{x^2}, \forall x\in(0;+\infty)$$
$$\Leftrightarrow \frac{f(x^3)}{x^3}-\frac{1}{x^6}=\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x^2}, \forall x\in(0;+\infty). \quad (2)$$

Đặt $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{1}{x^2}, \forall x\in(0;+\infty)$. Khi đó hàm số g liên tục trên $(0;+\infty)$ và theo (2) ta có: $g(x^3)=g(x), \forall x\in(0;+\infty)$. (3)

Sử dụng (3) ta được:

$$g(x)=g\left(x^{\frac{1}{3}}\right)=g\left(x^{\frac{1}{3^2}}\right)=\cdots=g\left(x^{\frac{1}{3^n}}\right), \forall n=1,2,\ldots \quad (4)$$

Do $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{\frac{1}{3^n}}=x^0=1$ nên từ (4), sử dụng tính liên tục của hàm g, ta được:

$$g(x)=\lim_{n\to+\infty} g\left(x^{\frac{1}{3^n}}\right)=g\left(\lim_{n\to+\infty} x^{\frac{1}{3^n}}\right)=g(1).$$

Như vậy g là hàm hằng trên $(0;+\infty)$, do đó: $\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{1}{x^2}=c, \forall x>0$ hay $f(x)=cx+\dfrac{1}{x}, \forall x\in(0;+\infty)$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 5.21 (Đề thi HSG toán 12-TP Hồ Chí Minh năm học 1997-1998). *Tìm các hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho*

$$f(x)f(x^2)=1, \forall x\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn đề bài. Dễ thấy $f(x)\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$. Trong (1) thay x bởi $-x$ ta được $f(-x)f(x^2)=1=f(x)f(x^2), \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy $f(-x)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$, hay f là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$. Từ (1) ta có

$$f(x)=\frac{1}{f(x^2)}, f(x^2)=\frac{1}{f(x^4)}\Rightarrow f(x)=f(x^4), \forall x\in\mathbb{R}. \quad (2)$$

Từ (2) suy ra $f(x)=f(x^{\frac{1}{4}}), \forall x>0$. Tiến hành tương tự như bài toán 5.16 được

$$f(x)=f(1), \ \forall x>0$$

suy ra $f(x)=f(1), \forall x\neq 0$. Mà hàm f liên tục nên từ $f(x)=f(1), \forall x\neq 0$ suy ra $f(1)=f(0)$, do đó $f(x)=f(1), \forall x\in\mathbb{R}$. Từ (1) lấy $x=0$ được $f(0)=\pm 1$. Vậy $f(x)\equiv 1$ và $f(x)\equiv -1$. Thử lại đúng

Bài toán 5.22. *Cho $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Tìm các hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $(0;+\infty)$ sao cho*

$$f(x^\alpha)=f(x), \forall x\in(0;+\infty). \quad (1)$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn đề bài, khi đó ta có (1).

Trường hợp 1: $|\alpha|<1$. Lấy $a>0$ tùy ý, xét dãy $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ như sau:

$$x_1=a, \ x_{n+1}=x_n^\alpha, \forall n=1,2,\ldots$$

Khi đó từ (1) ta có

$$f(a)=f(x_1)=f\left(x_1^\alpha\right)=f(x_2)=f\left(x_2^\alpha\right)=f(x_3)=\cdots=f(x_n)$$
$$x_n=(x_{n-1})^\alpha=(x_{n-2})^{\alpha^2}=\cdots=(x_1)^{\alpha^{n-1}}=a^{\alpha^{n-1}}.$$

Mà f là hàm số liên tục nên ta có

$$f(a) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = f\left(\lim_{n\to+\infty} a^{\alpha^{n-1}}\right) = f(1).$$

Vậy $f(a) = f(1), \forall a > 0$.

Trường hợp 2: $|\alpha| > 1$. Lấy $a > 0$ tùy ý, xét dãy $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ như sau:

$$x_1 = a,\ x_{n+1} = x_n^{\frac{1}{\alpha}}, \forall n = 1, 2, ...$$

Trong (1) thay x bởi $x^{\frac{1}{\alpha}}$ được $f(x) = f\left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right), \forall x \in (0; +\infty)$. Khi đó

$$f(x_{n+1}) = f\left(x_n^{\frac{1}{\alpha}}\right) = f(x_n) = f(x_{n-1}) = \cdots = f(x_1) = f(a)$$

$$x_n = (x_{n-1})^{\frac{1}{\alpha}} = (x_{n-2})^{\frac{1}{\alpha^2}} = \cdots = (x_1)^{\frac{1}{\alpha^{n-1}}} = a^{\frac{1}{\alpha^{n-1}}}.$$

Mà f là hàm số liên tục nên ta có

$$f(a) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = f\left(\lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{\alpha^{n-1}}}\right) = f(1).$$

Vậy $f(a) = f(1), \forall a > 0$. Do đó

$$f(x) = C, \forall x > 0 \ (C \text{ là hằng số bất kì}).$$

Thử lại đúng thấy thỏa mãn.

Bài toán 5.23. *Tìm các hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện*

$$f(x) = f(\sin x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn đề bài. Lấy $x \in \mathbb{R}$ tùy ý. Xét dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ như sau: $x_1 = \sin x,\ x_{n+1} = \sin x_n, \forall n = 1, 2, ...$ Khi đó

$$f(x) = f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_n) = \cdots$$

Trường hợp 1: $0 \le x_1 \le 1$. Do $u \ge \sin u, \forall u \in [0; 1]$ nên

$$x_1 \ge \sin x_1 = x_2 \ge \sin x_2 = x_3 \ge \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge 0.$$

Vậy tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0 \ge 0$. Hơn nữa vì $g(x) = \sin x$ là hàm số liên tục nên từ

$$x_{n+1} = \sin x_n, \forall n = 1, 2, ...$$

cho $n \to +\infty$ ta được $x_0 = \sin x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$. Vì hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên

$$f(0) = f(x_0) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$$

Trường hợp 2: $-1 \le x_1 < 0 \Rightarrow 0 < -x_1 \le 1$. Do $u \ge \sin u, \forall u \in (0; 1]$ nên

$$-x_1 \ge \sin(-x_1) = -x_2 \ge \sin(-x_2) = -x_3 \ge \cdots \ge -x_n \ge -x_{n+1} > 0.$$

Do đó: $x_1 \le \sin x_1 = x_2 \le \sin x_2 = x_3 \le \cdots \le x_n \le x_{n+1} < 0$. Vậy tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0 \in [-1; 0]$. Hơn nữa vì $g(x) = \sin x$ là hàm số liên tục nên từ $x_{n+1} = \sin x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, cho $n \to +\infty$ được $x_0 = \sin x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$. Vì hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên

$$f(0) = f(x_0) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x).$$

Vậy trong mọi trường hợp ta đều có $f(x) = f(0), \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó sau khi thử lại ta kết luận: $f(x) = C, \forall x \in \mathbb{R}$ (C là hằng số bất kì).

Bài toán 5.24 (Olympic toán Bungari-vòng 3-1997). *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right), \forall x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Giải. Từ (1) suy ra $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó ta chỉ cần tìm $f(x)$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Lấy $a \ge 0$ bất kỳ. Ta xét hai trường hợp.

Trường hợp 1: $0 \le a \le \frac{1}{2}$. Ta xét dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ như sau:

$$x_1 = a,\ x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4}, \forall n = 1, 2, ...$$

Khi đó

$$f(x_{n+1}) = f\left(x_n^2 + \frac{1}{4}\right) = f(x_n) = f(x_{n-1}) = \cdots = f(x_1) = f(a). \tag{2}$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $x_n \le \frac{1}{2}, \forall n = 1, 2, ...$ Mặt khác ta có:

$$x_{n+1} - x_n = \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 \ge 0, \forall n = 1, 2, ...$$

Vậy dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ tăng và bị chặn trên nên hội tụ. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$. Khi đó từ hệ thức truy hồi của $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, cho $n \to +\infty$, ta được

$$\alpha = \alpha^2 + \frac{1}{4} = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$. Vì f là hàm liên tục nên theo (2) ta có

$$f(a) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Trường hợp 2: $a > \dfrac{1}{2}$. Ta xét dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ như sau:

$$x_1 = a,\ x_{n+1} = \sqrt{x_n - \frac{1}{4}}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Khi đó $x_n = x_{n+1}^2 + \dfrac{1}{4}, \forall n = 1, 2, \ldots$ và

$$f(x_{n+1}) = f\left(x_{n+1}^2 + \frac{1}{4}\right) = f(x_n) = f(x_{n-1}) = \cdots = f(x_1) = f(a). \quad (3)$$

Hiển nhiên dãy $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ bị chặn dưới bởi số 0. Mặt khác ta có

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n - \frac{1}{4}} - x_n = \frac{-\left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x_n - \frac{1}{4}} + x_n} \le 0, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Vậy dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ giảm, suy ra dãy này hội tụ. Tương tự như trường hợp 1, ta chứng minh được $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$ và $f(a) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ là hằng số. Vậy tất cả các hàm số cần tìm là

$$f(x) = C, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } C \text{ là hằng số tùy ý).}$$

Nhận xét 1. *Ta xây dựng dãy $\{x_n\}$ sao cho f là hàm hằng trên dãy $\{x_n\}$ và dãy này phải hội tụ. Thường thì đối với phương trình hàm $f(x) = f(g(x))$ chỉ có hai trường hợp sau đây: $x_1 = a,\ x_{n+1} = g(x_n)$ $(\forall n = 1, 2, \ldots)$ và $x_1 = a,\ x_{n+1} = g^{-1}(x_n)$ $(\forall n = 1, 2, \ldots)$ (với $g^{-1}(x_n) = \{y : g(y) = x_n\}$). Trong đó trường hợp đầu là đơn giản, còn trường hợp sau ta làm như sau (lấy trường hợp 2 của bài toán vừa rồi để minh họa): Ta tìm y sao cho*

$$y^2 + \frac{1}{4} = x_n \Rightarrow y = \sqrt{x_n - \frac{1}{4}}.$$

Vậy ta xét dãy $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ như sau: $x_1 = a,\ x_{n+1} = \sqrt{x_n - \dfrac{1}{4}}, \forall n = 1, 2, \ldots$

Bài toán 5.25. *Tìm tất cả các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện*

$$f(x) = f\left(\frac{3x^2}{4} + \frac{1}{3}\right), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Hướng dẫn. Tương tự bài toán 5.24 ở trang 541.

Bài toán 5.26 (Chọn đội tuyển Việt Nam thi toán quốc tế năm 2007). *Tìm tất cả các hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện*

$$f(x) = f\left(x^2 + \frac{x}{3} + \frac{1}{9}\right), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải.
Cách 1. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow f(x) = f\left((x + \frac{1}{6})^2 + \frac{1}{12}\right), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Trong (2) thay x bởi $x - \dfrac{1}{6}$, ta được

$$f\left(x - \frac{1}{6}\right) = f\left(x^2 + \frac{1}{12}\right), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Xét hàm số $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ như sau: $g(x) = f\left(x - \dfrac{1}{6}\right), \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó g liên tục trên $\mathbb{R}$. Theo (3) ta có $g(x) = g\left(x^2 + \dfrac{1}{4}\right), \forall x \in \mathbb{R}$. Theo kết quả bài toán 5.24 ở trang 541, suy ra g là hàm hằng trên $\mathbb{R}$, do đó

$$f(x) = C, \forall x \in \mathbb{R} \ (C \text{ là hằng số tùy ý}).$$

Cách 2 (tiếp nối từ (3). Trong (3) thay x bởi $-x$ suy ra

$$f\left(x - \frac{1}{6}\right) = f\left(-x - \frac{1}{6}\right), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Trong (4) thay x bởi $x + \dfrac{1}{6}$ ta được $f(x) = f\left(-x - \dfrac{1}{3}\right), \forall x \in \mathbb{R}$. (5)

Lấy $a \in \mathbb{R}$ bất kỳ. Ta xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1: $-\dfrac{1}{3} \le a \le \dfrac{1}{3}$. Ta xét dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ như sau:

$$x_1 = a,\ x_{n+1} = x_n^2 + \frac{x_n}{3} + \frac{1}{9}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Khi đó

$$f(x_{n+1}) = f\left(x_n^2 + \frac{x_n}{3} + \frac{1}{9}\right) = f(x_n) = f(x_{n-1}) = \cdots = f(a). \quad (2)$$

Ta chứng minh được $-\frac{1}{3} \le x_n \le \frac{1}{3}, \forall n = 1, 2, \ldots$. Vậy dãy (x_n) bị chặn. Mặt khác ta có

$$x_{n+1} - x_n = x_n^2 - \frac{2x_n}{3} + \frac{1}{9} = \left(x_n - \frac{1}{3}\right)^2 \ge 0.$$

Vậy dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ tăng và bị chặn trên nên hội tụ. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$. Khi đó từ hệ thức truy hồi của $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, cho $n \to +\infty$, ta được

$$\alpha = \alpha^2 + \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{9} \Leftrightarrow \left(\alpha - \frac{1}{3}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3}.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{3}$. Vì f là hàm liên tục nên theo (2) ta có

$$f(a) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = f\left(\frac{1}{3}\right).$$

Trường hợp 2: $a > \frac{1}{3}$. Ta xét dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ như sau:

$$x_1 = a,\ x_{n+1} = \frac{-1 + \sqrt{36x_n - 3}}{6}, \forall n = 1, 2, \cdots$$

Bằng quy nạp dễ dàng suy ra $x_n > \frac{1}{3}, \forall n = 1, 2, \ldots$ Ta có

$$6x_{n+1} + 1 = \sqrt{36x_n - 3} \Rightarrow 36x_{n+1}^2 + 12x_{n+1} + 1 = 36x_n - 3$$
$$\Rightarrow x_n = x_{n+1}^2 + \frac{x_{n+1}}{3} + \frac{1}{9}.$$

Vậy

$$f(x_{n+1}) = f\left(x_{n+1}^2 + \frac{x_{n+1}}{3} + \frac{1}{9}\right) = f(x_n) = f(x_{n-1}) = \cdots = f(a). \quad (3)$$

Theo trên, dãy $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ bị chặn dưới bởi số $\frac{1}{3}$. Mặt khác ta có

$$x_{n+1} - x_n = \frac{-1 + \sqrt{36x_n - 3}}{6} - x_n = \frac{\sqrt{36x_n - 3} - 6x_n - 1}{6}$$

$$= \frac{36x_n - 3 - \left(36x_n^2 + 12x_n + 1\right)}{6\left(\sqrt{36x_n - 3} + 6x_n + 1\right)}$$
$$= \frac{-36x_n^2 + 24x_n - 4}{6\left(\sqrt{36x_n - 3} + 6x_n + 1\right)} = \frac{-(6x_n - 2)^2}{6\left(\sqrt{36x_n - 3} + 6x_n + 1\right)} \le 0.$$

Vậy dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ giảm, suy ra dãy này hội tụ. Tương tự như trường hợp 1, ta chứng minh được $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{3}$ và $f(a) = f\left(\frac{1}{3}\right)$ là hằng số.

Trường hợp 3: $-\frac{2}{3} \le a < -\frac{1}{3}$. Khi đó $\frac{1}{3} < -a \le \frac{2}{3} \Rightarrow 0 < -a - \frac{1}{3} \le \frac{1}{3}$. Theo trường hợp 1, ta có $f\left(-a - \frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right)$. Theo (5) ta được

$$f(a) = f\left(-a - \frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right).$$

Trường hợp 4: $a < -\frac{2}{3}$. Khi đó $-a > \frac{2}{3} \Rightarrow -a - \frac{1}{3} > \frac{1}{3}$. Theo trường hợp 2, ta có $f\left(-a - \frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right)$. Theo (5) ta được $f(a) = f\left(-a - \frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right)$.

Từ bốn trường hợp trên, suy ra $f(a) = f\left(\frac{1}{3}\right), \forall a \in \mathbb{R}$. Hay f là hàm hằng. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy tất cả các hàm số cần tìm là $f(x) = C, \forall x \in \mathbb{R}$ (với C là hằng số tùy ý).

Lưu ý. Trong cách 2, có thể giải nhanh hơn như sau: Từ (2) suy ra với mọi $x \in \mathbb{R}$, tồn tại $u \ge \frac{1}{12}$ sao cho $f(x) = f(u)$. Do đó từ trường hợp 1 và trường hợp 2 suy ra $f(a) = f\left(\frac{1}{3}\right), \forall a \in \mathbb{R}$. Không cần xét hai trường hợp 3 và 4.

Bài toán 5.27. *Tìm tất cả các hàm số liên tục trên* $\mathbb{R}$ *và thỏa mãn điều kiện*

$$f(x) = f\left(\frac{3x^2}{4} - \frac{3x}{2} + \frac{25}{12}\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hướng dẫn. Tương tự bài toán 5.26 ở trang 543.

Bài toán 5.28. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *liên tục trên* $\mathbb{R}$ *và thỏa mãn điều kiện:*

$$f(x) = f\left(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{5}{9}\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hướng dẫn. Tương tự bài toán 5.26 ở trang 543.

Bài toán 5.29. *Cho* $0 < k < \dfrac{1}{4}$. *Hàm liên tục* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f(x) = f\left(x^2 + k\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng f *là hàm hằng trên* $\mathbb{R}$.

Giải. Dễ thấy f là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$, do đó ta chỉ cần chứng minh f là hàm hằng với $x \geq 0$. Từ giả thiết $0 < k < \dfrac{1}{4}$ suy ra phương trình $x = x^2 + k$ có hai nghiệm dương. Gọi a_1, a_2 là hai nghiệm đó và giả sử $a_1 < a_2$. Khi đó

$$a_1^2 + k = a_1,\ a_2^2 + k = a_2.$$

Lấy $a > 0$ tùy ý.

Trường hợp 1: $a < a_2$ $(a \neq a_1)$. Ta xây dựng dãy $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ như sau:

$$x_1 = a,\ x_{n+1} = x_n^2 + k, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Khi đó

$$f(x_{n+1}) = f\left(x_n^2 + k\right) = f(x_n) = f(x_{n-1}) = \cdots = f(x_1) = f(a).$$

Trường hợp 1a: $a_1 < a < a_2$. Ta có $a_1 < x_1 < a_2$. Giả sử $a_1 < x_n < a_2$. Khi đó

$$a_1^2 < x_n^2 < a_2^2 \Rightarrow a_1^2 + k < x_n^2 + k < a_2^2 + k \Rightarrow a_1 < x_{n+1} < a_2.$$

Theo nguyên lý quy nạp suy ra $a_1 < x_n < a_2, \forall n = 1, 2, \ldots$ Mặt khác

$$x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n + k < 0 \ \ (\text{do } a_1 < x_n < a_2).$$

Vậy ta đã chứng minh được dãy $\{x_n\}$ hội tụ. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Khi đó $x = x^2 + k \Leftrightarrow x = a_1$ hoặc $x = a_2$, ta loại trường hợp $x = a_2$ do dãy (x_n) giảm.

Trường hợp 1b: $0 < a < a_1$. Bằng quy nạp, chứng minh được với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $x_n < a_1$. Mặt khác:

$$x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n + k > 0 \ \ (\text{do } x_n < a_1).$$

Vậy dãy $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ tăng và bị chặn trên nên hội tụ. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Khi đó $x = x^2 + k$, tức là $x = a_1$ hoặc $x = a_2$, ta loại trường hợp $x = a_2$ do $x_n < a_1$ với mọi n. Tóm lại khi $a < a_2$ $(a \neq a_1)$, thì $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a_1$. Khi đó

$$f(a) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = f(a_1).$$

Trường hợp 2: $a > a_2$. Ta có $a_1 + a_2 = 1 \Rightarrow a > a_2 > \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{4} > k$. Vậy ta

xây dựng dãy $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ như sau: $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n - k}, \forall n = 1, 2, \ldots$ Khi đó

$$f(x_{n+1}) = f\left(x_{n+1}^2 + k\right) = f(x_n) = f(x_{n-1}) = \cdots = f(x_1) = f(a).$$

Ta có $x_1 = a > a_2$. Giả sử $x_n > a_2$. Khi đó

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n - k} > \sqrt{a_2 - k} = \sqrt{a_2^2} = a_2.$$

Theo nguyên lý quy nạp suy ra $x_n > a_2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Mặt khác

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n - k} - x_n = \frac{-(x_n^2 - x_n + k)}{\sqrt{x_n - k} + x_n} < 0 \ (\text{do } x_n > a_2).$$

Như vậy dãy $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ giảm và bị chặn dưới nên hội tụ. Ta chứng minh được $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a_2$. Do đó $f(a) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n\right) = f(a_2)$.

Tóm lại:

-Với $a < a_2$ $(a \neq a_1)$ ta có $f(a) = f(a_1)$.

-Với $a > a_2$ ta có $f(a) = f(a_2)$.

-Với $a = a_1$ ta có $f(a) = f(a_1)$.

-Với $a = a_2$ ta có $f(a) = f(a_2)$.

Do đó để chứng minh f là hàm hằng, ta cần chứng minh $f(a_1) = f(a_2)$. Xét dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ như sau: $u_n = -\dfrac{1}{n} + a_2, \forall n = 1, 2, \ldots$ Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a_2$ và $u_n < a_2, \forall n = 1, 2, \ldots$ Do đó $f(u_n) = f(a_1)$. Cho $n \to +\infty$ và sử dụng tính liên tục của hàm f suy ra

$$f(a_1) = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) = f(a_2).$$

Mặt khác $f(0) = f(k) = f(a_1)$. Vậy $f(a) = f(a_1), \forall a \geq 0$, tức là chứng minh được f là hàm hằng trên $[0; +\infty)$. Suy ra f là hàm hằng trên $\mathbb{R}$.

Chú ý 3. *Tương tự như các bài toán* 5.24 *ở trang* 541, 5.29 *ở trang* 546, *ta giải được phương trình hàm sau:*

$$f(x) = f(ax^2 + b), \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

Trong đó f *là hàm số cần tìm với giả thiết liên tục trên* $\mathbb{R}$, *phương trình* $x = ax^2 + b$ *có nghiệm thực không âm. Còn phương trình hàm*

$$f(x) = f(mx^2 + nx + p), \forall x \in \mathbb{R}$$

được giải bằng cách đưa về phương trình hàm $(*)$ *(xem bài toán* 5.26).

Bài toán 5.30. *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f(x)=f\left(\frac{x^2+4x-3}{5}\right)-x^2+x+3,\forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Ta có

$$(1)\Leftrightarrow f(x)-5x=f\left(\frac{x^2+4x-3}{5}\right)-(x^2+4x-3),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Xét hàm số g như sau: $g(x)=f(x)-5x,\forall x\in\mathbb{R}$. Vì f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm g liên tục trên $\mathbb{R}$. Từ (2) ta có $g(x)=g\left(\frac{x^2+4x-3}{5}\right),\forall x\in\mathbb{R}$, hay

$$g(x)=g\left(\frac{(x+2)^2-7}{5}\right),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Trong (3) thay x bởi $x-2$ ta được $g(x-2)=g\left(\frac{x^2-7}{5}\right),\forall x\in\mathbb{R}$. (4)

Xét hàm số $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ như sau: $h(x)=g(x-2),\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó từ (4) ta có

$$h(x)=h\left(\frac{x^2+3}{5}\right),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Vì g là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên h cũng là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Từ (5) suy ra h là hàm chẵn, vậy ta chỉ cần xét trên $[0;+\infty)$. Xét phương trình

$$x=\frac{x^2+3}{5}\Leftrightarrow x^2-5x+3=0\Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}.$$

Đặt $\lambda_1=\frac{5-\sqrt{13}}{2}$, $\lambda_2=\frac{5+\sqrt{13}}{2}$. Khi đó

$$0<\lambda_1<\lambda_2,\ \lambda_1=\frac{\lambda_1^2+3}{5},\ \lambda_2=\frac{\lambda_2^2+3}{5}.$$

Với $a\geq 0$ bất kì.

Trường hợp 1. $0\leq a<\lambda_2,\ a\neq\lambda_1$. Xây dựng dãy số (x_n) như sau:

$$x_0=a;\ x_{n+1}=\frac{x_n^2+3}{5},\forall n\in\mathbb{N}. \tag{6}$$

Trường hợp 1a: $\lambda_1<a<\lambda_2\Rightarrow\lambda_1<x_0<\lambda_2$. Giả sử $\lambda_1<x_n<\lambda_2$. Khi đó

$$\lambda_1^2<x_n^2<\lambda_2^2\Rightarrow\frac{\lambda_1^2+3}{5}<\frac{x_n^2+3}{5}<\frac{\lambda_2^2+3}{5}\Rightarrow\lambda_1<x_{n+1}<\lambda_2.$$

Theo nguyên lí quy nạp suy ra $\lambda_1<x_n<\lambda_2,\forall n\in\mathbb{N}$, hay dãy (x_n) bị chặn. Ta có

$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n^2+3}{5}-x_n=\frac{x_n^2-5x_n+3}{5}<0\ (\text{do }\lambda_1<x_n<\lambda_2).$$

Vậy dãy (x_n) là dãy số giảm, suy ra có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\alpha$, vì (x_n) là dãy số giảm nên $\alpha\leq x_0\Rightarrow\alpha<\lambda_2$. Từ (6) cho $n\to+\infty$ ta được

$$\alpha=\frac{\alpha^2+3}{5}\overset{\text{do }\alpha<\lambda_2}{\Leftrightarrow}\alpha=\lambda_1\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}x_n=\lambda_1.$$

Trường hợp 1b: $0\leq a<\lambda_1$. Ta có $0\leq x_0<\lambda_1$. Giả sử $x_n<\lambda_1$. Khi đó do $x_n\geq 0$ nên $x_n^2<\lambda_1^2\Rightarrow\frac{x_n^2+3}{5}<\frac{\lambda_1^2+3}{5}\Rightarrow x_{n+1}<\lambda_1$. Theo nguyên lí quy nạp suy ra $x_n<\lambda_1,\forall n\in\mathbb{N}$, hay dãy (x_n) bị chặn trên. Ta có

$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n^2+3}{5}-x_n=\frac{x_n^2-5x_n+3}{5}>0\ (\text{do }x_n<\lambda_1).$$

Vậy dãy (x_n) là dãy số tăng, suy ra có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\beta$, vì với mọi n thì $x_n<\lambda_1$ nên $\beta\leq\lambda_1$. Từ (6) cho $n\to+\infty$ ta được

$$\beta=\frac{\beta^2+3}{5}\overset{\text{do }\beta\leq\lambda_1}{\Leftrightarrow}\beta=\lambda_1\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}x_n=\lambda_1.$$

Vậy trong trường hợp 1, ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lambda_1$. Trong (5) thay x bởi $x_0, x_1,\ldots, x_n,\ldots$, ta được

$$h(a)=h(x_0)=h(x_1)=\cdots=h(x_n),\forall n\in\mathbb{N}. \tag{7}$$

Do hàm h liên tục nên từ (7) ta có

$$h(a)=\lim_{n\to+\infty}h(a)=\lim_{n\to+\infty}h(x_n)=h\left(\lim_{n\to+\infty}x_n\right)=h(\lambda_1).$$

Trường hợp 2. $a>\lambda_2$. Ta xây dựng dãy số (x_n) như sau:

$$x_0=a;\ x_{n+1}=\sqrt{5x_n-3},\forall n\in\mathbb{N}. \tag{8}$$

Giả sử $x_n>\lambda_2$. Khi đó $x_{n+1}=\sqrt{5x_n-3}>\sqrt{5\lambda_2-3}=\sqrt{\lambda_2^2}=\lambda_2$. Theo nguyên lí quy nạp suy ra $x_n>\lambda_2,\forall n\in\mathbb{N}$. Bởi vậy

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{5x_n-3}-x_n=\frac{-\left(x_n^2-5x_n+3\right)}{\sqrt{5x_n-3}+x_n}<0\ (\text{do }x_n>\lambda_2).$$

Dãy (x_n) giảm và bị chặn dưới bởi λ_2 nên hội tụ. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L$, vì với mọi n thì $x_n > \lambda_2$ nên $L \geq \lambda_2$. Từ (8) cho $n \to +\infty$ ta được

$$L = \frac{L^2+5}{3} \overset{\text{do } L\geq\lambda_2}{\Leftrightarrow} L = \lambda_2 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = \lambda_2.$$

Tương tự trường hợp 1, suy ra $h(a) = h(\lambda_2)$. Tóm lại: nếu $0 \leq a < \lambda_2$, $a \neq \lambda_1$ thì $h(a) = h(\lambda_1)$, còn nếu $a > \lambda_2$ thì $h(a) = h(\lambda_2)$. Vậy h sẽ là hàm hằng nếu ta chứng minh được $h(\lambda_1) = h(\lambda_2)$. Xét dãy số (y_n) như sau:

$$y_n = -\frac{1}{n} + \lambda_2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Khi đó $0 < y_n < \lambda_2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lambda_2$. Ta có $h(y_n) = h(\lambda_1)$ và

$$h(\lambda_1) = \lim_{n\to+\infty} h(\lambda_1) = \lim_{n\to+\infty} h(y_n) = h\left(\lim_{n\to+\infty} y_n\right) = h(\lambda_2).$$

Vậy $h(a) = C, \forall a \in [0;+\infty)$ (C là hằng số). Suy ra $h(a) = C, \forall a \in \mathbb{R}$. Do đó $g(x) = C, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(x) = 5x + C, \forall x \in \mathbb{R}$ (C là hằng số). Thử lại thấy thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 5.31 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2011). *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(xy) = f\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) + (x-y)^2, \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài. Trong (1) lấy $y = 1$ được

$$f(x) = f\left(\frac{x^2+1}{2}\right) + (x-1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x) + 2x = f\left(\frac{x^2+1}{2}\right) + 2\left(\frac{x^2+1}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow g(x) = g\left(\frac{x^2+1}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R}, \text{ với } g(x) = f(x) + 2x, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Vì f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm g liên tục trên $\mathbb{R}$. Từ (2) suy ra g là hàm chẵn, do đó ta chỉ xét trên $[0;+\infty)$. Với $a \geq 0$ bất kì.

Trường hợp 1. $0 \leq a \leq 1$. Xét dãy số (x_n) như sau:

$$x_0 = a;\ x_{n+1} = \frac{x_n^2+1}{2}, n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $0 \leq x_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Lại có

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2+1}{2} - x_n = \frac{(x_n-1)^2}{2} \geq 0 \Rightarrow x_{n+1} \geq x_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vậy dãy (x_n) tăng và bị chặn trên nên có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L$. Từ (3) cho $n \to +\infty$ ta được

$$L = \frac{L^2+1}{2} \Leftrightarrow L^2 - 2L + 1 = 0 \Leftrightarrow L = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = 1.$$

Trong (2) lần lượt thay x bởi x_0, x_1,..., x_n ta được

$$g(x_0) = g\left(\frac{x_0^2+1}{2}\right) = g(x_1) = g\left(\frac{x_1^2+1}{2}\right) = g(x_2) = \cdots = g(x_n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Từ $g(a) = g(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$, cho $n \to +\infty$ và sử dụng tính liên tục của hàm g ta được $g(a) = g(1), \forall a \in [0;1]$. (4)

Trường hợp 2. $a > 1$. Xét dãy số (x_n) như sau:

$$x_0 = a;\ x_{n+1} = \sqrt{2x_n - 1}, n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có $x_n > 1$ và

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{2x_n - 1} - x_n = \frac{2x_n - 1 - x_n^2}{\sqrt{2x_n-1} + x_n} = \frac{-(x_n-1)^2}{\sqrt{2x_n-1} + x_n} < 0.$$

Vậy dãy số (x_n) giảm và bị chặn dưới bởi số 1 nên có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$, khi đó $\alpha \geq 1$. Từ (5) cho $n \to +\infty$ ta được

$$\alpha = \sqrt{2\alpha - 1} \overset{\text{do } \alpha\geq 1}{\Leftrightarrow} \alpha^2 = 2\alpha - 1 \Leftrightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = 1.$$

Tương tự như ở trường hợp 1, ta chứng minh được: $g(a) = g(1), \forall a > 1$. (6)
Từ (4) và (6) suy ra $g(a) = g(1), \forall a \geq 0$, mà g là hàm chẵn nên

$$g(a) = g(1), \forall a \in \mathbb{R}.$$

Vậy $f(x) = -2x + C, \forall x \in \mathbb{R}$ (C là hằng số). Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 5.32. *Tìm các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(3xy) + 5(x-y)^2 = f\left(x^2+y^2\right) + 5xy, \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Hướng dẫn. Trong (1), thay y bởi $\frac{1}{3}$ ta được

$$f(x) + 5\left(x^2 + \frac{1}{9} - \frac{2x}{3}\right) = f\left(x^2 + \frac{1}{9}\right) + \frac{5x}{3}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x) - 5x = f\left(x^2 + \frac{1}{9}\right) - 5\left(x^2 + \frac{1}{9}\right), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow g(x) = g\left(x^2 + \frac{1}{9}\right), \forall x \in \mathbb{R}, \text{ với } g(x) = f(x) - 5x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sử dụng kết quả bài toán 5.29 ở trang 546, ta được kết quả

$$f(x) = 5x + C, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } C \text{ là hằng số).}$$

Bài toán 5.33. *Tìm các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f(2xy) = f\left(\frac{4x^2 + y^2}{2}\right) + \frac{12x^2 - 12xy + 3y^2}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Hướng dẫn. Tương tự bài toán 5.31 (ở trang 550).

Bài toán 5.34. *Tìm tất cả các hàm liên tục $f : (-1;1) \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f(x) = f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), \forall x \in (-1;1).$$

Giải. Lấy $a \in (-1;1) \setminus \{0\}$ tùy ý. Ta xây dựng dãy $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ như sau:

$$x_1 = a,\ x_{n+1} = \frac{1 - \sqrt{1 - x_n^2}}{x_n}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Khi đó

$$\frac{2x_n}{1+x_n^2} = \frac{2\dfrac{1-\sqrt{1-x_{n-1}^2}}{x_{n-1}}}{1 + \left(\dfrac{1-\sqrt{1-x_{n-1}^2}}{x_{n-1}}\right)^2} = \frac{2\dfrac{1-\sqrt{1-x_{n-1}^2}}{x_{n-1}}}{\dfrac{x_{n-1}^2 + \left(1-\sqrt{1-x_{n-1}^2}\right)^2}{x_{n-1}^2}}$$

$$= \frac{2\left(1-\sqrt{1-x_{n-1}^2}\right)x_{n-1}}{x_{n-1}^2 + 1 - 2\sqrt{1-x_{n-1}^2} + 1 - x_{n-1}^2} = \frac{\left(1-\sqrt{1-x_{n-1}^2}\right)x_{n-1}}{1-\sqrt{1-x_{n-1}^2}} = x_{n-1}.$$

Vì vậy

$$f(x_n) = f\left(\frac{2x_n}{1+x_n^2}\right) = f(x_{n-1}) = f(x_{n-2}) = \cdots = f(x_1) = f(a).$$

Nhận xét rằng với $-1 < x < 1$ và $x \neq 0$ ta có

$$x^4 < x^2 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 + x^4 < 1 - x^2 \Leftrightarrow (1-x^2)^2 < 1 - x^2$$

$$\Leftrightarrow 1 - x^2 < \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2 < x^2$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \sqrt{1-x^2}\right)^2 < x^2 \Leftrightarrow \left|1 - \sqrt{1-x^2}\right| < |x| \Leftrightarrow \left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| < 1.$$

Vậy $-1 < x_n < 1, \forall n = 1, 2, \ldots$, nghĩa là dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ bị chặn.

Trường hợp 1: $-1 < a < 0$. Khi đó $-1 < x_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta có $x_n < 0$ và

$$1 - x_n^2 - \sqrt{1-x_n^2} < 0 \Leftrightarrow 1 - x_n^2 < \sqrt{1-x_n^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2x_n^2 + x_n^4 < 1 - x_n^2 \Leftrightarrow x_n^4 < x_n^2 \Leftrightarrow x_n^2 < 1 \text{ (đúng).}$$

Vì vậy $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1-\sqrt{1-x_n^2}}{x_n} - x_n = \dfrac{1 - x_n^2 - \sqrt{1-x_n^2}}{x_n} > 0$. Do đó dãy $\{x_n\}_n$ hội tụ. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$, khi đó $-1 < b \leq 0$, do đó từ

$$x_{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-x_n^2}}{x_n} = \frac{x_n^2}{x_n\left(1+\sqrt{1-x_n^2}\right)} = \frac{x_n}{1+\sqrt{1-x_n^2}}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

cho $n \to +\infty$ được $b = \dfrac{b}{1+\sqrt{1-b^2}} \overset{-1<b\leq 0}{\Leftrightarrow} b = 0$. Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Trường hợp 2: $0 < a < 1$. Khi đó $0 < x_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Lập luận tương tự, ta thấy rằng $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ là dãy giảm, do đó hội tụ và ta cũng chứng minh được $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. Tóm lại dãy $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ luôn hội tụ và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. Vậy

$$f(a) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = f(0).$$

Điều này chứng tỏ f là hàm hằng trên $(-1;1)$.

Bài toán 5.35. *Tìm tất cả các hàm liên tục $f : [-1;1] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f(x) = f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), \forall x \in [-1;1]$$

Hướng dẫn. Do f liên tục trên $[-1;1]$ nên f liên tục trên $(-1;1)$ và

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = f(-1),\ \lim_{x\to1^-} f(x) = f(1).$$

Theo bài toán 5.34 ta có

$$f(x) = C,\ \forall x \in (-1;1)\ (C \text{ là hằng số tùy ý}).$$

Ta lại có

$$f(1) = \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} C = C,\ \ f(-1) = \lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} C = C.$$

Vậy $f(x) = C,\ \forall x \in [-1;1]$ (C là hằng số tùy ý).

Bài toán 5.36. *Tìm tất cả các hàm liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x)=f\left(\frac{x}{1+x^2}\right),\forall x\in\mathbb{R}$$

Bài toán 5.37 (Đề thi HSG quốc gia năm 2001). *Cho $g(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$. Hãy tìm tất cả các hàm f xác định, liên tục trên khoảng $(-1;1)$ và thỏa mãn hệ thức*

$$\left(1-x^2\right)f\left(g(x)\right)=\left(1+x^2\right)^2f(x),\forall x\in(-1;1)$$

Hướng dẫn giải.

$$\left(1-x^2\right)f\left(g(x)\right)=\left(1+x^2\right)^2f(x),\forall x\in(-1;1)$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(1-x^2\right)^2}{\left(1+x^2\right)^2}f\left(g(x)\right)=\left(1-x^2\right)f(x),\forall x\in(-1;1)$$

$$\Leftrightarrow\phi\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)=\phi(x),\forall x\in(-1;1),\text{ với }\phi(x)=\left(1-x^2\right)f(x).$$

5.3 Phương trình hàm dạng $af(x)+bf(g(x))=h(x)$

Xét phương trình hàm dạng $af(x)+bf(g(x))=h(x)$, với a, b là các hằng số thực, $g(x)$ và $h(x)$ là các hàm số đã biết, f là hàm số cần tìm.

5.3.1 Cách giải

Lấy x_1 là một giá trị tùy ý thuộc tập xác định của hàm số $f(x)$ và xây dựng dãy số (x_n) như sau:

$$x_{n+1}=g(x_n),\text{ với mọi }n=1,2,\ldots$$

Nếu (x_n) là dãy số tuần hoàn thì có thể giải phương trình hàm bằng phương pháp thế. Nếu dãy (x_n) hội tụ (thường xuất hiện trường hợp này khi giả thiết cho f là hàm số liên tục) thì áp dụng phương pháp chuyển qua giới hạn.

5.3.2 Sử dụng dãy tuần hoàn

Bài toán 5.38. *Tìm các hàm số f xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right\}$ sao cho:*

$$f(x)+f\left(\frac{x+1}{1-3x}\right)=x,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right\}.\quad(1)$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn đề bài, khi đó ta có (1). Lấy x_1 là một giá trị tùy ý trong $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right\}$, ta xây dựng dãy số (x_n) như sau:

$$x_{n+1}=\frac{x_n+1}{1-3x_n},\forall n=1,2,\ldots$$

Ta có

$$x_2=\frac{x_1+1}{1-3x_1},x_3=\frac{x_2+1}{1-3x_2}=\frac{x_1-1}{1+3x_1},x_4=\frac{x_3+1}{1-3x_3}=x_1.$$

Vậy (x_n) là dãy số tuần hoàn chu kỳ 3. Trong (1) lần lượt thay x bởi x_1, x_2, x_3 ta được:

$$\begin{cases}f(x_1)+f(x_2)=x_1\\f(x_2)+f(x_3)=x_2\\f(x_3)+f(x_1)=x_3.\end{cases}$$

Giải hệ này với ẩn $f(x_1)$ ta được

$$f(x_1)=\frac{1}{2}(x_1+x_3-x_2)=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{x_1-1}{1+3x_1}-\frac{x_1+1}{1-3x_1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{9x_1^3+6x_1^2-x_1+2}{9x_1^2-1}.$$

Do x_1 lấy tùy ý trong $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right\}$ nên sau khi thử lại ta có kết luận: Có duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x)=\frac{9x^3+6x^2-x+2}{18x^2-2},\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\}.$$

Bài toán 5.39. *Giải phương trình hàm:*

$$f(x)+f(\frac{x-1}{x})=1+x,\forall x\neq0,1.\quad(1)$$

Giải. Ta xây dựng dãy số $(x_n)_n$ như sau:

$$x_1\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\},x_n=\frac{x_{n-1}-1}{x_{n-1}},\forall n\geq2.$$

Khi đó $x_2=\dfrac{x_1-1}{x_1},x_3=\dfrac{x_2-1}{x_2}=\dfrac{-1}{x_1-1},x_4=\dfrac{x_3-1}{x_3}=x_1$. Như vậy $(x_n)_n$ là dãy tuần hoàn chu kỳ 3. Trong (1) thay $x=x_i$ (với $i=1,2,3$) ta được

$$\begin{cases}f(x_1)+f(x_2)=1+x_1\\f(x_2)+f(x_3)=1+x_2\\f(x_3)+f(x_1)=1+x_3.\end{cases}$$

Giải hệ phương trình được $f(x_1) = \frac{1}{2}(x_1 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{1-x_1})$. Vì $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ tùy ý, nên $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Thử lại, ta thấy nghiệm này thỏa mãn bài toán.

Bài toán 5.40 (Cuộc thi Tìm kiếm Tài năng Toán học Quốc tế vòng 19). *Giả sử rằng hàm f thỏa mãn phương trình hàm sau:*

$$2f(x) + 3f\left(\frac{2x+29}{x-2}\right) = 100x + 80. \quad (1)$$

Hãy tìm $f(3)$.

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn đề bài, khi đó ta có (1). Lấy x_1 là một giá trị tùy ý trong $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, ta xây dựng dãy số (x_n) như sau:

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + 29}{x_n - 2}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Ta có

$$x_2 = \frac{2x_1+29}{x_1-2},\ x_3 = \frac{2x_2+29}{x_2-2} = \frac{\frac{4x_1+58}{x_1-2}+29}{\frac{2x_1+29}{x_1-2}-2} = \frac{33x_1}{33} = x_1.$$

Vậy dãy (x_n) là dãy số tuần hoàn chu kỳ 2. Trong (1) lần lượt thay x bởi x_1, x_2 ta được:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} 2f(x_1) + 3f(x_2) = 100x_1 + 80 \\ 2f(x_2) + 3f(x_1) = 100x_2 + 80 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} 4f(x_1) + 6f(x_2) = 200x_1 + 160 \\ -6f(x_2) - 9f(x_1) = -300x_2 - 240 \end{cases} \\
\Rightarrow &-5f(x_1) = 200x_1 - 300x_2 - 80 \\
\Rightarrow &f(x_1) = -40x_1 + 60.\frac{2x_1+29}{x_1-2} + 16 \\
\Rightarrow &f(3) = -40.3 + 60.35 + 16 = 1996.
\end{aligned}$$

Bài toán 5.41 (Costa Rica Final Round 2006). *Giả sử rằng hàm f thỏa mãn phương trình hàm sau:*

$$f(x) + 2f\left(\frac{x + \frac{2001}{2}}{x-1}\right) = 4014 - x.$$

Hãy tìm $f(2004)$.

Hướng dẫn. Dãy số (x_n), với

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2001}{2}}{x_n - 1} = \frac{2x_n + 2001}{2x_n - 2}, \ \forall n = 1, 2, \ldots$$

là dãy tuần hoàn chu kì 2.

Bài toán 5.42 (Belgium Flanders Math Olympiad 2006). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}\setminus\{0,1\} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 + \frac{1}{x(1-x)}.$$

Hướng dẫn. Dãy số (x_n), với $x_{n+1} = \frac{1}{1-x_n}$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ là dãy tuần hoàn chu kì 3.

Lưu ý. Sau đây ta sẽ liệt kê một số kết quả nhằm giúp bạn đọc nhanh chóng nhận ra dãy tuần hoàn.

Định lý 1. *Hàm số $f(x) = p - x$ thỏa mãn điều kiện $f(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.*

Định lý 2. *Hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (với $c \neq 0, ad - bc \neq 0$) thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} f^n = I \\ f^m \neq I, \ m = 1, 2, \ldots, n-1 \end{cases}$ khi và chỉ khi*

$$\begin{cases} a + d = 2\cos\frac{k\pi}{n}, \ k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, \ (n,k) = 1. \\ ad - bc = 1 \end{cases}$$

Hệ quả 1. *Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (với $c \neq 0, ad - bc \neq 0$). Khi đó nếu $a + d = 0$ thì $f(f(x)) = x$.*

Định lý 3. *Hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (với $c \neq 0, ad - bc \neq 0$) thỏa mãn điều kiện $f^n = I$ khi và chỉ khi $a + d = 2\cos\frac{k\pi}{n}$, với $k \in \{1, 2, \ldots, n-1.\}$.*

Hệ quả 2. *Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (với $c \neq 0, ad - bc \neq 0$). Khi đó nếu $\begin{cases} a + d = 1 \\ ad - bc = 1 \end{cases}$ thì $f(f(f(x))) = x$.*

Định lý 4. *Cho hàm số* $f(x) = \dfrac{(\cos\lambda)x - \sin\lambda}{(\sin\lambda)x + \cos\lambda}$ *(với* $\sin\lambda \neq 0$*). Khi đó*

$$f_2(x) := f(f(x)) = \frac{(\cos 2\lambda)x - \sin 2\lambda}{(\sin 2\lambda)x + \cos 2\lambda}$$

$$f_3(x) := f(f(f(x))) = \frac{(\cos 3\lambda)x - \sin 3\lambda}{(\sin 3\lambda)x + \cos 3\lambda}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f_n(x) := f(f_{n-1}(x)) = \frac{(\cos n\lambda)x - \sin n\lambda}{(\sin n\lambda)x + \cos n\lambda}.$$

Hệ quả 3. *Cho hàm số* $f(x) = \dfrac{(\cos\lambda)x - \sin\lambda}{(\sin\lambda)x + \cos\lambda}$ *(với* $\sin\lambda \neq 0$*). Khi đó*

$$f_3(x) \equiv x \Leftrightarrow \cos 3\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2k\pi}{3}(k \in \mathbb{Z}).$$

5.3.3 Sử dụng dãy hội tụ

Bài toán 5.43. *Tìm tất cả các hàm liên tục* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f(x) + f(\frac{2x}{3}) = \frac{3x}{5}, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Đặt $g(x) = \dfrac{2x}{3}$ và xây dựng dãy $(x_n)_n$ như sau:

$$x_1 \in \mathbb{R}, x_n = g(x_{n-1}), \forall n \geq 2.$$

Vì dãy (x_n) không tuần hoàn nên ta không thể đưa (1) về phương trình đại số có hữu hạn phương trình như các bài toán trước. Nhưng vì $x_n = x_1(\frac{2}{3})^{n-1}$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0, \forall x_1 \in \mathbb{R}$. Thay x bởi $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ vào (1) ta được

$$f(x_1) + f(x_2) = \frac{3x_1}{5},$$

$$f(x_2) + f(x_3) = \frac{3x_2}{5},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(x_{n-1}) + f(x_n) = \frac{3x_{n-1}}{5}.$$

Từ đó $f(x_1) + (-1)^n f(x_n) = \dfrac{3}{5}(x_1 - x_2 + \cdots + (-1)^n x_{n-1})$. Suy ra

$$f(x_1) + (-1)^n f(x_n) = \frac{9}{25}x_1[1 - (-\frac{2}{3})^{n-1}].$$

Do $f(x)$ liên tục và $f(0) = 0$ nên khi chuyển qua giới hạn ta được

$$f(x_1) = \frac{9x_1}{25}, \forall x_1 \in \mathbb{R},$$

hay $f(x) = \dfrac{9x}{25}, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Lưu ý. Có thể đặt $f(x) = g(x) + \dfrac{9x}{25}$ để khử $\dfrac{3x}{5}$ từ (1).

Bài toán 5.44. *Tìm các hàm số* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *liên tục tại* $x = 0$ *và thỏa mãn*

$$nf(nx) = f(x) + nx, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

(trong đó $n > 1$ *là số tự nhiên cố định nào đó).*

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Trong (1) lấy $x = 0$ được $f(0) = 0$. Đặt $f(x) = g(x) + \dfrac{nx}{n^2 - 1}, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó g là hàm liên tục tại 0, $g(0) = 0$ và

$$n\left[g(nx) + \frac{n^2 x}{n^2 - 1}\right] = g(x) + \frac{nx}{n^2 - 1} + nx, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow ng(nx) + \frac{n^3 x}{n^2 - 1} = g(x) + \frac{n^3 x}{n^2 - 1}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow g(nx) = \frac{1}{n}g(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{n}g\left(\frac{x}{n}\right), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Với mỗi $x_1 \in \mathbb{R}$, xét dãy $(x_k)_{k=1}^{+\infty}$ như sau: $x_{k+1} = \dfrac{x_k}{n}, \forall k = 1, 2, \ldots$ Khi đó

$$x_{k+1} = x_1\left(\frac{1}{n}\right)^k, \lim_{k\to+\infty} x_k = 0.$$

Trong (2) lần lượt thay x bởi $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ ta được:

$$g(x_1) = \frac{1}{n}g(x_2) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 g(x_3) = \cdots = \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} g(x_k).$$

Vậy $g(x_1) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1} g(x_k), \forall k = 1, 2, \ldots$ Từ đây, và do g là hàm liên tục tại 0 nên cho $k \to +\infty$ ta được: $g(x_1) = 0.g(0) = 0$. Do x_1 lấy tùy ý trong $\mathbb{R}$ nên $g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó ta có $f(x) = \dfrac{nx}{n^2 - 1}, \forall x \in \mathbb{R}$. Sau khi thử lại ta kết luận: Có duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x) = \frac{nx}{n^2 - 1}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lưu ý. Phép đặt $f(x) = g(x) + \frac{nx}{n^2-1}$ tìm ra như sau: Từ giả thiết có

$$f(nx) - \frac{1}{n}f(x) = x \quad (*)$$
$$\Leftrightarrow f(nx) - \frac{1}{n}f(x) = \alpha\left(nx - \frac{1}{n}.x\right) \text{ (với } \alpha \text{ tìm sau).}$$

Ta cần có

$$x = \alpha\left(nx - \frac{1}{n}.x\right) \Rightarrow 1 = \alpha\left(n - \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \alpha = \frac{n}{n^2-1}.$$

Vậy ta biến đổi (*) thành

$$f(nx) - \frac{1}{n}f(x) = \frac{n}{n^2-1}\left(nx - \frac{1}{n}.x\right)$$
$$\Leftrightarrow \left[f(nx) - \frac{n}{n^2-1}.(nx)\right] = \frac{1}{n}\left[f(x) - \frac{n}{n^2-1}.x\right]$$
$$\Leftrightarrow g(nx) = \frac{1}{n}g(x), \text{ với } g(x) = f(x) - \frac{n}{n^2-1}.x.$$

Do đó ta có phép đặt $f(x) = g(x) + \frac{nx}{n^2-1}$.

Bài toán 5.45. *Tìm các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại $x = 0$ và thỏa mãn*

$$3nf(nx) = 2f(x) + nx, \forall x \in \mathbb{R}.$$

(trong đó $n > 1$ là số tự nhiên cố định nào đó).

Hướng dẫn. Tương tự bài toán 5.44 (ở trang 559).

Bài toán 5.46 (Đề thi học sinh giỏi Tỉnh Gia Lai năm học 2001-2002). *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sao cho:*

$$f(9x) - \frac{5}{6}f(6x) + \frac{1}{6}f(4x) = 6x, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Ta sẽ vận dụng cách giải bài toán 1.120 ở trang 85 vào bài toán này. Đặt $f(x) = \frac{9x}{7} + g(x)$. Khi đó hàm g liên tục trên $\mathbb{R}$ và do (1) nên

$$g(9x) - \frac{5}{6}g(6x) + \frac{1}{6}g(4x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow g(\frac{9}{4}x) - (\frac{1}{3} + \frac{1}{2})g(\frac{3}{2}x) + (\frac{1}{3}.\frac{1}{2})g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left[g(\frac{9}{4}x) - \frac{1}{3}g(\frac{3}{2}x)\right] - \frac{1}{2}\left[g(\frac{3}{2}x) - \frac{1}{3}g(x)\right] = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow h(\frac{3}{2}x) - \frac{1}{2}h(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \left(\text{với } h(x) = g(\frac{3}{2}x) - \frac{1}{3}g(x)\right)$$
$$\Leftrightarrow h(x) = \frac{1}{2}h(\frac{2}{3}x), \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow h(x) = (\frac{1}{2})^2 h\left((\frac{2}{3})^2 x\right) \Rightarrow h(x) = (\frac{1}{2})^n h\left((\frac{2}{3})^n x\right), \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (2)$$

Do hàm h liên tục trên $\mathbb{R}$ và $h(0) = 0$ nên từ (2) ta có

$$h(x) = \lim_{n\to+\infty} h(x) = \lim_{n\to+\infty}\left[(\frac{1}{2})^n h\left((\frac{2}{3})^n x\right)\right] = 0.h(0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy $g(\frac{3}{2}x) - \frac{1}{3}g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ hay $g(x) = \frac{1}{3}g(\frac{2}{3}x), \forall x \in \mathbb{R}$. Tương tự như trên ta được $g(x) \equiv 0$, do đó $f(x) \equiv \frac{9x}{7}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 5.47. *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sao cho:*

$$9f(8x) - 9f(4x) + 2f(2x) = 100x, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Hướng dẫn. Đặt $g(x) = f(x) - \frac{5}{2}x$, thay vào (1) được

$$9g(8x) - 9g(4x) + 2g(2x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow 9g(x) - 9g\left(\frac{x}{2}\right) + 2g\left(\frac{x}{4}\right) = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Lưu ý. Phép đặt $g(x) = f(x) - \frac{5}{2}x$ được tìm ra như sau: Đặt $f(x) = g(x) + cx$, thay vào (1) được

$$9\left[g(8x) + 8cx\right] - 9\left[g(4x) + 4cx\right] + 2\left[g(2x) + 2cx\right] = 100x.$$

Chọn c để $72cx - 36cx + 4cx = 100x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, lúc này $40cx = 100x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, suy ra $c = \frac{5}{2}$ và $g(x) = f(x) - \frac{5}{2}x$.

5.3.4 Sử dụng dãy truy hồi tuyến tính

Bài toán 5.48. *Cho hàm số $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ thỏa mãn*

$$f(4x) + 2010f(2x) = 2011f(x), \forall x > 0. \quad (1)$$

Chứng minh rằng tồn tại số thực $k > 1$ để $f(x) = f(kx), \forall x > 0$.

Giải. Với mỗi $x > 0$, đặt $f(2^n x) = u_n, n = 0, 1, \ldots$ Ta viết lại (1) như sau:

$$f(2^2 x) + 2010 f(2^1 x) = 2011 f(2^0 x), \forall x > 0.$$

Thay x bởi $2x$ ta được $f(2^3 x) + 2010 f(2^2 x) = 2011 f(2^1 x), \forall x > 0$. Tổng quát, ta có

$$\begin{aligned} &f(2^{n+2} x) + 2010 f(2^{n+1} x) = 2011 f(2^n x), \forall x > 0 \\ \Rightarrow &u_{n+2} + 2010 u_{n+1} - 2011 u_n = 0, n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Phương trình đặc trưng của dãy số là $\lambda^2 + 2010\lambda - 2011 = 0$. Suy ra

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2011 \Longrightarrow u_n = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n = a + b(-2011)^n.$$

Vì $f(x) > 0$ nên $u_n > 0, \forall n \geq 0$. Nếu $b > 0$ thì với n lẻ và đủ lớn ta có $u_n < 0$, không xảy ra. Nếu $b < 0$ thì với n chẵn và đủ lớn ta có $u_n < 0$, không xảy ra. Vậy $b = 0$ và $u_n = u_0$ hay là $f(2^n x) = f(x), \forall n = 1, 2, \ldots \forall x > 0$. Bài toán đã được chứng minh.

Bài toán 5.49. *Tìm các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$\begin{cases} f(0) \neq 0, f(1) = \dfrac{5}{2}, \\ f(x+y) + f(x-y) = f(x) f(y), \forall x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{1}$$

Giải. Trong (1) cho $x = n \in \mathbb{Z}, y = 1$, ta được

$$f(n+1) + f(n-1) = f(n) f(1)$$

Đặt $f(n) = u_n$, ta được $u_{n+1} = \dfrac{5}{2} u_n - u_{n-1}, u_0 \neq 0, f(1) = u_1 = \dfrac{5}{2}$. Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - \dfrac{5}{2}\lambda + 1 = 0$ có nghiệm là $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \dfrac{1}{2}$. Từ đó ta suy ra

$$u_n = A 2^n + B(\frac{1}{2})^n.$$

Trong (1) cho $x = 1, y = 0$, thì $f(1) f(0) = 2 f(1) \Rightarrow f(0) = 2 = u_0$ nên

$$\begin{cases} A 2^0 + B(\dfrac{1}{2})^0 = 2 = A + B \\ A 2^1 + B(\dfrac{1}{2})^1 = \dfrac{5}{2} = 2A + \dfrac{B}{2} \end{cases} \Longrightarrow A = B = 1,$$

do đó $f(n) = u_n = 2^n + \dfrac{1}{2^n}$ hay là $f(x) = 2^x + \dfrac{1}{2^x}, \forall x \in \mathbb{Z}$. Thử lại ta thấy hàm số vừa tìm được thỏa mãn bài toán.

5.4 Sử dụng dãy số trong phương trình hàm đa thức và một số bài toán khác

Bài toán 5.50. *Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ không đồng nhất không và thỏa mãn*

$$P(1960) = 1992, \quad P(x) = \sqrt{P(x^2+1) - 33} + 32, \forall x \geq 0.$$

Giải. Giả sử $P(x)$ là đa thức thỏa mãn đề bài. Khi đó ta có

$$P(x^2+1) = [P(x) - 32]^2 + 33, \forall x \geq 0.$$

Suy ra $P\left(1960^2 + 1\right) = (1992 - 32)^2 + 33 = 1960^2 + 33$. Gọi $x_0 = 1960$, ta có $x_0 + 32 = 1992$, $P(x_0) = x_0 + 32$ (do $P(1960) = 1992$). Xét dãy $\{x_n\}$ như sau:

$$x_0 = 1960, \ x_1 = x_0^2 + 1, \ x_{n+1} = x_n^2 + 1, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Khi đó $P(x_0) = x_0 + 32$ và

$$\begin{aligned} P(x_1) &= P(x_0^2 + 1) = [P(x_0) - 32]^2 + 33 = x_0^2 + 33 = (x_0^2 + 1) + 32 = x_1 + 32, \\ P(x_2) &= P(x_1^2 + 1) = [P(x_1) - 32]^2 + 33 = x_1^2 + 33 = (x_1^2 + 1) + 32 = x_2 + 32. \end{aligned}$$

Bằng quy nạp ta được

$$P(x_n) = x_n + 32, \forall n = 0, 1, 2, \ldots \tag{*}$$

Vì dãy số $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ là dãy tăng nghiêm ngặt nên từ (*) suy ra $P(x) \equiv x + 32$. Sau khi thử lại ta kết luận: Có duy nhất một đa thức thỏa mãn đề bài là

$$P(x) \equiv x + 32.$$

Bài toán 5.51. *Cho m là số nguyên dương lẻ. Tìm các đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn $P(2010) = 2016$ và $P(x) = \sqrt[m]{P(x^m + 1) - 7} + 6, \forall x \in \mathbb{R}$.*

Giải. Từ giả thiết ta có: $P\left(x^m + 1\right) = [P(x) - 6]^m + 7, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Đặt $P(x) = Q(x) + x + 6$ thì ta có $[Q(x) + x]^m = Q(x^m + 1) + x^m$ và $Q(2010) = 0$.
Xét dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 2010$ và $u_{n+1} = u_n^m + 1$. Dễ thấy dãy (u_n) tăng nghiêm ngặt, do đó tập hợp $\{u_n | n = 1, 2, \ldots\}$ có vô hạn phần tử. Mà $Q(u_n) = 0, \forall n \geq 1$. nên $Q(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, tức là $P(x) = x + 6$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 5.52 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2004). *Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn*

$$P(x) - 30 = \sqrt{P(x^2 + 4) - 34} + 2, \forall x \geq 0 \text{ và } P(2004) = 2034.$$

Kết quả. Có duy nhất một đa thức thỏa mãn đề bài là

$$P(x) \equiv x + 30$$

Bài toán 5.53. *Cho hai đa thức hệ số thực $P(x)$ và $Q(x)$ thỏa mãn*

$$P\left(1 + x + Q(x) + (Q(x))^2\right) = Q\left(1 + x + P(x) + (P(x))^2\right),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh nếu phương trình $P(x) = Q(x)$ có nghiệm thực thì $P(x) \equiv Q(x)$.

Giải. Giả sử $a \in \mathbb{R}$ mà $P(a) = Q(a)$. Xét

$$b = 1 + a + Q(a) + (Q(a))^2 = 1 + a + P(a) + (P(a))^2.$$

Từ giả thiết suy ra $P(b) = Q(b)$. Để ý rằng $b = \dfrac{3}{4} + a + \left[Q(a) + \dfrac{1}{2}\right]^2 > a$. Do đó nếu xét dãy số (x_n), với $x_0 = a$ và

$$x_{n+1} = 1 + x_n + Q(x_n) + (Q(x_n))^2,\ \forall n = 0, 1, 2, \ldots$$

thì chứng minh bằng quy nạp theo n theo cách như trên ta có

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots$$

và $P(x_i) = Q(x_i),\ \forall i = 0, 1, 2, \ldots$ Từ đó suy ra $P(x) \equiv Q(x)$.

Bài toán 5.54. *Tìm các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn $P(0) = 0$ và*

$$P(x^2 + 1) = (P(x))^2 + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Ta có $P(0) = 0,\ P(1) = 0^2 + 1,\ P(2) = 1^2 + 1,\ P(5) = 2^2 + 1.$ (2)
Xây dựng dãy số (a_n) như sau: $a_0 = 0$ và $a_{n+1} = a_n^2 + 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Ta có $a_1 = 1 > a_0$. Giả sử $a_{n+1} > a_n$. Do $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $a_{n+1}^2 > a_n^2$, dẫn tới $a_{n+2} = a_{n+1}^2 + 1 > a_n^2 + 1 = a_{n+1}$. Theo nguyên lí quy nạp suy ra dãy (a_n) tăng thực sự, do đó dãy (a_n) gồm vô số số hạng phân biệt. Do (2) nên

$$P(a_0) = a_0,\ P(a_1) = a_1,\ P(a_2) = a_2.$$

Giả sử $P(a_k) = a_k\ \ (k \in \mathbb{N})$. Khi đó sử dụng (1) ta được

$$P(a_{k+1}) = P(a_k^2 + 1) = (P(a_k))^2 + 1 = a_k^2 + 1 = a_{k+1}.$$

Theo nguyên lí quy nạp suy ra $P(a_n) = a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Xét đa thức hệ số thực $Q(x) = P(x) - x$. Do $P(a_n) = a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ nên $Q(x)$ nhận a_n làm nghiệm với mọi $n \in \mathbb{N}$. Vì dãy (a_n) gồm vô số số hạng phân biệt nên suy ra $Q(x) \equiv 0$ hay $P(x) \equiv x$. Thử lại thấy đúng. Vậy có duy nhất một đa thức thỏa mãn các yêu cầu đề bài, đó là $P(x) \equiv x$.

Bài toán 5.55. *Tìm tất cả các đa thức bậc lẻ $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn*

$$P(x^2 + 1) = (P(x))^2 + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Trong (1) thay x bởi $-x$ được $P(x^2 + 1) = (P(-x))^2 + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $P^2(x) = P^2(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}$, hay

$$[P(x) - P(-x)]\,[P(x) + P(-x)] = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Từ (3) suy ra ít nhất một trong hai đa thức $P(x) - P(-x)$, $P(x) + P(-x)$ sẽ có vô số nghiệm nên nó sẽ là đa thức không. Do $\deg(P)$ lẻ nên

$$P(x) + P(-x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Từ (4) cho $x = 0$ ta được $P(0) = 0$. Đến đây sử dụng bài toán 5.54 ở trang 564 ta được $P(x) \equiv x$.

Bài toán 5.56. *Tìm các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ có $\deg(P) \geq 1$ và thỏa mãn*

$$P(x^2 + 1) = (P(x))^2 + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải.
Trường hợp 1: $P(0) = 0$. Sử dụng bài toán 5.54 ở trang 564 ta được

$$P(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Trường hợp 2: $P(0) \neq 0$. Giả sử $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, với $a_0 \neq 0$. Thay vào (1) được

$$\begin{aligned}&\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right)^2 + 1\\ =&a_n\left(x^2+1\right)^n + a_{n-1}\left(x^2+1\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(x^2+1\right) + a_0,\ \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

So sánh hệ số của x được $2a_0a_1 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0$. Sau đó so sánh hệ số x^3 được

$$2a_3a_0 + 2a_1a_2 = 0 \Leftrightarrow a_3 = 0\ \ (\text{do } a_1 = 0).$$

Tiếp tục quá trình này ta được những hệ số của x mũ lẻ bằng 0. Do đó $P(x) = Q(x^2)$, ở đây $Q(t)$ là đa thức. Từ (1) ta có

$$Q\left(\left(x^2+1\right)^2\right) = P\left(x^2+1\right) = [P(x)]^2 + 1 = \left[Q(x^2)\right]^2 + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Xét đa thức $H(t)$ sao cho $H(t) = Q(t-1)$. Thay vào (2) được

$$H\left(\left(x^2+1\right)^2 + 1\right) = \left[H(x^2+1)\right]^2 + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Do tập hợp $\{x^2+1|x\in\mathbb{R}\}$ có vô số phần tử khác nhau nên từ (3) suy ra

$$H\left(x^2+1\right)-[H(x)]^2-1\equiv 0\Leftrightarrow H\left(x^2+1\right)=[H(x)]^2+1,\ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (4)$$

Nghĩa là $H(x)$ thỏa điều kiện bài toán và $\deg(H)<\deg(P)$. Nếu $H(0)=0$ thì theo trên

$$H(x)\equiv x\Rightarrow P(x)\equiv Q(x^2)\equiv H(x^2+1)\equiv x^2+1.$$

Nếu $H(0)\neq 0$ thì tiến hành tương tự như đối với $P(x)$, ta thu được đa thức $H_1(x)$ cũng thỏa mãn yêu cầu đề bài và $\deg(H_1)<\deg(H)$. Dễ thấy quá trình này tiếp tục chỉ hữu hạn bước, nghĩa là đến một thời điểm chắc chắn sẽ đến đa thức x. Suy ra nếu một đa thức $P(x)$ thỏa mãn tính chất (1) thì nó sẽ trùng với một đa thức nào đó trong dãy

$$P_0(x)=x,\ P_1(x)=x^2+1,\ldots,P_{n+1}(x)=P_n(x^2+1),\ldots$$

Ngược lại, bằng cách kiểm tra trực tiếp thì mọi đa thức trong dãy trên thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài toán 5.57. *Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn $P(0)=0$ và*

$$P(x^3+x+1)=P^3(x)+P(x)+1,\ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Xét dãy số (a_n) như sau: $a_0=0$ và $a_{n+1}=a_n^3+a_n+1,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Ta có $a_1=1$, $a_0<a_1$. Giả sử $a_n<a_{n+1}$, khi đó

$$a_{n+2}=a_{n+1}^3+a_{n+1}+1>a_n^3+a_n+1=a_{n+1}.$$

Theo nguyên lí quy nạp suy ra dãy (a_n) là dãy số tăng nghiêm ngặt, do đó tập hợp $\{a_n|n\in\mathbb{N}\}$ có vô hạn phần tử. Ta có $P(0)=0\Rightarrow P(a_0)=a_0$. Giả sử $P(a_n)=a_n$ (với $n\in\mathbb{N}$), khi đó

$$P(a_{n+1})=P\left(a_n^3+a_n+1\right)\overset{\text{theo (1)}}{=}P^3(a_n)+P(a_n)+1=a_n^3+a_n+1=a_{n+1}.$$

Theo nguyên lí quy nạp suy ra $P(a_n)=a_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Kết hợp với tập hợp $\{a_n|n\in\mathbb{N}\}$ có vô hạn phần tử suy ra đa thức $P(x)-x$ có vô số nghiệm, dẫn tới $P(x)-x\equiv 0\Leftrightarrow P(x)\equiv x$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 5.58. *Tìm tất cả các hàm số tăng thực sự $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn*

$$f(n+f(n))=2f(n),\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn điều kiện bài toán. Do f tăng thực sự nên: $f(n+1)\geq f(n)+1\Rightarrow f(n+1)-n-1\geq f(n)-n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.
Suy ra $f(n)-n$ là một hàm số tăng. Mặt khác, đặt $a_0=1$, $a_{n+1}=a_n+f(a_n)$.

Khi đó $a_0<a_1<\ldots$, và $f(a_{n+1})=2f(a_n)$, do đó $f(a_{n+1})-a_{n+1}=f(a_n)-a_n$. Suy ra có vô hạn bộ (m,n) sao cho $f(n)-n=f(m)-m$, mà $f(n)-n$ là hàm số tăng nên từ đây suy ra $f(n)-n$ là hàm hằng trên $\mathbb{N}^*$. Vậy

$$f(n)=n+k,\ \forall n\in\mathbb{N}^*\ (\text{với } k \text{ là hằng số nguyên dương}).$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 5.59. *Tìm tất cả các hàm số $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$, thỏa mãn: Với mọi $x>0$, $y>0$, ta luôn có*

$$f(x).f(y)=\beta f\left(x+yf(x)\right)\ \left(\text{với } \beta\in\mathbb{R},\beta>1 \text{ cho trước}\right). \quad (1)$$

Giải. Nếu $f(x)\equiv c$ thỏa mãn (1) thì $c^2=\beta c\overset{\text{do } c>0}{\Rightarrow}c=\beta$. Ta chứng minh

$$f(x)\geq 1,\forall x\in(0;+\infty).$$

Giả sử tồn tại $x_0>0$ sao cho $f(x_0)\in(0;1)$. Khi đó thay $x=x_0$, $y=\dfrac{x_0}{1-f(x_0)}$ vào (1) ta được

$$f(x_0)f\left(\frac{x_0}{1-f(x_0)}\right)=\beta f\left(\frac{x_0}{1-f(x_0)}\right)\Rightarrow f(x_0)=\beta>1,\ \text{vô lí.}$$

Tiếp theo, ta chứng minh $f(x)\geq\beta,\forall x\in(0;+\infty)$. Giả sử tồn tại $y_0>0$ sao cho $f(y_0)\in[1;\beta)$. Xét dãy số dương (x_n) như sau:

$$x_1>0,\ x_{n+1}=x_n+y_0f(x_n),\forall n=1,2,\ldots$$

Từ (1) ta thu được

$$f(x_{n+1})=f\left(x_n+y_0f(x_n)\right)=\frac{f(y_0)}{\beta}.f(x_n)=\cdots=\left[\frac{f(y_0)}{\beta}\right]^n f(x_1).$$

Do $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{f(y_0)}{\beta}\right]^n=0$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=0$, mâu thuẫn với $f(x)\geq 1$ với mọi $x>0$. Kết hợp với (1) ta có

$$\beta f\left(x+yf(x)\right)\geq\beta f(x)\Rightarrow f(x)\leq f\left(x+yf(x)\right),\forall x,y\in(0;+\infty).$$

Suy ra f là hàm số tăng (không giảm) trên $(0;+\infty)$. Giả sử $f(x)>\beta$, với mọi $x\in(0;+\infty)$, suy ra hàm f đồng biến (tăng nghiêm ngặt trên $(0;+\infty)$). Trong (1) đổi vai trò của x và y ta nhận được

$$f\left(x+yf(x)\right)=f\left(y+xf(y)\right),\forall x,y\in(0;+\infty)$$
$$\Leftrightarrow x+yf(x)=y+xf(y),\forall x,y\in(0;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}+\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{x}+\frac{f(y)}{y}, \forall x,y\in(0;+\infty)$$
$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x}=\frac{f(y)}{y}-\frac{1}{y}, \forall x,y\in(0;+\infty)$$
$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x}=\alpha, \forall x\in(0;+\infty) \ (\alpha \text{ là hằng số})$$
$$\Rightarrow f(x)=\alpha x+1, \forall x\in(0;+\infty).$$

Thử lại thấy với mọi hằng số α thì hàm số $f(x)=\alpha x+1, \forall x\in(0;+\infty)$ không thỏa mãn (1). Vậy tồn tại $x_1>0$ để $f(x_1)=\beta$. Với $0<x\le x_1$, vì hàm f không giảm nên

$$0<f(x)\le f(x_1)\Rightarrow 0<f(x)\le\beta\Rightarrow f(x)=\beta \ (\text{do } f(x)\ge\beta, \forall x>0).$$

Vậy $f(x)=\beta, \forall x\in(0;x_1]$. Trong (1) thay $x=x_1$, $y=x_1$, ta thu được

$$f^2(x_1)=\beta f(x_1+x_1f(x_1))\Rightarrow \beta^2=\beta f((\beta+1)x_1)\Rightarrow \beta=f((\beta+1)x_1).$$

Lập luận tương tự ta được: $f(x)=\beta, \forall x\in(0;(\beta+1)x_1]$.
Tiếp tục quá trình này, theo nguyên lý quy nạp ta thu được

$$f(x)=\beta, \forall x\in(0;(\beta+1)^n x_1], \ n=1,2, \tag{2}$$

Do $\lim\limits_{n\to+\infty}(\beta+1)^n x_1=+\infty$, nên với mọi $x>0$, tồn tại $n_0\in\mathbb{N}^*$, sao cho $x\in(0;(\beta+1)^{n_0}x_1]$, theo (2) suy ra $f(x)=\beta$. Vậy $f(x)=\beta, \forall x>0$, thử lại thấy đúng. Ta có kết luận: Hàm số duy nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$f(x)=\beta, \forall x\in(0;+\infty).$$

Bài toán 5.60. *Tìm tất cả các hàm số $f:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$ thỏa mãn*

$$f(f(x)-x)=2x, \ \forall x\ge 0. \tag{1}$$

Giải. Từ giả thiết suy ra $f(x)\ge x, \ \forall x\ge 0$, do đó

$$f(f(x)-x)\ge f(x)-x\Rightarrow 2x\ge f(x)-x\Rightarrow f(x)\le 3x, \ \forall x\ge 0.$$

Như vậy ta thu được: $x\le f(x)\le 3x, \ \forall x\ge 0$. (2)
Xét hai dãy số (a_n), (b_n) như sau: $a_1=1$, $b_1=3$ và

$$a_{n+1}=\frac{b_n+2}{b_n}, \ b_{n+1}=\frac{a_n+2}{a_n}. \tag{3}$$

Ta có $a_{n+1}-b_{n+1}=\dfrac{b_n+2}{b_n}-\dfrac{a_n+2}{a_n}=\dfrac{2(a_n-b_n)}{a_nb_n}$, từ đây kết hợp với $a_1<b_1$ suy ra $a_n\le b_n, \ \forall n=1,2,\ldots$ Dễ thấy $a_n>0$ và $b_n>0$. Ta sẽ chứng minh

bằng quy nạp rằng (a_n) là dãy tăng và (b_n) là dãy giảm. Ta có $a_1=1$, $b_1=3$, $a_2=\dfrac{5}{3}$, $b_2=3$. Vậy $a_1\le a_2$, $b_1\ge b_2$. Giả sử $a_{n-1}\le a_n$ và $b_{n-1}\ge b_n$. Do hàm số $f(t)=\dfrac{t+2}{t}$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$ nên

$$a_{n+1}=\frac{b_n+2}{b_n}\ge\frac{b_{n-1}+2}{b_{n-1}}=a_n, \ b_{n+1}=\frac{a_n+2}{a_n}\le\frac{a_{n-1}+2}{a_{n-1}}=b_n.$$

Vậy theo nguyên lí quy nạp suy ra với mọi n thì $a_n\le a_{n+1}$ và $b_n\ge b_{n+1}$. Tóm lại ta đã có

$$1=a_1\le a_2\le\cdots\le a_{n-1}\le a_n\le b_n\le b_{n-1}\le\cdots\le b_1=3.$$

Dẫn tới hai dãy (a_n) và (b_n) cùng hội tụ. Đặt $a=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$, $b=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$, từ (3) cho $n\to+\infty$ ta được $\begin{cases} a=\dfrac{b+2}{b} \\ b=\dfrac{a+2}{a}. \end{cases}$ Giải hệ này với điều kiện $1\le a,b\le 3$ ta được $a=b=2$. Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=2$. Từ (2) ta có

$$a_1x\le f(x)\le b_1x, \ \forall x\ge 0. \tag{4}$$

Giả sử

$$a_nx\le f(x)\le b_nx, \ \forall x\ge 0. \tag{5}$$

Từ (5) thay x bởi $f(x)-x$ ta được

$$a_n[f(x)-x]\le f(f(x)-x)\le b_n[f(x)-x], \ \forall x\ge 0$$
$$\Rightarrow a_n[f(x)-x]\le 2x\le b_n[f(x)-x], \ \forall x\ge 0$$
$$\Rightarrow \frac{b_n+2}{b_n}x\le f(x)\le\frac{a_n+2}{a_n}x, \ \forall x\ge 0$$
$$\Rightarrow a_{n+1}x\le f(x)\le b_{n+1}x, \ \forall x\ge 0.$$

Theo nguyên lí quy nạp suy ra (5) đúng với mọi $n=1,2,\ldots$, do đó từ (5) cho $n\to+\infty$ ta được $2x\le f(x)\le 2x$, $\forall x\ge 0$ hay $f(x)=2x$, $\forall x\ge 0$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Lưu ý.

- Một lời giải thật là hay và đẹp, đặc biệt là kĩ thuật xây dựng hai dãy số phối hợp (a_n) và (b_n), để từ (2) ta thu được (5), rồi từ (5) cho $n\to+\infty$ để thu được bất đẳng thức chặt hơn bất đẳng thức (2), đó là

$$2x\le f(x)\le 2x, \ \forall x\ge 0.$$

- Bài toán 5.60 này chính là bài toán 5.7 (ở trang 520), vì vậy bạn đọc nên xem lại để củng cố, ghi nhận thêm phương pháp, kĩ thuật giải bằng cách sử dụng dãy số.

Chương 6

Một số phương trình hàm tổng quát. Bất phương trình hàm

6.1 Phương trình hàm với đối số biến đổi có tính quay vòng với hệ số biến thiên

6.1.1 Dạng $a(x)f(x) + b(x)f(p-x) = c(x)$

Trong mục này ta xét phương trình hàm

$$a(x)f(x) + b(x)f(p-x) = c(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

trong đó $f(x)$ là hàm cần tìm, p là hằng số thực cho trước, $a(x), b(x), c(x)$ là các hàm cho trước. Trong các tài liệu hiện hành người ta thường giải bằng cách trong (1) thay x bởi $p-x$ ta được

$$a(p-x)f(p-x) + b(p-x)f(x) = c(p-x),\ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra $f(x)$. Trong trường hợp có duy nhất một hàm số f thỏa mãn (1) thì lời giải trên sẽ đi đến kết quả (Xem lại mục 1.2.2: Phương trình chứa hai biểu thức $f(A)$, $f(B)$, ở trang 10). Tuy nhiên trong trường hợp có vô số hàm thỏa mãn (1) thì cách giải trên không có tác dụng, bởi vì lúc đó phương trình (2) cũng chính là phương trình (1). Sau đây ta sẽ đưa ra thuật toán để có thể tìm hàm f thỏa mãn (1) (kể cả trường hợp (1) có vô số nghiệm). Việc chứng minh tính đúng đắn của thuật toán này phải sử dụng đến công cụ toán tử đại số, một kiến thức vượt ra ngoài chương trình phổ thông, do đó không được trình bày ở đây. Có điều rất thú vị là thuật toán này dễ sử dụng và khi sử dụng thuật toán này để tìm được hàm f thì ta lại có thể trình bày lại lời giải hoàn toàn sơ cấp.

Bước 1. Tìm

$$\alpha(x) = \frac{1}{2}\left[a(x) + a(p-x) + b(x) + b(p-x)\right],$$

$$\beta(x) = \frac{1}{2}\left[a(x) - a(p-x) - b(x) + b(p-x)\right],$$

$$\alpha_1(x) = \frac{1}{2}\left[a(x) - a(p-x) + b(x) - b(p-x)\right],$$

$$\beta_1(x) = \frac{1}{2}\left[a(x) + a(p-x) - b(x) - b(p-x)\right].$$

Bước 2. Xác định $f_1(x)$ và $f_2(x)$ từ hệ

$$\begin{cases} \alpha(x)f_1(x) + \beta(x)f_2(x) = (P_1c)(x) \\ \alpha_1(x)f_1(x) + \beta_1(x)f_1(x) = (P_2c)(x), \end{cases} \tag{3}$$

Trong đó $(P_1c)(x) = \frac{1}{2}[c(x) + c(p-x)]$, $(P_2c)(x) = \frac{1}{2}[c(x) - c(p-x)]$.

Bước 3. Nếu hệ (3) vô nghiệm thì không có hàm số nào thỏa mãn (1). Nếu $f_1(x)$ và $f_2(x)$ thỏa mãn hệ (3) thì hàm f cần tìm là

$$f(x) = (P_1f_1)(x) + (P_2f_2)(x),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

trong đó: $(P_1f_1)(x) = \frac{1}{2}[f_1(x) + f_1(p-x)]$, $(P_2f_2)(x) = \frac{1}{2}[f_2(x) - f_2(p-x)]$.

Sau đây là một số bài toán áp dụng thuật toán trên.

Bài toán 6.1. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$(x^2+x+1)f(x) + (x^2-x+1)f(-x) = 2(x^2+1),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Hướng dẫn.

Cách 1. Ta có $a(x) = x^2+x+1, b(x) = x^2-x+1, c(x) = 2(x^2+1)$. Vậy

$$\alpha(x) = \frac{1}{2}\left[a(x) + a(-x) + b(x) + b(-x)\right] = 2x^2 + 2.$$

$$\beta(x) = \frac{1}{2}\left[a(x) - a(-x) - b(x) + b(-x)\right] = 2x.$$

$$\alpha_1(x) = \frac{1}{2}\left[a(x) - a(-x) + b(x) - b(-x)\right] = 0.$$

$$\beta_1(x) = \frac{1}{2}\left[a(x) + a(-x) - b(x) - b(-x)\right] = 0.$$

$$(P_1c)(x) = \frac{1}{2}[c(x) + c(-x)] = 2(x^2+1), (P_2c)(x) = \frac{1}{2}[c(x) - c(-x)] = 0.$$

Xét hệ

$$\begin{cases} (2x^2+2)f_1(x) + 2xf_2(x) = 2x^2 + 2 \\ 0f_1(x) + 0f_2(x) = 0. \end{cases}$$

Dễ thấy hệ trên có vô số nghiệm và tất cả các nghiệm đều có dạng

$$\begin{cases} f_1(x) = 1 - \dfrac{xf_2(x)}{x^2+1} \\ f_2(x) \text{ tùy ý.} \end{cases}$$

Do vậy

$$\begin{aligned}&(P_1f_1)(x)+(P_2f_2)(x)\\=&\frac{1}{2}\left[1-\frac{xf_2(x)}{x^2+1}+1+\frac{xf_2(-x)}{x^2+1}+f_2(x)-f_2(-x)\right]\\=&\frac{1}{2}\left[2+f_2(x)\left(1-\frac{x}{x^2+1}\right)+f_2(-x)\left(\frac{x}{x^2+1}-1\right)\right]\\=&1+\frac{x^2-x+1}{2(x^2+1)}[f_2(x)-f_2(-x)].\end{aligned}$$

Do đó, tất cả các hàm số cần tìm đều có dạng

$$f(x)=1+\frac{x^2-x+1}{2(x^2+1)}[f_2(x)-f_2(-x)],\forall x\in\mathbb{R},$$

trong đó f_2 là hàm số tùy ý, xác định trên $\mathbb{R}$.

Cách 2 (Lời giải sơ cấp). Ta có

$$(1)\Leftrightarrow f(x)=1+\frac{x^2-x+1}{2(x^2+1)}[f(x)-f(-x)],\forall x\in\mathbb{R} \tag{2}$$

Ta sẽ chứng minh (1) tương đương với

$$\begin{cases}f(x)=1+\dfrac{x^2-x+1}{2(x^2+1)}[f_2(x)-f_2(-x)],\forall x\in\mathbb{R}\\ f_2 \text{ là hàm số xác định trên } \mathbb{R}, \text{ tùy ý.}\end{cases} \tag{3}$$

Dễ thấy rằng nếu hàm f thỏa mãn (3) thì f thỏa mãn (1). Nếu hàm số f thỏa mãn (1) thì do có (2) nên f có dạng (3). Vậy tất cả các hàm số thỏa mãn đề bài đều có dạng

$$f(x)=1+\frac{x^2-x+1}{2(x^2+1)}[f_2(x)-f_2(-x)],\forall x\in\mathbb{R},$$

trong đó f_2 là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, tùy ý.

Cách 3. Với mọi $x\in\mathbb{R}$, thì (1) viết lại

$$\begin{aligned}&(x^2+x+1)f(x)+(x^2-x+1)f(-x)=(x^2+x+1)+(x^2-x+1)\\\Leftrightarrow&(x^2+x+1)f(x)-(x^2+x+1)=(x^2-x+1)-(x^2-x+1)f(-x).\end{aligned}$$

Do đó nếu xét hàm số g như sau: $g(x)=(x^2+x+1)f(x)-(x^2+x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, thì (1) tương đương với $g(x)=-g(-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Từ đây sử dụng bài toán 1.52 ở trang 31, ta được $g(x)=\frac{1}{2}[h(x)-h(-x)]$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Vậy hàm số cần tìm có dạng:

$$f(x)=\frac{2(x^2+x+1)+[h(x)-h(-x)]}{2(x^2+x+1)},\ \forall x\in\mathbb{R},$$

trong đó h là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, tùy ý.

Lưu ý. Trong cách giải 3, ta đã đặt ẩn phụ để đưa phương trình hàm với hệ số biến thiên về phương trình hàm với hệ số hằng, cách này sơ cấp và dễ hiểu, tuy nhiên có một số bài toán, không tồn tại phép đổi biến nào có thể đưa được về phương trình với hệ số hằng.

Bài toán 6.2. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$(x^2+x+2)f(x)+(x^2-x+2)f(-x)=2(x^2+2),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

6.1.2 Dạng $a(x)f(x)+b(x)f(h(x))=c(x)$

Trong mục này ta xét phương trình hàm

$$a(x)f(x)+b(x)f(h(x))=c(x),\ \forall x\in D. \tag{1}$$

trong đó f là hàm cần tìm, $a(x),b(x),c(x),h(x)$ là các hàm cho trước và hàm số h thỏa mãn điều kiện $h(h(x))=x$, $\forall x\in D$.

Thuật toán để giải phương trình hàm (1).

Bước 1. Tìm

$$\begin{aligned}\alpha(x)&=\frac{1}{2}[a(x)+a(h(x))+b(x)+b(h(x))],\\\beta(x)&=\frac{1}{2}[a(x)-a(h(x))-b(x)+b(h(x))],\\\alpha_1(x)&=\frac{1}{2}[a(x)-a(h(x))+b(x)-b(h(x))],\\\beta_1(x)&=\frac{1}{2}[a(x)+a(h(x))-b(x)-b(h(x))].\end{aligned}$$

Bước 2. Xác định $f_1(x)$ và $f_2(x)$ từ hệ

$$\begin{cases}\alpha(x)f_1(x)+\beta(x)f_2(x)=(P_1c)(x)\\ \alpha_1(x)f_1(x)+\beta_1(x)f_1(x)=(P_2c)(x),\end{cases} \tag{2}$$

Trong đó

$$(P_1c)(x)=\frac{1}{2}[c(x)+c(h(x))],\ (P_2c)(x)=\frac{1}{2}[c(x)-c(h(x))].$$

Bước 3. Nếu hệ (2) vô nghiệm thì không có hàm số nào thỏa mãn (1). Nếu $f_1(x)$ và $f_2(x)$ thỏa mãn hệ (2) thì hàm f cần tìm là

$$f(x)=(P_1f_1)(x)+(P_2f_2)(x),\ \forall x\in D,$$

trong đó

$$(P_1f_1)(x)=\frac{1}{2}[f_1(x)+f_1(h(x))],\ (P_2f_2)(x)=\frac{1}{2}[f_2(x)-f_2(h(x))].$$

Nhận xét 1. *Khi $h(x) = p - x$ thì phương trình hàm ta đang xét sẽ trở thành phương trình hàm đã xét ở mục 6.1.1.*

Chú ý 1. *Nếu hai hàm số $a(x)$ và $b(x)$ thỏa mãn điều kiện*

$$a(x) = \frac{k(x)}{k(h(x))}b(x),\ \text{với } k(x) \neq 0, \forall x \in D.$$

thì phương trình hàm

$$a(x)f(x) + b(x)f(h(x)) = c(x),\ \forall x \in D$$

(với hàm h thỏa mãn điều kiện $h(h(x)) = x$) sẽ có vô số nghiệm.

Bài toán 6.3. *Tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn điều kiện*

$$x^2 f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x,\ \forall x \neq 0. \tag{1}$$

Hướng dẫn.

Cách 1. Ta có

$$a(x) = x^2, b(x) = 1, c(x) = 2x, h(x) = \frac{1}{x}.$$

Vậy

$$\alpha(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) = \frac{(x^2+1)^2}{2x^2}, \beta(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^4-1}{2x^2}$$

$$\alpha_1(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^4-1}{2x^2}, \beta_1(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) = \frac{(x^2-1)^2}{2x^2}$$

$$(P_1 c)(x) = \frac{1}{2}\left(2x + \frac{2}{x}\right) = \frac{x^2+1}{x}, (P_2 c)(x) = \frac{1}{2}\left(2x - \frac{2}{x}\right) = \frac{x^2-1}{x}.$$

Trong (1) lấy $x = 1$ ta được $f(1) = 1$, lấy $x = -1$ ta được $f(-1) = -1$. Xét hệ ẩn là $(f_1(x), f_2(x))$ (với điều kiện $x \neq 1$ và $x \neq -1$)

$$\begin{cases} \frac{(x^2+1)^2}{2x^2} f_1(x) + \frac{x^4-1}{2x^2} f_2(x) = \frac{x^2+1}{x} \\ \frac{x^4-1}{2x^2} f_1(x) + \frac{(x^2-1)^2}{2x^2} f_2(x) = \frac{x^2-1}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)f_1(x) + (x^2-1)f_2(x) = 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_2(x) \text{ tùy ý} \\ f_1(x) = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{(1-x^2)f_2(x)}{x^2+1} \end{cases}$$

Vậy tất cả các hàm số cần tìm đều có dạng

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\left[f_2(x) - f_2\left(\frac{1}{x}\right)\right], \forall x \neq 0,$$

trong đó f_2 là hàm xác định trên $\mathbb{R}$, tùy ý (do $f(1) = 1$ và $f(-1) = -1$ cũng thỏa mãn công thức này).

Cách 2 (Lời giải sơ cấp thứ nhất). Ta có (1) tương đương với

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\left[f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)\right], \forall x \neq 0. \tag{2}$$

Ta sẽ chứng minh (1) tương đương với

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\left[f_2(x) - f_2\left(\frac{1}{x}\right)\right], \forall x \neq 0 \\ f_2 \text{ là hàm xác định trên } \mathbb{R}, \text{ tùy ý.} \end{cases} \tag{3}$$

Ta kiểm tra được mọi hàm f có dạng (3) đều thỏa (1). Nếu hàm f thỏa (1) thì do (2) suy ra f có dạng (3). Vậy tất cả các hàm số cần tìm đều có dạng

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\left[f_2(x) - f_2\left(\frac{1}{x}\right)\right], \forall x \neq 0,$$

trong đó f_2 là hàm xác định trên $\mathbb{R}$, tùy ý.

Cách 3 (Lời giải sơ cấp thứ hai). Ta có

$$(1) \Leftrightarrow xf(x) + \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right) = 2, \forall x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = 2, \forall x \neq 0 \ \left(\text{với } g(x) = xf(x), \forall x \neq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow h(x) + h\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \forall x \neq 0 \ \left(\text{với } h(x) = -1 + g(x), \forall x \neq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow h(x) = -h\left(\frac{1}{x}\right), \forall x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow h(x) = \frac{1}{2}\left[h(x) - h\left(\frac{1}{x}\right)\right], \forall x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow h(x) = \frac{1}{2}\left[k(x) - k\left(\frac{1}{x}\right)\right], \forall x \neq 0$$

với k là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, tùy ý. Vậy hàm tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài đều có dạng

$$f(x) = \frac{2 + k(x) - k\left(\frac{1}{x}\right)}{2x}, \forall x \neq 0,$$

với k là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, tùy ý.

Bài toán 6.4. *Tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn điều kiện*

$$(2+\sin x)f(x)+\left(2+\sin\frac{x}{x-1}\right)f\left(\frac{x}{x-1}\right)=0,\ \forall x\neq 1.$$

Bài toán 6.5. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:*

$$\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-20x+101}-2\right)f(10-x)$$
$$+\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-20x+101}+2\right)f(x)=4x-12,\forall x\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn đề bài, khi đó ta có (1). Trong (1) lấy $x=5$ ta được $0=8$. Điều vô lí này chứng tỏ không có hàm số nào thỏa mãn đề bài.

Bài toán 6.6. *Tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn điều kiện*

$$2^{x-1}f(x)+2^{\frac{-2}{x-1}}f\left(\frac{x-3}{x-1}\right)=1,\ \forall x\neq 1.$$

Bài toán 6.7. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\setminus\{0,-1\}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x)+xf\left(\frac{1}{x}\right)=x+1,\ \forall x\notin\{0,-1\}. \quad (1)$$

Giải. Ta có

$$(1)\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}f(x)+\frac{x}{x+1}f(\frac{1}{x})=1,\ \forall x\notin\{0,-1\}$$
$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{x}{x+1}\right)f(x)+\frac{x}{x+1}f(\frac{1}{x})=1,\ \forall x\notin\{0,-1\}$$
$$\Leftrightarrow f(x)=1+\frac{x}{x+1}\left[f(x)-f(\frac{1}{x})\right],\ \forall x\notin\{0,-1\}. \quad (2)$$

Ta sẽ chứng minh (1) tương đương với

$$f(x)=1+\frac{x}{x+1}\left[g(x)-g(\frac{1}{x})\right],\ \forall x\notin\{0,-1\}, \quad (3)$$

với g là hàm số xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$, tùy ý. Nếu hàm f xác định bởi (3) thì

$$f(\frac{1}{x})=1+\frac{1}{x+1}\left[g(\frac{1}{x})-g(x)\right],\ \forall x\notin\{0,-1\}$$

do đó

$$f(x)+xf\left(\frac{1}{x}\right)=x+1,\ \forall x\notin\{0,-1\},$$

suy ra hàm f thỏa mãn (1). Nếu hàm f thỏa mãn (1) thì do (2) nên suy ra f có dạng (3). Vậy tất cả các hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài đều có dạng

$$f(x)=1+\frac{x}{x+1}\left[g(x)-g(\frac{1}{x})\right],\ \forall x\notin\{0,-1\},$$

với g là hàm số xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$, tùy ý.

Bài toán 6.8. *Tìm tất cả các dãy $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ tuần hoàn (cộng tính) chu kỳ 2 và thỏa mãn*

$$[2+(-1)^n]x_n+[2-(-1)^n]x_{n+1}=4,\ \forall n=0,1,2,\dots$$

Bài toán 6.9. *Tìm tất cả các dãy $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ tuần hoàn nhân tính chu kỳ 4 và thỏa mãn*

$$[1+\sin(2\pi\log_4 n)-\sin(2\pi\log_4 2n)]x_n$$
$$+[-1+\sin(2\pi\log_4 n)-\sin(2\pi\log_4 2n)]x_{2n}$$
$$=2[\cos(2\pi\log_4 n)-\cos(2\pi\log_4 2n)],\ \forall n=1,2,\dots$$

6.1.3 $f(x)+b(x)[f(x)+f(h(x))+f\big(h(h(x))\big)=c(x)$

Trong mục này ta xét phương trình hàm

$$f(x)+b(x)\left[f(x)+f\big(h(x)\big)+f\Big(f(h(x))\Big)\right]=c(x),\ \forall x\in D. \quad (1)$$

trong đó f là hàm cần tìm, $b(x),c(x),h(x)$ là các hàm cho trước và hàm số h thỏa mãn điều kiện $h\Big(h(h(x))\Big)=x,\ \forall x\in D$.

Thuật toán.

Bước 1. Tìm

$$\hat{b}(x)=\frac{1}{3}\left[b(x)+b\big(h(x)\big)+b\Big(h(h(x))\Big)\right],$$
$$\hat{c}(x)=\frac{1}{3}\left[c(x)+c\big(h(x)\big)+c\Big(h(h(x))\Big)\right].$$

Bước 2. Tìm $g(x)$ từ phương trình

$$g(x)+\hat{b}(x)g(x)=\hat{c}(x).$$

Bước 3. Tất cả các hàm số cần tìm đều có dạng

$$f(x)=c(x)-b(x)\left[g(x)+g\big(h(x)\big)+g\Big(h(h(x))\Big)\right].$$

Bài toán 6.10. *Tìm tất cả các dãy* $\{x_n\}(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *tuần hoàn (cộng tính) chu kỳ 3 và thỏa mãn: Với mọi* $n = 0, 1, 2, \ldots$, *ta có*

$$[2 + \cos\frac{2n\pi}{3}]x_n + [-1 + \cos\frac{2n\pi}{3}]x_{n+1} + [-1 + \cos\frac{2n\pi}{3}]x_{n+2} = 3\sin\frac{2n\pi}{3}. \quad (1)$$

Giải. Dễ thấy (1) tương đương với

$$x_n = \sin\frac{2n\pi}{3} + \frac{1}{3}\left(1 - \cos\frac{2n\pi}{3}\right)(x_n + x_{n+1} + x_{n+2}), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Ta chứng minh (1) tương đương với

$$x_n = \sin\frac{2n\pi}{3} + \frac{1}{3}\left(1 - \cos\frac{2n\pi}{3}\right)(y_n + y_{n+1} + y_{n+2}), \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

trong đó $(y_n)(n = 0, 1, 2, \ldots)$ là dãy số tuần hoàn (cộng tính) chu kỳ 3, tùy ý.

Giả sử dãy $\{x_n\}(n = 0, 1, 2, \ldots)$ có dạng (3). Khi đó vì $y_n = y_{n+3}, \forall n \in \mathbb{N}$ nên

$$x_{n+1} = \sin\frac{2(n+1)\pi}{3} + \frac{1}{3}\left[1 - \cos\frac{2(n+1)\pi}{3}\right](y_n + y_{n+1} + y_{n+2}), \forall n \in \mathbb{N}$$

$$x_{n+2} = \sin\frac{2(n+2)\pi}{3} + \frac{1}{3}\left[1 - \cos\frac{2(n+2)\pi}{3}\right](y_n + y_{n+1} + y_{n+2}), \forall n \in \mathbb{N}$$

$$x_{n+1} + x_{n+2} = -\sin\frac{2n\pi}{3} + \frac{1}{3}\left(2 + \cos\frac{2n\pi}{3}\right)(y_n + y_{n+1} + y_{n+2}), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Do đó

$$\left(2 + \cos\frac{2n\pi}{3}\right)x_n + \left(-1 + \cos\frac{2n\pi}{3}\right)(x_{n+1} + x_{n+2})$$

$$= \left(2 + \cos\frac{2n\pi}{3}\right)\left[\sin\frac{2n\pi}{3} + \frac{1}{3}\left(1 - \cos\frac{2n\pi}{3}\right)(y_n + y_{n+1} + y_{n+2})\right]$$

$$+ \left(-1 + \cos\frac{2n\pi}{3}\right)\left[-\sin\frac{2n\pi}{3} + \frac{1}{3}\left(2 + \cos\frac{2n\pi}{3}\right)(y_n + y_{n+1} + y_{n+2})\right]$$

$$= 2\sin\frac{2n\pi}{3} + \cos\frac{2n\pi}{3}\sin\frac{2n\pi}{3} + \sin\frac{2n\pi}{3} - \cos\frac{2n\pi}{3}\sin\frac{2n\pi}{3}$$

$$+ \frac{1}{3}(y_n + y_{n+1} + y_{n+2}).0 = 3\sin\frac{2n\pi}{3}, \forall n = 0, 1, 2, \ldots$$

Vậy dãy $\{x_n\}(n = 0, 1, 2, \ldots)$ thỏa mãn (1).

Giả sử dãy số $\{x_n\}(n = 0, 1, 2, \ldots)$ thỏa mãn (1). Khi đó vì có (2) nên dãy

$\{x_n\}(n = 0, 1, 2, \ldots)$ có dạng (3).

Kết luận: Tất cả các dãy số thỏa mãn yêu cầu đề bài đều có dạng

$$x_n = \sin\frac{2n\pi}{3} + \frac{1}{3}(1 - \cos\frac{2n\pi}{3})(y_n + y_{n+1} + y_{n+2}), \ \forall n = 0, 1, 2, \ldots,$$

trong đó $(y_n)(n = 0, 1, 2, \ldots)$ là dãy số tuần hoàn (cộng tính) chu kỳ 3, tùy ý.

Bài toán 6.11. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{R}\setminus\{1, 2\} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn điều kiện: Với mọi* $x \in \mathbb{R}\setminus\{1, 2\}$ *ta có*

$$(x^2 - 5x + 6)f(x) - \frac{x^2 - 2x}{x - 1}f\left(\frac{2x - 3}{x - 1}\right) - (2x - 3)f\left(\frac{x - 3}{x - 2}\right) = 3x - 6.$$

Hướng dẫn. Giả sử f là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Khi đó

$$(x - 3)f(x) - \frac{x}{x - 1}f\left(\frac{2x - 3}{x - 1}\right) - \frac{2x - 3}{x - 2}f\left(\frac{x - 3}{x - 2}\right) = 3, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1, 2\}. \quad (1)$$

Xét hàm số $g : \mathbb{R}\setminus\{1, 2\} \to \mathbb{R}$ như sau: $g(x) = (x - 3)f(x), \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1, 2\}$. Từ (1) ta có

$$g(x) + g\left(\frac{2x - 3}{x - 1}\right) + g\left(\frac{x - 3}{x - 2}\right) = 3, \forall x \in r\setminus\{1, 2\}$$

$$\Leftrightarrow h(x) + h\left(\frac{2x - 3}{x - 1}\right) + h\left(\frac{x - 3}{x - 2}\right) = 0, \forall x \in r\setminus\{1, 2\}. \quad (2)$$

với h là hàm số $h : \mathbb{R}\setminus\{1, 2\} \to \mathbb{R}$, $h(x) = g(x) - 1, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1, 2\}$. Ta có

$$(2) \Leftrightarrow h(x) = \frac{1}{3}\left[2h(x) - h\left(\frac{2x - 3}{x - 1}\right) - h\left(\frac{x - 3}{x - 2}\right)\right], \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1, 2\}. \quad (3)$$

Ta sẽ chứng minh

$$(2) \Leftrightarrow h(x) = \frac{1}{3}\left[2k(x) - k\left(\frac{2x - 3}{x - 1}\right) - k\left(\frac{x - 3}{x - 2}\right)\right], \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1, 2\} \quad (4)$$

(trong đó k là hàm số xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1, 2\}$, tùy ý). Dễ thấy mọi hàm số có dạng (4) đều thỏa mãn (2). Ngược lại, mọi hàm thỏa mãn (2) thì do (3) nên có dạng (4). Vậy (4) $\Leftrightarrow$ (2).

6.2 Bất phương trình hàm

Bất phương trình hàm là một vấn đề khá lạ ngay cả với học sinh chuyên toán. Cũng như chứng minh bất đẳng thức khó hơn chứng minh đẳng thức,

giải bất phương trình khó hơn giải phương trình, phép giải bất phương trình hàm cũng khó hơn phép giải phương trình hàm. Trong bài này ta sẽ trình bày một số phương pháp giải bất phương trình hàm thông dụng.

6.2.1 Sử dụng phép thế

Cũng như trong phương trình hàm, phép thế là một kỹ thuật đơn giản mà rất hữu ích để thu được các hệ quả hướng đến việc xác định được hàm số. Chú ý là để xác định được giá trị của hàm số f tại một điểm x_0 từ một bất đẳng thức, ta cần kẹp hai phía giá trị của $f(x_0)$.

Bài toán 6.12 (Pan African Olympiad 2008). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f(x+y) \le f(x) + f(y) \le x + y, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Từ (1) cho $x = y = 0$, ta được:

$$f(0) \le 2f(0) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le f(0) \le 0 \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

Từ (1) lấy $y = -x$, ta được:

$$\begin{aligned} &0 \le f(x) + f(-x) \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &f(x) + f(-x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) lấy $y = 0$, ta được: $f(x) \le x, \forall x \in \mathbb{R}$. (3)

Sử dụng (2) và (3), ta được: $-f(x) = f(-x) \le -x \Rightarrow f(x) \ge x, \forall x \in \mathbb{R}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy có đúng một hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là: $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 6.13 (Olympic Toán Liên Bang Nga - 2000). *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \ge 3f(x+2y+3z), \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) cho $y = z = 0$ ta được $2f(x) + f(0) \ge 3f(x)$, suy ra

$$f(x) \le f(0), \ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Lại cho $y = x$ và $z = -x$ ta được $f(2x) + 2f(0) \ge 3f(0)$, suy ra

$$f(x) \ge f(0), \ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta được $f(x) = f(0) = C, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy $f(x) = C, \forall x \in \mathbb{R}$ (C là hằng số, tùy ý) là hàm số cần tìm.

Bài toán 6.14. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*
(1) $f(x+y) \ge f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.
(2) $f(x) \ge 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Giải. Trong (1) lấy $x = y = 0$ được $f(0) \ge 2f(0) \Leftrightarrow f(0) \le 0$. Theo (2) lại có $f(0) \ge 0$. Vậy $f(0) = 0$. Do đó

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) \ge f(x) + f(-x) \overset{\text{do (2)}}{\ge} 0 \Rightarrow f(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy $f(x) \equiv 0$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 6.15. *Cho trước $a \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*
(1) $f(x+y) \ge f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.
(2) $f(x) \ge ax, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Giải. Đặt $f(x) = ax + h(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết (1) suy ra

$$\begin{aligned} &a(x+y) + h(x+y) \ge ax + h(x) + ay + h(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &h(x+y) \ge h(x) + h(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3)$$

Từ giả thiết (2) ta có

$$h(x) \ge 0, \ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Do (3) và (4) nên áp dụng bài toán 6.14, ta được $h(x) \equiv 0 \Rightarrow f(x) \equiv ax$. Thử lại thấy hàm số $f(x) \equiv ax$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 6.16. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*
(1) $f(x+y) \le f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.
(2) $f(x) \le 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Giải. Trong (1) lấy $x = y = 0$ được $f(0) \le 2f(0) \Leftrightarrow f(0) \ge 0$. Theo (2) lại có $f(0) \le 0$. Vậy $f(0) = 0$. Do đó

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) \le f(x) + f(-x) \overset{\text{do (2)}}{\le} 0 \Rightarrow f(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy $f(x) \equiv 0$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 6.17 (Eotvos - Kurschak 1979). *Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:*
(1) $f(x+y) \le f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.
(2) $f(x) \le 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Chứng minh rằng $f(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Giải. Đặt $f(x) = x + h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết (1) suy ra

$$\begin{aligned} &x + y + h(x + y) \le x + h(x) + y + h(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &h(x + y) \le h(x) + h(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3}$$

Từ giả thiết (2): $f(x) \le x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ta có: $h(x) \le 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (4)
Do (3) và (4) nên áp dụng bài toán 6.16, ta được $h(x) \equiv 0 \Rightarrow f(x) \equiv x$. Thử lại thấy hàm số $f(x) \equiv x$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 6.18. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:*
(1) $f(x + y) \le f(x) + f(y) - 4$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
(2) $f(x) \le 4 + 2017x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Giải. Đặt $f(x) = 2017x + 4 + h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết (1) suy ra

$$\begin{aligned} &2017(x + y) + h(x + y) \le 2017x + h(x) + 2017y + h(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &h(x + y) \le h(x) + h(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3}$$

Từ giả thiết (2) ta có: $h(x) \le 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (4)
Do (3) và (4) nên áp dụng bài toán 6.16, ta được $h(x) \equiv 0 \Rightarrow f(x) \equiv 2017x + 4$.
Thử lại thấy hàm số $f(x) \equiv 2017x + 4$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 6.19 (Olympic toán Sinh viên toàn quốc năm 2004). *Tìm các hàm số f thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*
(1) $f(x) \ge e^{2004x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(2) $f(x + y) \ge f(x).f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Giải. Đặt $f(x) = e^{2004x} g(x)$. Từ (1) suy ra $g(x) \ge 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Từ (2) ta có

$$\begin{aligned} &e^{2004(x+y)} g(x + y) \ge e^{2004x} g(x).e^{2004y} g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &g(x + y) \ge g(x).g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Với $x = y = 0$ ta được $\begin{cases} g(0) \ge [g(0)]^2 \\ g(0) \ge 1 \end{cases} \Rightarrow g(0) = 1$. Suy ra

$$1 = g(0) = g\left(x + (-x)\right) \ge g(x)g(-x) \ge 1,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó $g(x) \equiv 1 \Rightarrow f(x) \equiv e^{2004x}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 6.20 (Đề thi Olympic 30/04/2013 toán 10). *Cho hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn các điều kiện: $f(1) = 1$ và:*

$$f(n + 3) \le f(n) + 3,\ \forall n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$
$$f(n + 2012) \ge f(n) + 2012,\ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Tính $f(2013)$.

Giải. Ta có:

$$\begin{aligned} f(n + 2013) &= f\left((n + 3.670) + 3\right) \overset{\text{do (1)}}{\le} f(n + 3.670) + 3 \\ &\le \cdots \le f(n) + 3.671 = f(n) + 2013. \end{aligned} \tag{3}$$

$$f(n + 2013) = f\left((n + 1) + 2012\right) \overset{\text{do (2)}}{\ge} f(n + 1) + 2012. \tag{4}$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$f(n + 1) + 2012 \le f(n) + 2013 \Rightarrow f(n + 1) \le f(n) + 1,\ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Sử dụng (5) liên tiếp ta được:

$$f(n + 2012) \le f(n) + 2012,\ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Từ (6) và (2) suy ra: $f(n + 2012) = f(n) + 2012$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. (7)
Từ (7) cho $n = 1$ và sử dụng $f(1) = 1$, ta được: $f(2013) = 2013$.

Bài toán 6.21 (Cuộc thi toán vùng Flanders nước Bỉ-1999). *Xác định tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện*
1) *Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$: $2f(x) - g(x) = f(y) - y$*
2) *Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $f(x)g(x) \ge x + 1$*

Giải.
Cách 1. Thay $x = y$ vào 1) ta được $2f(x) - g(x) = f(x) - x, \forall x \in \mathbb{R}$, hay

$$f(x) = g(x) - x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay $f(x) = g(x) - x$ vào 1) ta được

$$\begin{aligned} &2[g(x) - x)] - g(x) = g(y) - y - y, \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &g(x) = 2x - 2y + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Thay $y = 0$ vào ta được $g(x) = 2x + a$, với $a = g(0)$. Từ đó $f(x) = x + a$.
Thay $f(x) = x + a$ và $g(x) = 2x + a$ vào 2) ta được

$$\begin{aligned} &(x + a)(2x + a) \ge x + 1, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &2x^2 + (3a - 1)x + a^2 - 1 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &\Delta = 9a^2 - 6a + 1 - 8a^2 + 8 \le 0 \Leftrightarrow (a - 3)^2 \le 0 \Leftrightarrow a = 3. \end{aligned}$$

Vậy $f(x) = x + 3$ và $g(x) = 2x + 3$. Thử lại thấy thỏa mãn 1) và 2). Tóm lại

$$f(x) = x + 3, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } g(x) = 2x + 3, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cách 2. Đặt $f(0) = a$. Thay $y = 0$ vào 1) ta được

$$2f(x) - g(x) = a, \forall x \in \mathbb{R}$$

Thay $x = y$ vào 1) ta được $2f(x) - g(x) = f(x) - x, \forall x \in \mathbb{R}$, hay

$$f(x) = g(x) - x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy ta có hệ

$$\begin{cases} 2f(x) - g(x) = a \\ f(x) - g(x) = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x + a \\ g(x) = 2x + a \end{cases}$$

Đến đây làm tương tự như cách 1.

Bài toán 6.22. *Cho trước các số thực a, c, d, chứng tỏ rằng tồn tại nhiều nhất một hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:*

$$f(ax + c) + d \le x \le f(x + d) + c, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Nếu $a = 0$ thì từ (1) suy ra: $f(c) + d \le x, \forall x \in \mathbb{R}$. Điều này không đúng, chẳng hạn khi $x = f(c) + d - 1$. Vậy $a \neq 0$. Trong (1) thay x bởi $\frac{x - c}{a}$, ta được: $f(x) + d \le \frac{x - c}{a}, \forall x \in \mathbb{R}$. (2)

Trong (1) thay x bởi $x - d$, ta được: $x - d \le f(x) + c, \forall x \in \mathbb{R}$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra, với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì:

$$x - d - c \le f(x) \le \frac{x - c}{a} - d \Rightarrow x - d - c \le \frac{x - c}{a} - d \Rightarrow x - c \le \frac{x - c}{a}. \quad (4)$$

Nếu $a = 1$ thì (4) đúng. Nếu $a \neq 1$ thì ta luôn có thể chọn được x để cho (4) không đúng. Vậy từ (4) suy ra $a = 1$. Lúc này (1) trở thành:

$$\begin{aligned} & f(x + c) + d \le x \le f(x + d) + c, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow & \begin{cases} f(x + c) + d \le x, \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x + d) + c \ge x, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) + d \le x - c, \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) + c \ge x - d, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \\ \Rightarrow & x - d - c \le f(x) \le x - d - c, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow & f(x) = x - d - c, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Thử lại ta thấy hàm số $f(x) = x - d - c, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn (1), suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 6.23 (Olympic toán Châu Á Thái Bình Dương -1994). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, thỏa mãn các điều kiện*

$$f(1) = 1;\ f(-1) = -1;\ f(x) \le f(0), \forall x \in (0; 1);$$
$$f(x + y) \ge f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R};\ f(x + y) \le f(x) + f(y) + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Giải. Theo giả thiết ta có

$$f(x + 1) \ge f(x) + f(1) = f(x) + 1.$$

$$f(x) = f(x + 1 - 1) \ge f(x + 1) + f(-1) = f(x + 1) - 1.$$

Vậy

$$f(x) + 1 \le f(x + 1) \le f(x) + 1 \Rightarrow f(x + 1) = f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta có $1 = f(1) = f(0 + 1) = f(0) + 1 \Rightarrow f(0) = 0$. Vậy

$$1 = f(1) = f(x + 1 - x) \le f(x) + f(1 - x) + 1 \Rightarrow f(x) + f(1 - x) \ge 0 \quad (*)$$

Với $0 < x < 1$, ta có $0 < 1 - x < 1$, suy ra

$$f(x) + f(1 - x) \le f(0) + f(0) = 0 \overset{\text{do } (*)}{\Rightarrow} f(x) + f(1 - x) = 0.$$

Vậy $f(x) = f(1 - x) = 0, \forall x \in (0; 1)$. Tóm lại:

$$f(x) = 0, \text{ với } 0 \le x < 1;\ f(x + 1) = f(x) + 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $f(x) = [x], \forall x \in \mathbb{R}$, thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 6.24. *Cho hàm số $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện*

$$|f(m + n) - f(m)| \le \frac{m}{n}, \ \forall m, n \in \mathbb{Q}^+. \quad (1)$$

Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{k} \left|f(2^k) - f(2^i)\right| \le \frac{k(k+1)}{2}, \ \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Giải. Trong (1) thay $m = n = 2^i$, ta được $\left|f(2^{i+1}) - f(2^i)\right| \le 1$. Với $i = \overline{1, k}$, ta có

$$\begin{aligned} & \left|f(2^k) - f(2^i)\right| \\ & \le \left|f(2^k) - f(2^{k-1})\right| + \left|f(2^{k-1}) - f(2^{k-2})\right| + \cdots + \left|f(2^{i+1}) - f(2^i)\right| \le k - i \end{aligned}$$

Vậy $\sum_{i=1}^{k} \left|f(2^k) - f(2^i)\right| \le \sum_{i=1}^{k} (k - i) = \frac{k(k-1)}{2}$.

Bài toán 6.25. *Cho số k là số thực dương. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: Với mọi số thực x, y, z thì*

$$f(xy) + f(yz) + f(zx) - k\left[f(x)f(yz) + f(y)f(zx) + f(z)f(xy)\right] \ge \frac{3}{4k}. \quad (1)$$

Giải. Trong (1) cho $x = y = z = 0$ ta được

$$f(0) - k[f(0)]^2 \ge \frac{1}{4k} \Leftrightarrow \frac{4k^2[f(0)]^2 - 4kf(0) + 1}{4k} \le 0$$

$$\Leftrightarrow [2kf(0)-1]^2 \le 0 \Leftrightarrow 2kf(0)-1=0 \Leftrightarrow f(0)=\frac{1}{2k}.$$

Tương tự ta được $f(1)=\dfrac{1}{2k}$. Trong (1) cho $y=z=0$ ta được

$$3f(0)-k\left[f(x)f(0)+2f^2(0)\right] \ge \frac{3}{4k} \Rightarrow \frac{3}{2k}-k\left[\frac{f(x)}{2k}+\frac{1}{2k^2}\right] \ge \frac{3}{4k}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2k}-\frac{f(x)}{2}-\frac{1}{2k} \ge \frac{3}{4k} \Rightarrow \frac{f(x)}{2} \le \frac{1}{4k} \Rightarrow f(x) \le \frac{1}{2k},\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Trong (1) cho $x=y$ và $z=1$ ta được

$$f(x^2)+2f(x)-k\left[2f^2(x)+f(1)f(x^2)\right] \ge \frac{3}{4k},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x^2)+2f(x)-2kf^2(x)-\frac{f(x^2)}{2} \ge \frac{3}{4k},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 4kf(x^2)+8kf(x)-8k^2f^2(x)-2kf(x^2) \ge 3,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 2kf(x^2)+8kf(x) \ge 3+8k^2f^2(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Từ (2) suy ra $2kf(x^2) \le 1$, vậy từ (3) ta có

$$3+8k^2f^2(x) \le 1+8kf(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 8k^2f^2(x)-8kf(x)+2 \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow [2kf(x)-1]^2 \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2kf(x)-1=0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2k},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại thấy hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2k},\ \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Lưu ý. Do ta dự đoán $f(x)=\dfrac{1}{2k}$ nên trong các biến đổi ta đều hướng tới biểu thức $[2kf(x)-1]$.

Bài toán 6.26. *Xác định tất cả các hàm số* $f:(1;+\infty)\to(1;+\infty)$ *thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(x^my^n\right) \le [f(x)]^{\frac{1}{4m}}.[f(y)]^{\frac{1}{4n}},\ \forall x>1,\ y>1\ \ (m>0,\ n>0). \tag{1}$$

Giải. Trong (1) lấy $y=x>1$ và $m=n=\dfrac{s}{2}>0$ ta được

$$f(x^s) \le [f(x)]^{\frac{1}{s}},\ \forall x \in (1;+\infty),\ \forall s>0. \tag{2}$$

Từ (2) ta được $f(x)=f\left((x^s)^{\frac{1}{s}}\right) \le [f(x^s)]^s$, suy ra

$$f(x) \le [f(x^s)]^s,\ \forall x \in (1;+\infty),\ \forall s>0. \tag{3}$$

Do $f(x)>1,\ \forall x>1$ và hàm số $g(x)=x^\alpha$ (với $\alpha>0$) đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên từ (3) suy ra

$$f(x)^{\frac{1}{s}} \le f(x^s),\ \forall x \in (1;+\infty),\ \forall s>0. \tag{4}$$

Từ (2) và (4) suy ra

$$f(x^s)=[f(x)]^{\frac{1}{s}},\ \forall x \in (1;+\infty),\ \forall s>0. \tag{5}$$

Đặt $f(e)=k$. Với mọi $x>1$, đặt $\ln x=s$ (lúc này $x=e^s$). Trong (5) lấy $x=e$ ta được

$$f(e^s)=[f(e)]^{\frac{1}{s}} \Rightarrow f(x)=k^{\frac{1}{\ln x}},\ \forall x>1.$$

Thử lại: với $f(x)=k^{\frac{1}{\ln x}},\ \forall x>1$ (k là hằng số lớn hơn 1), ta có

$$\ln x>0 \Rightarrow k^{\frac{1}{\ln x}}>k^0 \Rightarrow f(x)>1.$$

Mặt khác

$$f(x^my^n)=k^{\frac{1}{\ln(x^my^n)}},\ [f(x)]^{\frac{1}{4m}}=k^{\frac{1}{4m\ln x}},\ [f(y)]^{\frac{1}{4n}}=k^{\frac{1}{4n\ln y}}.$$

Do đó

$$f(x^my^n) \le [f(x)]^{\frac{1}{4m}}.[f(y)]^{\frac{1}{4n}} \Leftrightarrow k^{\frac{1}{\ln(x^my^n)}} \le k^{\frac{1}{4m\ln x}+\frac{1}{4n\ln y}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\ln(x^my^n)} \le \frac{1}{4m\ln x}+\frac{1}{4m\ln x}. \tag{6}$$

Ta có (6) là bất đẳng thức đúng vì áp dụng

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B} \ge \frac{4}{A+B},\ \forall A>0,\ B>0$$

ta suy ra với $x>1$ và $m>0, n>0$ thì

$$\frac{1}{4m\ln x}+\frac{1}{4m\ln x} \ge \frac{4}{4m\ln x+4n\ln y}=\frac{1}{\ln(x^my^n)}.$$

Vậy hàm số cần tìm là

$$f(x)=k^{\frac{1}{\ln x}},\ \forall x>1\ \ (k \text{ là hằng số lớn hơn } 1).$$

Nhiều khi cần chứng minh không có hàm số nào thỏa mãn đề bài. Để làm được điều này ta thường dùng phương pháp phản chứng.

Bài toán 6.27. *Tồn tại hay không hàm số* $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ *thỏa mãn điều kiện: Với mọi* $x>-2013,\ y>2013$ *ta có*

$$f^2(x+2013) \ge f(x+y)\left[f(x+2013)+y-2013\right]. \tag{1}$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

• Với mọi $z > t > 2013$, thay $x = t - 2013$, $y = z - t + 2013$ vào (1) được

$$f^2(t) \geq f(z)\left[f(t) + z - t\right] \Rightarrow \frac{f^2(t)}{f(t) + z - t} \geq f(z)$$

$$\Rightarrow f(t) - f(z) \geq f(t) - \frac{f^2(t)}{f(t) + z - t} = \frac{(z-t)f(t)}{f(t) + z - t} > 0. \qquad (2)$$

Vậy f là hàm giảm trên khoảng $(2013; +\infty)$.

• Cố định x_0 thuộc $(2013; +\infty)$ và chọn $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $nf(x_0 + 1) \geq 1$, tức là $f(x_0 + 1) \geq \frac{1}{n}$. Với $k = 0, 1, \ldots, n-1$, ta có $x_0 + 1 > x_0 + \frac{k}{n}$, suy ra

$$f\left(x_0 + \frac{k}{n}\right) \geq f(x_0 + 1) \geq \frac{1}{n}.$$

Theo (2) ta có

$$f\left(x_0 + \frac{k}{n}\right) - f\left(x_0 + \frac{k+1}{n}\right) \geq \frac{\frac{1}{n} f\left(x_0 + \frac{k}{n}\right)}{f\left(x_0 + \frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n}} = \frac{f\left(x_0 + \frac{k}{n}\right)}{nf\left(x_0 + \frac{k}{n}\right) + 1}.$$

Xét hàm số $\varphi(t) = \frac{t}{nt+1}$, $t \in (0 + \infty)$. Ta có $\varphi'(t) = \frac{1}{(nt+1)^2} > 0$, suy ra hàm f đồng biến trên $(0; +\infty)$. Do đó

$$f\left(x_0 + \frac{k}{n}\right) - f\left(x_0 + \frac{k+1}{n}\right) \geq \frac{f\left(x_0 + \frac{k}{n}\right)}{nf\left(x_0 + \frac{k}{n}\right) + 1} \geq \frac{\frac{1}{n}}{n.\frac{1}{n} + 1} = \frac{1}{2n}. \qquad (3)$$

Từ (3) cho k chạy từ $0, 1, \ldots, n-1$ rồi cộng lại ta được

$$f(x_0) - f(x_0 + 1) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x_0 + 1) \leq f(x_0) - \frac{1}{2}.$$

• Chọn $m \in \mathbb{N}^*$ sao cho $m \geq 2f(x_0)$. Khi đó

$$f(x_0 + m) \leq f(x_0 + m - 1) - \frac{1}{2} \leq f(x_0 + m - 2) - 2.\frac{1}{2}$$

$$\leq \cdots \leq f(x_0) - m.\frac{1}{2} \leq 0.$$

Điều này mâu thuẫn với $f(x) > 0$, $\forall x \in (0; +\infty)$. Vậy không tồn tại hàm số f thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Lưu ý. Thực ra "gốc" của bài toán 6.27 là bài toán 6.28 sau đây:

Bài toán 6.28 (Olympic Sinh viên Quốc tế năm 2000). *Tồn tại hay không hàm số $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện*

$$f^2(x) \geq f(x + y)\left[f(x) + y\right], \ \forall x > 0, y > 0.$$

6.2.2 Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

Trong chứng minh bất đẳng thức và giải bất phương trình, tính đơn điệu của hàm số thường được sử dụng một cách có hiệu quả. Tương tự như vậy, trong phép giải bất phương trình hàm, tính đơn điệu là một tính chất mạnh mà chúng ta có thể khai thác.

Bài toán 6.29 (Romania District Olympiad-2011). *Tìm tất cả các hàm số $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$|x - y|^2 \leq |f(x) - f(y)| \leq |x - y|, \ \forall x, y \in [0; 1]. \qquad (1)$$

Giải. Kí hiệu $P(u, v)$ chỉ việc thay x bởi u, thay y bởi v vào (1). Từ (1) cho $y \to x$ và sử dụng nguyên lí kẹp ta được

$$\lim_{y \to x} |f(x) - f(y)| = 0 \Rightarrow \lim_{y \to x} [f(x) - f(y)] = 0 \Rightarrow \lim_{y \to x} f(y) = f(x).$$

Như vậy f là hàm số liên tục trên $[0; 1]$. Giả sử a, b là hai số thuộc đoạn $[0; 1]$ sao cho $f(a) = f(b)$. Khi đó $P(a, b) \Rightarrow (a - b)^2 \leq 0 \Rightarrow a = b$, suy ra f là đơn ánh. Kết hợp với f liên tục suy ra f đơn điệu thực sự. Nhận xét rằng nếu $f(x)$ thỏa (1) thì $f(x) + c$ và $-f(x) + c$ cũng thỏa (1), do đó có thể giả sử $f(0) = 0$ và f là hàm đơn điệu tăng.

$$P(1, 0) \Rightarrow 1 \leq |f(1)| \leq 1 \Rightarrow |f(1)| = 1 \Rightarrow f(1) = 1 \ \left(\text{do } f \text{ tăng và } 0 < 1\right).$$

Cũng như trên ta suy ra $f(x) \in [0; 1]$, $\forall x \in [0; 1]$.

$$P(x, 0) \Rightarrow |f(x)| \leq |x| \Rightarrow f(x) \leq x, \ \forall x \in [0; 1]. \qquad (2)$$

$$P(x, 1) \Rightarrow 1 - f(x) \leq 1 - x \Rightarrow f(x) \geq x, \ \forall x \in [0; 1]. \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $f(x) = x$, $\forall x \in [0; 1]$. Như vậy

$$f(x) = x + c, \forall x \in [0; 1] \ ; \ f(x) = -x + b, \forall x \in [0; 1] \ \left(b, c \text{ là hằng số}\right).$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 6.30. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(2x^5 + x^3 + 2013\right) \leq x \leq 2[f(x)]^5 + [f(x)]^3 + 2013, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải. Ta xét bài toán tổng quát hơn: Cho $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là một toàn ánh và là hàm tăng thực sự. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(g(x))\le x\le g(f(x)),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Do g là một toàn ánh và là hàm tăng thực sự nên tồn tại hàm ngược g^{-1}. Ta có g^{-1} là hàm tăng thực sự, thật vậy, với $x_1<y_1$, đặt $g^{-1}(x_1)=x_2$, $g^{-1}(y_1)=y_2$, khi đó

$$g(x_2)=x_1<y_1=g(y_2),$$

mà g tăng thực sự nên $x_2<y_2$, suy ra g^{-1} tăng thực sự. Từ đó

$$f(x)=f\left(g\left(g^{-1}(x)\right)\right)\overset{\text{do (1)}}{\le} g^{-1}(x). \tag{2}$$

Do g^{-1} tăng thực sự nên với $x\le g(f(x))$, ta có

$$g^{-1}(x)\le g^{-1}\left(g\left(f(x)\right)\right)=f(x). \tag{3}$$

Từ (2) và (3) suy ra $f(x)=g^{-1}(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Dễ thấy hàm này thỏa. Vậy $f=g^{-1}$ là hàm duy nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 6.31. *Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f\left(\frac{2x+y}{3}\right)\ge f\left(\sqrt[3]{x^2y}\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

a) Chứng minh rằng f là hàm hằng.

b) Chứng minh rằng nếu bất phương trình hàm (1) được thỏa mãn với mọi x,y mà $xy\ge 0$ thì f nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Giải. Kí hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (1).

a) $P(0,3x)\Rightarrow f(x)\ge f(0),\ \forall x\in\mathbb{R}.$ (2)

Mặt khác: $f(0)=f\left(\dfrac{2.\dfrac{-y}{2}+y}{3}\right)\overset{\text{do (1)}}{\ge} f\left(\sqrt[3]{\dfrac{y^2}{4}\cdot y}\right)=f\left(\dfrac{y}{\sqrt[3]{4}}\right),\ \forall y\in\mathbb{R}.$

Do đó: $f(0)\ge f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$ (3).

Từ (2) và (3), ta có: $f(x)=f(0),\ \forall x\in\mathbb{R}$, hay f là hàm hằng. Thử lại thấy thỏa mãn.

b) Lấy $0<x<y$. Phương trình ẩn t là $h(t)=2t^3-3yt^2+x^3=0$ có nghiệm $u\in(0;y)$ vì: $h(0)=x^3>0$, $h(y)=2y^3-3y^3+x^3=x^3-y^3<0$. Do đó: $2u^3-3yu^2+x^3=0\Leftrightarrow x^3=u^2(3y-2u)$. Đặt $v=3y-2u$ thì ta có $v>0$ và $x^3=u^2v$. Từ đây sử dụng giả thiết, ta được:

$$f(y)=f\left(\frac{2u+v}{3}\right)\ge f\left(\sqrt[3]{u^2v}\right)=f\left(\sqrt[3]{x^3}\right)=f(x).$$

Như thế hàm f đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Xét hàm số: $g(x)=f(-x)$. Khi đó với mọi số thực x,y ta có:

$$g\left(\frac{2x+y}{3}\right)=f\left(\frac{-2x-y}{3}\right)\overset{\text{do (1)}}{\ge} f\left(\sqrt[3]{(-x)^2(-y)}\right)=g\left(\sqrt[3]{x^2y}\right).$$

Như vậy hàm số g cũng thỏa mãn (1), do đó theo chứng minh trên suy ra g đồng biến trên $(0;+\infty)$. Với $x<y<0$, ta có $-x>-y>0$, do đó: $f(x)=g(-x)\ge g(-y)=f(y)$. Vì thế hàm f nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

Bài toán 6.32 (Romania National Olympiad 2010, Grade 11). *Cho các hàm số f, g thỏa mãn các điều kiện sau :*

$$f:\mathbb{R}\to[0,+\infty),\ g:\mathbb{R}\to[0,+\infty),$$
$$f(x+y)\ge(y+1)f(x),\ \forall x\in\mathbb{R},y\ge 0;\ g(x)=e^{-x}f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng f là hàm số tăng khi và chỉ khi g là hàm số tăng.

Giải. Với $y>0$ và $n\in\mathbb{N}^*$, ta có

$$f(x+y)=f\left(x+n(\frac{y}{n})\right)=f\left(x+(n-1)(\frac{y}{n})+\frac{y}{n}\right)$$
$$\ge\left(\frac{y}{n}+1\right)f\left(x+(n-1)(\frac{y}{n})\right)\ge\cdots\ge\left(\frac{y}{n}+1\right)^n f(x).$$

Như vậy $f(x+y)\ge\left(\dfrac{y}{n}+1\right)^n f(x),\ \forall x\in\mathbb{R};\ \forall y>0;\ \forall n=1,2,\ldots$ (1)

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{y}{n}+1\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{n}{y}}\right)^{\frac{n}{y}\cdot y}=e^y$. Do đó từ (1) cho $n\to+\infty$, ta được

$$f(x+y)\ge e^y f(x),\ \forall x\in\mathbb{R},\ \forall y>0. \tag{2}$$

Từ (2) suy ra

$$g(x+y)=e^{-(x+y)}f(x+y)\ge e^{-(x+y)}.e^y f(x)=e^{-x}f(x)=g(x).$$

Như vậy $g(x+y)>g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall y>0$, suy ra g là hàm số tăng. Ngược lại, giả sử g là hàm số tăng trên $\mathbb{R}$. Khi đó với $x\in\mathbb{R}$, $y\ge 0$, ta có

$$f(x+y)=e^{(x+y)}g(x+y)\ge e^y e^x g(x)=e^y f(x)\ge(y+1)f(x).$$

Bài toán 6.33 (Olympic Toán Nhật Bản - 2007; India International Mathematical Olympiad Training Camp - 2012). *Tìm các hàm số $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:*

(1) $f(x)+f(y)\le \dfrac{f(x+y)}{2},\ \forall x,y>0.$

(2) $\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{f(y)}{y}\ge \dfrac{f(x+y)}{x+y},\ \forall x,y>0.$

Giải. Xét hàm số $g:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$ như sau: $g(x)=\dfrac{f(x)}{x},\ \forall x>0$. Từ giả thiết (2) ta có

$$g(x)+g(y)\ge g(x+y),\ \forall x,y>0.$$

Từ đây, bằng quy nạp chứng minh được

$$g(nx)\le ng(x),\ \forall x>0,\ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{3}$$

Từ đây suy ra

$$f(nx)\le n^2 f(x),\ \forall x>0,\ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{4}$$

Từ (1) lấy $y=x$ được $4f(x)\le f(2x),\ \forall x>0$, tuy nhiên theo (4) thì

$$f(2x)\le 4f(x),\ \forall x>0,$$

do đó $f(2x)=4f(x),\ \forall x>0$. Dẫn tới

$$f(2^n x)=4f(2^{n-1}x)=4^2 f(2^{n-2}x)=\cdots=4^n f(2^0 x)=4^n f(x),\ \forall x>0.$$

Suy ra

$$g(2^n x)=\frac{f(2^n x)}{2^n x}=\frac{4^n f(x)}{2^n x}=\frac{2^n f(x)}{x}=2^n g(x),\ \forall x>0,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Giả sử $\exists n_0\in n,\ \exists x_0>0$ sao cho $g(n_0x_0)<n_0g(x_0)$. Khi đó chọn $r\in\mathbb{N}$ sao cho $2^r>n_0$, ta được

$$\begin{aligned}2^r g(x_0)&=g(2^r x_0)=g(2^r x_0+n_0x_0-n_0x_0)\\&\le g(n_0x_0)+g\left((2^r-n_0)x_0\right)\\&<n_0g(x_0)+(2^r-n_0)g(x_0)=2^r g(x_0)\ \text{(vô lí)}.\end{aligned}$$

Do đó từ (3) ta được

$$g(nx)=ng(x),\ \forall x>0,\ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{5}$$

Với mọi $x>0$ thì $f(x)\ge 0$ vì

$$10f(x)=2\left[f(x)+f(2x)\right]\le f(3x)\overset{\text{theo (4)}}{\le}9f(x)\Rightarrow f(x)\le 0.$$

Suy ra $g(x)\le 0,\ \forall x>0$. Do đó

$$g(x+y)\le g(x)+g(y)\le g(x),\ \forall x,y>0,$$

dẫn tới g là hàm giảm. Từ (5), tương tự như bài toán 2.214 ở trang 278, ta chứng minh được

$$g(x)=g(1)x,\ \forall x\in q,\ x>0. \tag{6}$$

Mà g là hàm giảm nên từ (6) và theo theo bài toán 2.167, ở trang 217, suy ra $g(x)=ax,\ \forall x>0$. Vậy

$$f(x)=ax^2,\ \forall x>0\ (a\text{ là hằng số không dương}).$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

6.2.3 Sử dụng dãy số

Nếu như phép thế là một kĩ thuật thông dụng khi giải các bất phương trình hàm có nhiều biến tự do thì với bất phương trình hàm (và phương trình hàm) có một biến tự do, kĩ thuật dãy số và lặp có thể giúp ta xác định giá trị hàm số tại một điểm hoặc những bất đẳng thức hàm chặt hơn.

Bài toán 6.34 (Belarus-1997). *Cho hàm $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa*

$$f(2x)\ge x+f\left(f(x)\right),\ \forall x>0. \tag{1}$$

Chứng minh rằng $f(x)\ge x,\ \forall x>0$.

Giải. Từ giả thiết suy ra $f(x)>\dfrac{x}{2},\ \forall x>0$. Xét dãy số (a_n) như sau: $a_1=\dfrac{1}{2}$ và $a_{n+1}=\dfrac{1+a_n^2}{2},\ \forall n=1,2,\ldots$ Ta sẽ chứng minh rằng:

$$f(x)>a_n x,\ \forall x>0,\ \forall n=1,2,\ldots \tag{2}$$

Theo trên đã có $f(x)>a_1x,\ \forall x>0$. Giả sử $f(x)>a_nx,\ \forall x>0$. Khi đó từ (1) suy ra với mọi $x>0$, ta có

$$f(x)\ge\frac{x}{2}+f\left(f(\frac{x}{2})\right)>\frac{x}{2}+a_nf(\frac{x}{2})>\frac{x}{2}+a_n^2\frac{x}{2}=\frac{1+a_n^2}{2}x=a_{n+1}x.$$

Theo nguyên lí quy nạp suy ra (2) đúng. Ta có

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1+a_n^2}{2}-a_n=\frac{(a_n-1)^2}{2}\ge 0,\ \forall n=1,2,\ldots$$

Suy ra (a_n) là dãy số tăng. Bằng quy nạp dễ dàng chứng minh được

$$0<a_n<1,\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy (a_n) tăng và bị chặn trên nên có giới hạn hữu hạn. Đặt $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Từ $a_{n+1} = \dfrac{1+a_n^2}{2}$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ cho $n \to +\infty$, ta được:

$$a = \frac{1+a^2}{2} \Leftrightarrow (a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 1.$$

Từ (2) cho $n \to +\infty$, ta được $f(x) \geq x$, $\forall x > 0$, điều phải chứng minh.

Lưu ý. Trong lời giải trên, hay nhất là biết cách xét dãy số (a_n), để từ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$ suy ra điều phải chứng minh. Còn việc tìm ra dãy số (a_n) được tiến hành tương tự như lưu ý ngay sau bài toán 6.35.

Bài toán 6.35 (Đề thi HSG quốc gia năm 2003-bảng A). *Gọi F là tập hợp các hàm số $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(3x) \geq f(f(2x)) + x, \forall x \in (0; +\infty). \tag{1}$$

Tìm số thực α lớn nhất sao cho với mọi $f \in F$, ta có

$$f(x) \geq \alpha x, \forall x \in (0; +\infty).$$

Giải. Dễ thấy hàm số $f(x) = \dfrac{x}{2}$, $\forall x > 0$ thuộc F. Khi đó với mọi $x > 0$ ta có

$$f(x) \geq \alpha x \Leftrightarrow \frac{x}{2} \geq \alpha x \Leftrightarrow \alpha \leq \frac{1}{2}.$$

Vậy $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$. Vì $f(x) > 0$ nên trong (1) thay x bởi $\dfrac{x}{3}$ suy ra

$$f(x) > \frac{x}{3}, \forall x > 0. \tag{2}$$

Xét dãy số (α_n) như sau: $\alpha_1 = \dfrac{1}{3}$ và

$$\alpha_{n+1} = \frac{2\alpha_n^2 + 1}{3}, \forall n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo n rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì

$$f(x) \geq \alpha_n x, \forall x > 0. \tag{4}$$

Do (2) nên (4) đúng khi $n = 1$. Giả sử đã có (4) khi $n = k$. Kết hợp với (1) suy ra với mọi $x > 0$, ta có

$$f(x) \geq f\left(f\left(\frac{2x}{3}\right)\right) + \frac{x}{3} \geq \alpha_k \left(f\left(\frac{2x}{3}\right)\right) + \frac{x}{3}$$

$$\geq \alpha_k.\alpha_k.\frac{2x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{2\alpha_k^2+1}{3}x = \alpha_{k+1}x.$$

Vậy (4) cũng đúng khi $n = k+1$. Theo nguyên lí quy nạp suy ra (4) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Tiếp theo ta chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \dfrac{1}{2}$. Bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được dãy (α_n) là dãy bị chặn trên bởi $\dfrac{1}{2}$. Từ đó

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{2\alpha_n^2 - 3\alpha_n + 1}{3} = \frac{(\alpha_n - 1)(2\alpha_n - 1)}{3} > 0.$$

Suy ra (α_n) là dãy tăng, do đó dãy (α_n) hội tụ. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = L$, khi đó $0 < L \leq \dfrac{1}{2}$. Từ (2) cho $n \to +\infty$ ta được

$$L = \frac{2L^2+1}{3} \Leftrightarrow 2L^2 - 3L + 1 = 0 \overset{\text{do } 0<L\leq\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} L = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \dfrac{1}{2}$. Từ (4) cho $n \to +\infty$ ta được

$$f(x) \geq \frac{x}{2}, \forall x > 0, \forall f \in F.$$

Từ các chứng minh trên ta được các giá trị α cần tìm là $\dfrac{1}{2}$.

Lưu ý. Việc chỉ ra hàm số $f(x) = \dfrac{x}{2}$, $\forall x > 0$ thuộc F là khá dễ dàng, ta chỉ việc xét $f(x) = ax$, thay vào

$$f(3x) = f(f(2x)) + x, \forall x \in (0; +\infty).$$

tìm được $a = \dfrac{1}{2}$. Còn dãy số (α_n) được tìm ra bằng phương pháp giả định như sau: Giả sử đã có dãy (α_n) thỏa (4). Khi đó ở bước chứng minh quy nạp ta phải biến đổi

$$f(x) \geq f\left(f\left(\frac{2x}{3}\right)\right) + \frac{x}{3} \geq \alpha_k \left(f\left(\frac{2x}{3}\right)\right) + \frac{x}{3}$$

$$\geq \alpha_k.\alpha_k.\frac{2x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{2\alpha_k^2+1}{3}x.$$

Vậy tốt nhất là ta chọn $\alpha_{k+1} = \dfrac{2\alpha_k^2+1}{3}$ và xây dựng được dãy số (α_n) như đã trình bày trong lời giải.

Bài toán 6.36. *Tìm số thực k lớn nhất để nếu $f(x)$ là hàm số tùy ý xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn bất phương trình hàm:*

$$\sqrt{3f(x)} - \sqrt{3f(x) - \frac{9}{4}f\left(\frac{4}{3}x\right)} \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

thì ta luôn có $f(x) \geq k, \forall x \in \mathbb{R}$.

Giải. Giả sử tồn tại số thực k thỏa mãn bài toán. Khi đó vì $f(x) = \frac{4}{3}, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn bất phương trình hàm (*) nên ta có $\frac{4}{3} \geq k$. Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng: Nếu f là hàm số tùy ý xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn bất phương trình hàm (*) thì ta luôn có $f(x) \geq \frac{4}{3}, \forall x \in \mathbb{R}$. Từ (*) thay x bởi $\frac{3x}{4}$ ta được

$$\sqrt{3f\left(\frac{3}{4}x\right)} \geq 1 + \sqrt{3f\left(\frac{3}{4}x\right) - \frac{9}{4}f(x)}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 3f\left(\frac{3}{4}x\right) \geq 1 + 3f\left(\frac{3}{4}x\right) - \frac{9}{4}f(x) + 2\sqrt{3f\left(\frac{3}{4}x\right) - \frac{9}{4}f(x)}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4}f(x) \geq 1 + 2\sqrt{3f\left(\frac{3}{4}x\right) - \frac{9}{4}f(x)}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq \frac{4}{9} + \frac{8}{9}\sqrt{3f\left(\frac{3}{4}x\right) - \frac{9}{4}f(x)}, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Từ đây suy ra

$$f(x) \geq \frac{4}{9}, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Từ (2) có

$$f(x) - \frac{4}{9} \geq \frac{8}{9}\sqrt{3f\left(\frac{3}{4}x\right) - \frac{9}{4}f(x)}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với (1) suy ra

$$f^2(x) - \frac{8}{9}f(x) + \frac{16}{81} \geq \frac{64}{81}\left[3f\left(\frac{3}{4}x\right) - \frac{9}{4}f(x)\right], \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) + \frac{8}{9}f(x) + \frac{16}{81} - \frac{64}{81}.3f\left(\frac{3}{4}x\right) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x) + \frac{4}{9}\right)^2 \geq \frac{64}{81}.3f\left(\frac{3}{4}x\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy $f(x) \geq \frac{4}{9}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) \geq -\frac{4}{9} + \frac{8}{9}\sqrt{3f\left(\frac{3x}{4}\right)}, \forall x \in \mathbb{R}$. Ta xây dựng dãy số (u_n) như sau: $u_1 = \frac{4}{9}$, $u_{n+1} = -\frac{4}{9} + \frac{8}{9}\sqrt{3u_n}$ $(\forall n = 1, 2, \ldots)$. Khi đó $u_n \geq \frac{4}{9}, \forall n = 1, 2, \ldots$ Ta có $f(x) \geq u_1$ $(\forall x \in \mathbb{R})$. Giả sử $f(x) \geq u_n$ $(\forall x \in \mathbb{R})$, khi đó

$$f(x) \geq -\frac{4}{9} + \frac{8}{9}\sqrt{3f\left(\frac{3x}{4}\right)} \geq -\frac{4}{9} + \frac{8}{9}\sqrt{3u_n} = u_{n+1}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Theo nguyên lý quy nạp suy ra

$$f(x) \geq u_n, \forall n = 1, 2, \ldots \ (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Cũng bằng nguyên lý quy nạp ta chứng minh được dãy (u_n) tăng và bị chặn trên (bởi số $\frac{4}{3}$) nên có giới hạn. Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{4}{3}$. Từ đó

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) \geq \lim_{n\to\infty} u_n = \frac{4}{3}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy số k lớn nhất phải tìm là $\frac{4}{3}$.

Lưu ý. Ta đã dùng các kết quả sau:

- $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = f(x)$ (với $f(x)$ là biểu thức không phụ thuộc vào n).
- Cho hai dãy số hội tụ $(x_n), (y_n)$. Khi đó nếu $x_n \leq y_n, \forall n = 1, 2, \ldots$ thì

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

- Cho $f(x)$ là một biểu thức phụ thuộc vào x, và cho A là một hằng số. Để chứng minh $f(x) \geq A$ ta xây dựng một dãy số $(u_n)_n$ sao cho $f(x) \geq u_n, \forall n$ $(f(x) > u_n, \forall n$ cũng được) và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$. Khi đó ta suy ra:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) \geq \lim_{n\to\infty} u_n = A.$$

Bài toán 6.37. *Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

1) *f là hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$*
2) $f\left(x + \frac{1}{f(x)}\right) \geq 2f(x), \forall x > 0.$

Giải. Giả sử hàm f thỏa mãn đề bài. Với mỗi $x > 0$, xét dãy $\{x_n\}$ như sau:

$$x_1 = x, \ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{f(x_n)}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Ta có $f(x_{n+1}) = f\left(x_n + \dfrac{1}{f(x_n)}\right) \geq 2f(x_n) \geq 2^2 f(x_{n-1}) \geq \cdots \geq 2^n f(x_1)$.

Vậy ta có $f(x_n) \geq 2^{n-1} f(x_1), \forall n = 1, 2, \ldots$ Tiếp theo ta có

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{f(x_1)}$$
$$x_3 = x_2 + \frac{1}{f(x_2)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{f(x_{n-1})}.$$

Cộng lại ta được

$$x_n = x_1 + \frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} + \cdots + \frac{1}{f(x_{n-1})}.$$

Vì $\dfrac{1}{f(x_n)} \leq \dfrac{1}{2^{n-1} f(x_1)}, \forall n = 1, 2, \ldots$ nên

$$x_n \leq x_1 + \frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{2^1 f(x_1)} + \frac{1}{2^2 f(x_1)} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2} f(x_1)}$$

$$= x_1 + \frac{1}{f(x_1)}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) = x_1 + \frac{1}{f(x_1)} \cdot \frac{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \dfrac{1}{2}} = a$$

$$\left(\text{với } a = x_1 + \frac{2}{f(x_1)} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] > 0\right).$$

Do f là hàm số tăng trên khoảng $(0; +\infty)$ nên từ $x_n \leq a$ ta có

$$2^{n-1} f(x_1) \leq f(x_n) \leq f(a), \forall n = 1, 2, \ldots$$
$$\Rightarrow f(a) \geq \lim_{n \to +\infty} \left[2^{n-1} f(x_1)\right] = +\infty.$$

Điều vô lí này chứng tỏ không có hàm số nào thỏa mãn đề bài.

Bài toán 6.38. *Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

1) *f là hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$*

2) $f\left(x + \dfrac{2008}{f(x)}\right) \geq 2009 f(x), \forall x > 0.$

Hướng dẫn. Tương tự bài toán 6.37 ở trang 597.

Bài toán 6.39. *Tồn tại hay không hàm số $f : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x + y) > y[f(x)]^2, \ \forall x, y > 0. \tag{1}$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn các điều kiện nói trong đề bài. Kí hiệu $P(u, v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (1). Với $x > 0$:

$$P\left(\frac{x}{2}; \frac{x}{2}\right) \Rightarrow f(x) > 0, \ \forall x > 0.$$

Với mỗi $a > 0$ và $x \in (0; a]$:

$$P(x, 2a - x) \Rightarrow f(2a) > (2a - x)[f(x)]^2 \geq a[f(x)]^2 \Rightarrow [f(x)]^2 < \frac{f(2a)}{a}.$$

Vậy f là hàm số bị chặn trên trên $(0; a]$. Đặt $f(1) = u > 0$ và xét dãy (x_n) như sau: $x_0 = 1$, $x_{n+1} = x_n + \dfrac{2}{f(x_n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$P\left(x_n, \frac{2}{f(x_n)}\right) \Rightarrow f(x_{n+1}) \geq 2f(x_n) \Rightarrow f(x_n) \geq 2^n u, \ \forall n \geq 1.$$

Do $x_1 = 1 + \dfrac{2}{u}$ và $x_{n+1} < x_n + \dfrac{1}{2^{n-1} u}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên

$$x_n < x_1 + \frac{1}{u}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) = 1 + \frac{1}{u}\left(1 - \frac{1}{2^{n-2}}\right) < 1 + \frac{4}{u}.$$

Vậy, với mọi $n = 1, 2 \ldots$ ta có $x_n < 1 + \dfrac{4}{u}$ và $f(x_n) \geq 2^n u$, mà $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n u = +\infty$ nên suy ra hàm f không bị chặn trên trên nửa khoảng $\left(0; 1 + \dfrac{4}{u}\right]$, đến đây ta gặp điều mâu thuẫn. Do đó không tồn tại hàm số f thỏa mãn các điều kiện đã nói trong đề bài.

Bài toán 6.40 (Bulgaria 2008). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f(x + y^2) \geq (y + 1) f(x), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Đặt $P(x, y)$ là mệnh đề $f(x + y^2) \geq (y + 1) f(x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

$$P(x - 1, -1) \Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Với $y > 0$ thì:

$$P(x + y^2, y) \Rightarrow f(x + 2y^2) \geq (y + 1) f(x + y^2) \geq (y + 1)^2 f(x)$$
$$P(x + 2y^2, y) \Rightarrow f(x + 3y^2) \geq (y + 1) f(x + 2y^2) \geq (y + 1)^3 f(x).$$

Bằng quy nạp, ta thu được:

$$f(x+ny^2) \geq (y+1)^n f(x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y > 0,\ \forall n = 1,2,\ldots \tag{2}$$

Từ (2), lấy $y = \dfrac{1}{n}$, ta được:

$$f\left(x+\frac{1}{n}\right) \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n f(x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n = 1,2,\ldots \tag{3}$$

Sử dụng (3) liên tiếp ta thu được:

$$f\left(x+\frac{2}{n}\right) \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n f\left(x+\frac{1}{n}\right) \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} f(x)$$

$$\Rightarrow f\left(x+\frac{k}{n}\right) \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{kn} f(x) \Rightarrow f(x+1) \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} f(x)$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{f(x+1)}{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right]^n},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n = 1,2,\ldots \tag{4}$$

Từ (4) cho $n \to +\infty$, ta được: $0 \leq f(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy hàm số $f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 6.41. *Tìm các số $a > 1$ sao cho tồn tại hàm $f : (0;+\infty) \to (0;+\infty)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

$$2f(x) \leq x + af\left(\frac{x}{a}\right),\ \forall x > 0 \tag{1}$$

$$f(x) \leq 2,\ \forall x \in (0;1] \tag{2}$$

$$f(2016) > 2016. \tag{3}$$

Giải. Với mọi $a \geq 2$, dễ thấy hàm số $f(x) = x+1,\ \forall x \in (0;+\infty)$ thỏa mãn (1), (2), (3). Giả sử $1 < a < 2$ và hàm số f thỏa mãn đồng thời (1), (2), (3). Đặt $f(x) = x + g(x),\ \forall x > 0$, khi đó $g : (0;+\infty) \to (0;+\infty)$ và thỏa các điều kiện:

$$2g(x) \leq ag\left(\frac{x}{a}\right),\ \forall x > 0. \tag{4}$$

$$g(x) \leq 2 - x,\ \forall x \in (0;1] \tag{5}$$

$$g(2016) > 0. \tag{6}$$

Từ (4), thay x bởi ax ta được

$$g(ax) \leq \frac{a}{2}g(x),\ \forall x > 0$$

$$\Leftrightarrow g(x) \geq \frac{2}{a}g(ax),\ \forall x > 0. \tag{7}$$

Sử dụng (7) liên tiếp ta được

$$g(x) \geq \frac{2}{a}g(ax) \geq \left(\frac{2}{a}\right)^2 g(a^2x) \geq \cdots \geq \left(\frac{2}{a}\right)^n g(a^nx),\ \forall x > 0.$$

Từ đó $g(a^nx) \leq \dfrac{a^n}{2^n}g(x),\ \forall x > 0$. Kết hợp với (5) suy ra

$$g(a^nx) \leq \frac{a^n(2-x)}{2^n},\ \forall x \in (0;1], n = 1,2,\ldots \tag{8}$$

Do $1 < a < 2$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2016}{a^n} = 0$, từ đó $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* : 0 < \dfrac{2016}{a^n} \leq 1,\ \forall n \geq n_0$.

Từ (8) cho $x = \dfrac{2016}{a^n}$ $(n \geq n_0)$ ta được

$$g(2016) \leq 2.\frac{a^n}{2^n} - \frac{2016}{2^n},\ \forall n \geq n_0. \tag{9}$$

Vì $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2.\dfrac{a^n}{2^n} - \dfrac{2016}{2^n}\right) = 0$ nên từ (9) cho $n \to +\infty$ ta được $g(2016) \leq 0$, mâu thuẫn với (6). Vậy nếu $1 < a < 2$ thì không tồn tại hàm số f thỏa (1), (2), (3). Do đó $a \geq 2$ là tất cả các giá trị cần tìm.

Bài toán 6.42. *Liệu có tồn tại không hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x-y|,\ \forall x,y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm f thỏa (1). Từ (1) thay (x,y) bởi $\left(\dfrac{3x+y}{4}, \dfrac{x+3y}{4}\right)$ ta có

$$\frac{f\left(\frac{3x+y}{4}\right) + f\left(\frac{x+3y}{4}\right)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{1}{2}|x-y|,\ \forall x,y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{3x+y}{4}\right) + f\left(\frac{x+3y}{4}\right) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x-y|,\ \forall x,y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Bây giờ, thay (x,y) bởi $\left(x, \dfrac{x+y}{2}\right)$ vào (1) ta thu được

$$\frac{f(x) + f\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2} \geq f\left(\frac{3x+y}{4}\right) + \frac{1}{2}|x-y|,\ \forall x,y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{f(y)+f\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2} \geq f\left(\frac{x+3y}{4}\right)+\frac{1}{2}|x-y|,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Cộng tương ứng vế với vế (2), (3), (4) ta được

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)+2|x-y|,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Từ (5), tiến hành đánh giá tương tự như trên và tiến hành quy nạp và chứng minh được rằng

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)+2^n|x-y|,\ \forall x,y\in\mathbb{R};\ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{6}$$

Trong (6), cho $x=1$ và $y=0$ ta được

$$\frac{f(1)+f(0)}{2}-f\left(\frac{1}{2}\right)\geq 2^n,\quad \forall n\in\mathbb{N}. \tag{7}$$

Vì khi n là số tự nhiên đủ lớn thì $2^n > \frac{f(1)+f(0)}{2}-f\left(\frac{1}{2}\right)$ nên (7) không thể xảy ra. Vậy giả thiết về sự tồn tại của hàm f là sai, hay nói một cách khác, không có hàm số nào thỏa mãn tính chất đã cho.

6.2.4 Xây dựng dãy số để kẹp chặt hơn

Đối với những bất phương trình hàm "dạng kẹp"

$$g(x)\leq f(x)\leq h(x),\ \forall x\in D_f\ \ (f \text{ là hàm số cần tìm}),$$

ta thường phải "kẹp chặt hơn" bằng cách xây dựng bất đẳng thức

$$a_kG(x)\leq f(x)\leq a_kH(x),\ \forall x\in D_f,\ \forall k\in\mathbb{N}, \tag{*}$$

trong đó dãy số (a_k) hội tụ. Sau đó, từ $(*)$ cho $k\to+\infty$, ta thu được:

$$B(x)\leq f(x)\leq B(x)\Rightarrow f(x)=B(x),\ \forall x\in D_f.$$

Bài toán 6.43. *Tìm tất cả các hàm số $f:[1;+\infty)\to[1;+\infty)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:*

$$\frac{x+1}{2}\leq f(x)\leq 2(x+1),\ \forall x\geq 1. \tag{1}$$

$$xf(x+1)=f^2(x)-1,\ \forall x\geq 1. \tag{2}$$

Giải. Trong (1) thay x bởi $x+1$ ta được

$$\frac{x+2}{2}\leq f(x+1)\leq 2(x+2),\ \forall x\geq 0. \tag{3}$$

Từ (2) có $f^2(x)=xf(x+1)+1,\ \forall x\geq 1$. Kết hợp với (3) được

$$f^2(x)\leq 2x(x+2)+1=2x^2+4x+1<2(x+1)^2,\ \forall x\geq 1. \tag{4}$$

$$f^2(x)\geq\frac{x(x+2)}{2}+1>\frac{(x+1)^2}{2},\ \forall x\geq 1. \tag{5}$$

Từ (4) và (5) suy ra

$$\frac{(x+1)^2}{2}<f^2(x)<2(x+1)^2,\ \forall x\geq 1$$

$$\Rightarrow\frac{x+1}{\sqrt{2}}<f(x)<\sqrt{2}(x+1),\ \forall x\geq 1. \tag{6}$$

Từ (6) và (2), sử dụng lại cách lập luận trên liên tiếp k lần ta được

$$\frac{x+1}{\sqrt{2^{\frac{1}{2^k}}}}<f(x)<\sqrt{2^{\frac{1}{2^k}}}(x+1),\ \forall x\geq 1. \tag{7}$$

Do $\lim\limits_{k\to+\infty}\sqrt{2^{\frac{1}{2^k}}}=1$ nên từ (7) cho $k\to+\infty$, ta được

$$x+1\leq f(x)\leq x+1,\ \forall x\geq 1.$$

Vậy $f(x)=x+1,\ \forall x\geq 1$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 6.44 (Terkey TST - 2005). *Tìm tất cả các hàm số*

$$f:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$$

thỏa mãn $4f(x)\geq 3x,\ \forall x\geq 0$ và

$$f(4f(x)-3x)=x,\ \forall x\geq 0. \tag{1}$$

Giải. Từ giả thiết suy ra với mọi $x\geq 0$, ta có

$$4f(4f(x)-3x)\geq 3[4f(x)-3x]\Rightarrow 4x\geq 12f(x)-9x\Rightarrow f(x)\leq\frac{13}{12}x.$$

Như vậy $\frac{3}{4}x\leq f(x)\leq\frac{13}{12}x,\ \forall x\geq 0.$ (2)

Xét hai dãy số (a_n) và (b_n) như sau :

$$a_1=\frac{3}{4},\ b_1=\frac{13}{12},\ a_{n+1}=\frac{3b_n+1}{4b_n},\ b_{n+1}=\frac{3a_n+1}{4a_n}.$$

Tương tự như bài toán 5.60, ta chứng minh được $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1$

và
$$a_n x \le f(x) \le b_n x,\ \forall x \ge 0,\ \forall n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Từ (3) cho $n \to +\infty$, ta được $x \le f(x) \le x,\ \forall x \ge 0$ hay $f(x) = x,\ \forall x \ge 0$. Thử lại thấy hàm số $f(x) = x,\ \forall x \ge 0$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Lưu ý. Bài toán 6.44 này tương tự như bài toán 5.60 ở trang 568.

6.2.5 Chuyển qua giới hạn

Việc xét các điểm đặc biệt luôn là một kỹ thuật thông dụng khi giải phương trình hàm và bất phương trình hàm. Bên cạnh các điểm hữu hạn như 0, 1 thì điểm ∞ là một điểm đặc biệt có thể được khai thác. Nếu nắm vững bản chất giới hạn thì nhiều bất phương trình hàm giải được bằng phép chuyển qua giới hạn.

Bài toán 6.45 (South Africa National Olympiad 2012). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*
$$f(km) + f(kn) - f(k)f(mn) \ge 1,\ \forall m, n, k \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Giải. Trong (1) cho $m = n = k = 1$, ta được
$$f(1) + f(1) - [f(1)]^2 \ge 1 \Leftrightarrow [f(1) - 1]^2 \le 0 \Leftrightarrow f(1) = 1.$$

Trong (1) cho $m = n = 1$, ta được $f(k) \ge 1,\ \forall k \in \mathbb{N}^*$. Trong (1), tiếp tục cho $m = n = k$, ta được
$$\begin{aligned} &2f(k^2) - f(k)f(k^2) \ge 1,\ \forall k \in \mathbb{N}^* \\ \Leftrightarrow &f(k^2)[2 - f(k)] \ge 1,\ \forall k \in \mathbb{N}^* \\ \Rightarrow &f(k) < 2,\ \forall k \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Trong (1) cho $m = 1$, $n = k$, ta được
$$\begin{aligned} &f(k) + f(k^2) - [f(k)]^2 \ge 1,\ \forall k \in \mathbb{N}^* \\ \Leftrightarrow &f(k^2) - f(k) \ge [f(k)]^2 - 2f(k) + 1,\ \forall k \in \mathbb{N}^* \\ \Leftrightarrow &f(k^2) - f(k) \ge [f(k) - 1]^2,\ \forall k \in \mathbb{N}^* \qquad (2) \\ \Rightarrow &f(k^2) \ge f(k),\ \forall k \in \mathbb{N}^*. \qquad (3) \end{aligned}$$

Trong (2), thay k bởi k^2, ta được
$$f(k^{2^2}) \ge \left[f(k^2) - 1\right]^2 + f(k^2),\ \forall k \in \mathbb{N}^*. \tag{4}$$

Từ (4), sử dụng (3), suy ra
$$f(k^{2^2}) \ge [f(k) - 1]^2 + f(k^2). \tag{5}$$

Tương tự, ta thu được dãy bất phương trình hàm sau :
$$\begin{aligned} &f(k^2) \ge [f(k) - 1]^2 + f(k) \\ &f(k^{2^2}) \ge [f(k) - 1]^2 + f(k^2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &f(k^{2^t}) \ge [f(k) - 1]^2 + f(k^{2^{t-1}}). \end{aligned}$$

Cộng lại, ta thu được
$$f(k^{2^t}) \ge t[f(k) - 1]^2 + f(k),\ \forall k \in \mathbb{N}^*. \tag{6}$$

Nếu tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(k) > 1$ thì $\lim\limits_{t\to+\infty} \left[t(f(k) - 1)^2\right] = +\infty$, như vậy khi t đủ lớn thì $t[f(k) - 1]^2 + f(k) > f(k^{2^t})$, mâu thuẫn với (6). Do đó $f(k) = 1, \forall k \in \mathbb{N}^*$. Thử lại thấy hàm số $f(k) = 1, \forall k \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Chú ý 2. *Liên quan đến số e, ta có các kết quả sau :*

- $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.
- $\lim\limits_{x\to0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, $\lim\limits_{x\to0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.
- $e^x \ge 1 + x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 6.46. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*
$$f(x+y) \le f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$
$$f(x) \le e^x - 1,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Giải. Theo giả thiết ta có
$$\begin{cases} f(x+0) \le f(x) + f(0) \Rightarrow f(0) \ge 0 \\ f(0) \le e^0 - 1 \Rightarrow f(0) \le 0 \end{cases} \Rightarrow f(0) = 0.$$

Từ (1) ta có
$$0 = f(0) = f(x + (-x)) \le f(x) + f(-x) \Rightarrow f(x) + f(-x) \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Từ (1) và (2) ta có
$$\begin{aligned} &f(x) = f\left(2^n . \frac{x}{2^n}\right) \le 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right) \le 2^n \left(e^{\frac{x}{2^n}} - 1\right),\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow &f(x) \le x . \frac{e^{\frac{x}{2^n}} - 1}{\frac{x}{2^n}},\ \forall x \ne 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned} \tag{4}$$

Do $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ nên từ (4) cho $n\to+\infty$ ta được $f(x)\le x,\ \forall x\ne 0$. Kết hợp với $f(0)\le 0$ ta được

$$f(x)\le x,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Vì thế $f(x)+f(-x)\le x+(-x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Kết hợp với (3) ta được

$$f(x)+f(-x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Do đó với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có $f(-x)\le -x\Rightarrow -f(x)\le -x\Rightarrow f(x)\ge x$. Kết hợp với (5) suy ra hàm số cần tìm là $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. (6)

Thử lại:

- Dễ thấy hàm số xác định bởi (6) thỏa mãn (1).
- Tiếp theo ta chứng minh bất đẳng thức $e^x\ge 1+x,\forall x\in\mathbb{R}$ để suy ra hàm số xác định bởi (6) thỏa mãn (2). Xét hàm số: $h(x)=e^x-(1+x),\forall x\in\mathbb{R}$. Ta có:

$$h'(x)=e^x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$
$$h'(x)=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra: $h(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ hay $e^x\ge 1+x,\forall x\in\mathbb{R}$. Vậy hàm số xác định bởi (6) thỏa mãn (2).

Kết luận: hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là: $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Bài toán 6.47. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+y)\le f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$
$$f(x)\ln 2013\le 2013^x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Hướng dẫn. Tương tự bài toán 6.46.

Bài toán 6.48. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to(0;+\infty)$ thỏa mãn:*

$$f(x)\ge 1+x,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$
$$f(x+y)\ge f(x)f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Khi đó $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Trong (1) cho $x=0$ ta được: $f(0)\ge 1$. Trong (2) cho $x=y=0$ ta được:

$$f(0)\ge[f(0)]^2\Rightarrow 1\ge f(0)\Rightarrow f(0)=1.$$

Từ (2), bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được:

$$f(x_1+x_2+\cdots+x_n)\ge f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n),\ \forall x_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,n}$$
$$\Rightarrow f(x)=f\left(\frac{x}{n}+\frac{x}{x}+\cdots+\frac{x}{n}\right)\ge\left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$$
$$\overset{\text{do (2)}}{\Rightarrow} f(x)\ge\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}^*. \tag{3}$$

Đặt $\dfrac{x}{n}=y$. Do $\lim\limits_{x\to 0+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, $\lim\limits_{x\to 0-}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ nên

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{y\to 0^\pm}(1+y)^{\frac{x}{y}}=\lim_{y\to 0^\pm}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^x=e^x.$$

Từ (3) cho $n\to+\infty$, ta được: $f(x)\ge e^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. (4)

Hơn nữa: $1=f(0)=f(x+(-x))\ge f(x)f(-x)\overset{\text{do (4)}}{\ge}e^x.e^{-x}=1$.

Vậy $f(x)f(-x)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ hay $f(x)=\dfrac{1}{f(-x)},\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Theo (4) ta có: $f(-x)\ge e^{-x}\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{f(-x)}\le\dfrac{1}{e^{-x}}=e^x$.

Vậy $f(x)\le e^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Kết hợp với (4) ta được: $f(x)=e^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 6.49 (Đề thi Olympic Toán Quốc tế năm 2011). *Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+y)\le yf(x)+f(f(x)),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Chứng minh rằng $f(x)=0$ với mọi $x\le 0$.

Giải. Trước hết, chứng minh $f(x)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thật vậy, giả sử có $a\in\mathbb{R}$ mà $f(a)>0$. Trong (1) lấy $x=a$ được

$$f(a+y)\le yf(a)+f(f(a)),\ \forall y\in\mathbb{R}.$$

Từ đây cho $y\to-\infty$ ta được $f(a+y)\to-\infty$, suy ra $\lim\limits_{x\to-\infty}f(y)=-\infty$. Từ (1) cho $y=-x$ ta được

$$f(0)\le -xf(x)+f(f(x)),\ \forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f(0)+xf(x)\le f(f(x)),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Trong (2) cho $x\to-\infty$ ta được:

$$f(0)+xf(x)\to+\infty$$

trong khi đó $f(f(x))\to-\infty$, vô lí. Vậy $f(x)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Bây giờ thay $x=0$ và $y=f(x)$ vào (1) ta được

$$f(f(x))\le f(x).f(0)+f(f(0)),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Từ đó kết hợp với (1) ta có

$$f(x+y) \le f(x)\,[y+f(0)] + f\,(f(0)),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Trong (3) thay $y = f(0) - x$ được

$$f\,(f(0)) \le f(x)\,[2f(0) - x] + f\,(f(0)),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

hay $f(x)\,[2f(0) - x] \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Vì $f(x) \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ nên nếu $x < 2f(0)$ thì $f(x) \ge 0$, suy ra

$$f(x) = 0,\ \forall x < 2f(0). \tag{4}$$

Lại thế $y = -f(0)$ và $x = 3f(0) - 1$ vào (3) ta được

$$0 = f\,(2f(0) - 1) \le f\,(f(0)).$$

Kết hợp với $f\,(f(0)) \le 0$ suy ra $f\,(f(0)) = 0$. Mặt khác trong (1) cho $y = 0$ ta có

$$f(x) \le f\,(f(x)),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó

$$f(0) \le f\,(f(0)) \le f\,(f\,(f(0))) = f(0).$$

Từ đây suy ra $f(0) = f\,(f(0)) = 0$. Vậy từ (4) có $f(x) = 0$ với mọi $x \le 0$.

Bài toán 6.50 (Olympic Sinh viên Quốc tế-2001). *Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời $f(0) > 0$ và*

$$f\,(x+y) \ge f\,(x) + yf\,(f(x)),\ \forall x, y \in (0; +\infty). \tag{1}$$

Giải. Giả sử trái lại rằng tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn (1) và $f(0) > 0$. Nếu như $f\,(f(x)) \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ thì với bất kì $y < 0$ ta có

$$f(x+y) \ge f(x) + yf\,(f(x)) \ge f(x).$$

Như thế f là hàm giảm. Từ đó do $f(0) > 0 \ge f\,(f(x))$ suy ra $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, mâu thuẫn. Vậy phải tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho $f\,(f(x)) > 0$. Cố định x này và cho $y \to +\infty$ trong (1) ta được $\lim\limits_{y\to+\infty} f(x+y) = +\infty$, do đó

$$\lim_{y\to+\infty} f(y) = +\infty\ ;\ \lim_{y\to+\infty} f\,(f(y)) = +\infty.$$

Vì thế, tồn tại $a > 0$ và $b > 0$ sao cho

$$f(a) \ge 0,\ f\,(f(a)) > 1,\ b \ge \frac{a+1}{f\,(f(a)) - 1},\ f\,(f(a+b+1)) \ge 0.$$

Khi đó ta có $f(a+b) \ge f(a) + bf\,(f(a)) \ge a+b+1$ và như thế

$$f\,(f(a+b)) = f\Big((a+b+1) + [f(a+b) - (a+b+1)]\Big)$$

$$\begin{aligned}
&\ge f(a+b+1) + [f(a+b) - (a+b+1)]\,f\,(f(a+b+1)) \\
&\ge f((a+b)+1) \ge f(a+b) + f\,(f(a+b)) \\
&\ge f(a) + bf\,(f(a)) + f\,(f(a+b)) > f\,(f(a+b)).
\end{aligned}$$

Đến đây ta gặp mâu thuẫn. Vậy không tồn tại hàm f thỏa mãn các điều kiện nói trên, ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 6.51 (Olympic Toán Rumani-2001). *Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện*

$$f\,(x+y) \ge f\,(x) + yf\,(f(x)),\ \forall x, y \in (0; +\infty). \tag{1}$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ thỏa mãn (1). Khi đó

$$f\,(x+y) \ge f\,(x),\ \forall x, y \in (0; +\infty)$$

do đó f là hàm tăng. Trong (1) lấy $x = 1$ ta được

$$\begin{aligned}
&f\,(1+y) \ge f\,(1) + yf\,(f(1)),\ \forall y \in (0; +\infty) \\
\Leftrightarrow &f\,(1+x) \ge f\,(1) + f\,(f(1))\,x,\ \forall x \in (0; +\infty).
\end{aligned} \tag{2}$$

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} [f\,(1) + f\,(f(1))\,x] = +\infty$ nên từ (2) suy ra

$$\lim_{x\to+\infty} f\,(1+x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f\,(x) = +\infty.$$

Trong (1) lấy $y = 1$ ta được

$$\begin{aligned}
&f\,(x+1) \ge f\,(x) + f\,(f(x)),\ \forall x \in (0; +\infty) \\
\Leftrightarrow &f\,(x+1) - f\,(x) \ge f\,(f(x)),\ \forall x \in (0; +\infty).
\end{aligned} \tag{3}$$

Từ đó

$$\lim_{x\to+\infty} f\,(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f\,(f(x)) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} [f\,(x+1) - f\,(x)] = +\infty.$$

Xét hai dãy (x_n) và (y_n) như sau $x_n = f(n),\ y_n = n$. Khi đó (y_n) tăng thực sự đến $+\infty$ và

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to+\infty} [f\,(n+1) - f\,(n)] = +\infty.$$

Theo định lí Stolz suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = +\infty$ hay $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(n)}{n} = +\infty$. Bởi vậy tồn tại n_0 sao cho

$$\frac{f(n)}{n} > 5,\ \forall n > n_0.$$

Với mọi số tự nhiên $n > n_0$, ta có $f(n) > 5n > n+1$. Mà f là hàm tăng nên

$$f(f(n)) > f(n+1). \tag{4}$$

Mặt khác, do $f : (0;+\infty) \to (0;+\infty)$ nên từ (3), với mọi $n > n_0$, ta có

$$f(n+1) = f(n) + f(f(n)) \Rightarrow f(n+1) > f(f(n)). \tag{5}$$

Vì (4) và (5) mâu thuẫn nhau nên không tồn tại hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 6.52 (Olympic Toán Sinh viên Toàn quốc-1995). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1$ và*

$$f(x+y) \le f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Trong (1) lấy $x = y = 0$ được $f(0) \ge 0$. Từ (1) ta có

$$f(nx) \le nf(x),\ \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy $f(x) = f\left(n.\dfrac{x}{n}\right) \le nf\left(\dfrac{x}{n}\right) \Rightarrow f\left(\dfrac{x}{n}\right) \ge \dfrac{f(x)}{n},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Từ đó

$$0 \le f(0) \le f(x + (-x)) \le f(x) + f(-x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Với $x_0 > 0$ thì

$$\frac{f\left(\dfrac{x_0}{n}\right)}{\dfrac{x_0}{n}} \ge \frac{\dfrac{f(x_0)}{n}}{\dfrac{x_0}{n}} = \frac{f(x_0)}{x_0} = \frac{-f(x_0)}{-x_0} \overset{\text{do } -x_0<0}{\ge} \frac{f(-x_0)}{-x_0}$$

$$= \frac{-\dfrac{f(-x_0)}{n}}{\dfrac{x_0}{n}} = \frac{f\left(-\dfrac{x_0}{n}\right)}{-\dfrac{x_0}{n}},\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{3}$$

Do $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f\left(\dfrac{x_0}{n}\right)}{\dfrac{x_0}{n}} = 1 = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f\left(-\dfrac{x_0}{n}\right)}{-\dfrac{x_0}{n}}$. Vậy từ (1) cho $n \to +\infty$ ta được $\dfrac{f(x_0)}{x_0} = \dfrac{f(-x_0)}{-x_0} = 1,\ \forall x_0 > 0$, hay $f(x) = x,\ \forall x > 0$.

Chọn $x_1 \ne 0$, theo (2) ta có

$$0 \le f(0) \le f(x_1) + f(-x_1) = x_1 + (-x_1) = 0 \Rightarrow f(0) = 0.$$

Vậy $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

6.2.6 Sử dụng tính liên tục của hàm số

Việc sử dụng tính liên tục của hàm số để giải bất phương trình hàm giống như việc sử dụng tính liên tục của hàm số để giải phương trình hàm (Vì vậy bạn đọc hãy xem lại bài 2.7, ở trang 267: Phương trình hàm trong lớp các hàm liên tục). Các kĩ thuật vẫn là sử dụng lặp để tạo ra dãy số, chuyển qua giới hạn, sử dụng khẳng định: "Hàm số f liên tục khi và chỉ khi lim của ép bằng ép của lim" (câu nói này tôi đã sử dụng một lần ở trang 271). Sau đây là một số bài toán minh họa.

Bài toán 6.53. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn bất phương trình hàm*

$$\min\{f(x), f(y)\} \le f(x+y) \le \max\{f(x), f(y)\},\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Từ (1) lấy $y = x$ ta được $f(x) \le f(2x) \le f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$, nghĩa là $f(2x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$, từ đây thay x bởi $\dfrac{x}{2}$ ta được

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Sử dụng (2) liên tiếp ta được

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2^2}\right) = \cdots = f\left(\frac{x}{2^n}\right),\ \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{3}$$

Từ (3) và do f là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{2^n}\right) = f(0),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy f là hàm hằng trên $\mathbb{R}$, thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 6.54. *Cho $f : [0;+\infty) \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục sao cho $f(0) = 0$ và thỏa mãn điều kiện: $f(2x) \le f(x) + x,\ \forall x \ge 0$. Chứng minh rằng*

$$f(x) \le x,\ \forall x \ge 0.$$

Giải. Từ giả thiết suy ra với mọi $x \ge 0$, ta có

$$f(x) \le f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} \le f\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} \le f\left(\frac{x}{8}\right) + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} \le \cdots$$

$$\Rightarrow f(x) \le f\left(\frac{x}{2^n}\right) + \frac{x}{2} + \frac{x}{2^2} + \frac{x}{2^3} + \cdots + \frac{x}{2^n},\ \forall x \ge 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Ta có

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2^2} + \frac{x}{2^3} + \cdots + \frac{x}{2^n}\right) = \frac{x}{2} + \frac{x}{2^2} + \frac{x}{2^3} + \cdots + \frac{x}{2^n} + \cdots = \frac{\dfrac{x}{2}}{1 - \dfrac{1}{2}} = x.$$

Do f liên tục trên $[0;+\infty)$ nên từ (1) cho $n \to +\infty$, ta được

$$f(x) \le \lim_{n\to+\infty}\left[f\left(\frac{x}{2^n}\right)+\frac{x}{2}+\frac{x}{2^2}+\frac{x}{2^3}+\cdots+\frac{x}{2^n}\right]$$
$$= \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right)+\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2^2}+\frac{x}{2^3}+\cdots+\frac{x}{2^n}\right)$$
$$= f\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{2^n}\right)+x = f(0)+x = x,\ \forall x \ge 0.$$

Vậy $f(x) \le x,\ \forall x \ge 0$.

Bài toán 6.55. *Tìm các hàm số liên tục $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x) \ge 2xf(x^2),\ \forall x \in [0;1]. \tag{1}$$

Giải.
Cách 1. Trong (1) lấy $x=0$ được $f(0)\ge 0$. Lấy $x=1$ được

$$f(1) \ge 2f(1) \Leftrightarrow f(1) \le 0. \tag{2}$$

Với $0<x<\dfrac{1}{2}$, sử dụng (1) n lần ta được:

$$f(x) \ge 2xf(x^2) \ge 2x.2x^2f(x^{2.2}) \ge 2x.2x^2.2x^{2.2}.f(x^{2.2.2})$$
$$\ge \cdots \ge 2^n x^{1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}} f(x^{2^n}) = (2x)^n x^{2^n-n-1} f(x^{2^n}). \tag{3}$$

Vì $2x\in(0;1)$ và f liên tục nên

$$\lim_{n\to+\infty}\left[(2x)^n x^{2^n-n-1}f(x^{2^n})\right] = 0.f(0) = 0. \tag{4}$$

Từ (3) và (4) suy ra: $f(x)\ge 0,\ \forall x\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right)$. (5)

Với $x\in(0;1)$, từ (1) ta có $f(\sqrt{x}) \ge 2\sqrt{x}f(x) \Rightarrow f(x) \le \dfrac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$. Áp dụng liên tiếp ta được: $f(x) \le \dfrac{f\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}{2\sqrt{x}} \le \dfrac{f\left(x^{\frac{1}{2.2}}\right)}{2^2x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}} \le \cdots \le \dfrac{f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right)}{2^n x^{1-\frac{1}{2^n}}}$. (6)

Mà $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right)}{2^n x^{1-\frac{1}{2^n}}} = 0$ nên từ (6) ta có: $f(x)\le 0,\ \forall x\in(0;1)$. (7)

Từ (7) và (5) cho ta: $f(x)=0,\ \forall x\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right)$. (8)

Với mỗi $x\in\left[\dfrac{1}{2};1\right)$, tồn tại $n\in\mathbb{N}$ để $x^{2^n}<\dfrac{1}{2}$. Theo (3), ta có:

$$f(x) \ge 2^n x^{2^n-1} f(x^{2^n}) = 0 \Rightarrow f(x)\ge 0,\ \forall x\in\left[\frac{1}{2};1\right). \tag{9}$$

Từ (9) và (7) cho ta: $f(x)=0,\ \forall x\in\left[\dfrac{1}{2};1\right)$. (10)

Từ (10) và (8) cho ta: $f(x)=0,\ \forall x\in[0;1)$. (11)

Từ (11) suy ra với mọi $n=1,2,\ldots$ thì: $f\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=0$, do đó:

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(1-\frac{1}{n}\right)=0 \Rightarrow f\left(\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n})\right)=0 \Rightarrow f(1)=0.$$

Kết hợp với (11) được: $f(x)=0,\ \forall x\in[0;1]$. Thử lại đúng.

Bài toán 6.56. *Cho các số nguyên $n>m>1$. Tìm các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn: với mọi bộ (x_i) mà $x_1>x_2>\cdots>x_n$ thì*

$$f(x_m) \ge \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}. \tag{1}$$

Giải. Lấy $a>b$. Xét các bộ (x_i) mà $a=x_1>x_2>\cdots>x_n=b$. Do $n>m>1$ nên $m-1\ge 1$. Như vậy khi cho $x_{m-1}\to a$ và $x_m\to b$ thì $x_i\to a$ với $1\le i\le m-1$ (do $a\le x_i\le x_{m-1}$) và $x_j\to b$ với $m\le j\le n$ (do $x_m\le x_j\le b$). Do đó, từ (1), khi cho $x_{m-1}\to a$ và $x_m\to b$, kết hợp với tính liên tục của hàm f, suy ra:

$$f(b) \ge \frac{(m-1)f(a)+[n-(m-1)]f(b)}{n}$$
$$\Rightarrow nf(b) \ge (m-1)f(a)+[n-(m-1)]f(b)$$
$$\Rightarrow (m-1)f(b) \ge (m-1)f(a) \Rightarrow f(b)\ge f(a). \tag{1}$$

Tương tự, cho $x_m\to a$ và $x_{m+1}\to b$, ta thu được:

$$f(a) \ge \frac{mf(a)+(n-m)f(b)}{n} \Rightarrow f(a)\ge f(b). \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra $f(a)=f(b)$. Vậy f là hàm hằng. Thử lại thấy thỏa mãn.
Lưu ý. Nếu hàm số $f:D\to\mathbb{R}$ thỏa mãn: với $a,b\in D$ bất kì sao cho $a<b$, ta luôn có $f(a)=f(b)$ thì f là hàm hằng trên D.

Bài toán 6.57. *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn: với mọi số thực a,b sao cho $a<b$, luôn tồn tại $c\in(a;b)$ sao cho:*

$$f(c) \ge \max\{f(a),f(b)\}.$$

Giải. Lấy hai số $a<b$ tùy ý. Do hàm số f liên tục trên $[a;b]$ nên tồn tại giá trị lớn nhất trên đoạn này. Đặt: $M=\max\limits_{[a;b]} f(x),\ A=\{x\in[a;b]|f(x)=M\}$.
Vì $A\ne\emptyset$ và bị chặn nên tồn tại $\alpha=\inf A,\ \beta=\sup A$. Theo định lí **8** (ở trang

260), tồn tại dãy số $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ trong $[a;b]$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup A = \alpha$, và tồn tại dãy số $(y_n)_{n=1}^{+\infty}$ trong $[a;b]$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \inf A = \beta$. Vì hàm f liên tục nên ta có:

$$f(\alpha) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} M = M$$

$$f(\beta) = f\left(\lim_{n\to+\infty} y_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \lim_{n\to+\infty} M = M.$$

Vậy $f(\alpha) = f(\beta) = M$. (*)

- Nếu $\alpha > a$ thì theo giả thiết, tồn tại $c \in (a, \alpha)$ sao cho:

  $$f(c) \geq \max\{f(a), f(\alpha)\} \Rightarrow f(c) \geq f(\alpha) \Rightarrow f(c) \geq M \Rightarrow f(c) = M.$$

  Như vậy $c < \alpha$ và $f(c) = M$, điều này mâu thuẫn với cách chọn α, do đó $\alpha = a$.

- Nếu $\beta < b$ thì theo giả thiết, tồn tại $d \in (\beta, b)$ sao cho:

  $$f(d) \geq \max\{f(b), f(\beta)\} \Rightarrow f(d) \geq f(\beta) \Rightarrow f(d) \geq M \Rightarrow f(d) = M.$$

  Như vậy $d > \beta$ và $f(d) = M$, điều này mâu thuẫn với cách chọn β, do đó $\beta = b$.

Tóm lại, (*) trở thành: $f(a) = f(b)$. Vậy f là hàm hằng trên $\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Lưu ý. Liên quan đến khái niệm Cận trên đúng và Cận dưới đúng, bạn đọc hãy xem lại mục 2.6.1 (ở trang 259).

6.2.7 Một số phương pháp khác và toán tổng hợp

Bài toán 6.58 (Canada National Olympiad 2007). *Giả sử hàm số f xác định trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị trong $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(xy) + f(y - x) \geq f(y + x),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

a) Hãy chỉ ra một đa thức khác đa thức hằng và thỏa mãn các điều kiện trên.
b) Chứng minh rằng $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Giải.
a) Xét đa thức $f(x) = x^2 + 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Với mọi x và y thuộc $\mathbb{R}$ ta có

$$f(xy) + f(y - x) - f(y + x) = (x^2y^2 + 4) + (y - x)^2 - (y + x)^2$$
$$= x^2y^2 - 4xy + 4 = (xy - 2)^2 \geq 0.$$

Vậy $f(xy) + f(y - x) \geq f(y + x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ hay đa thức $f(x) \equiv x^2 + 4$ thỏa mãn các điều kiện đã cho.
b) Trong (1) thay y bởi $\dfrac{x}{x-1}$ ta được

$$f\left(\frac{x^2}{x-1}\right) + f\left(\frac{x}{x-1} - x\right) \geq f\left(\frac{x}{x-1} + x\right),\ \forall x \neq 1$$
$$\Leftrightarrow f\left(\frac{x^2}{x-1}\right) + f\left(\frac{-x^2+2x}{x-1}\right) \geq f\left(\frac{x^2}{x-1}\right),\ \forall x \neq 1$$
$$\Leftrightarrow f\left(\frac{-x^2+2x}{x-1}\right) \geq 0,\ \forall x \neq 1. \quad (2)$$

Hàm số $g(x) = \dfrac{-x^2+2x}{x-1}$, $\forall x \neq 1$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$ vì với mọi $a \in \mathbb{R}$ thì phương trình $\dfrac{-x^2+2x}{x-1} = a$ luôn có nghiệm $x \neq 1$. Thật vậy, ta có

$$\frac{-x^2+2x}{x-1} = a \text{ (với } x \neq 1)$$
$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x = ax - a \text{ (với } x \neq 1)$$
$$\Leftrightarrow x^2 + (a-2)x - a = 0 \text{ (với } x \neq 1). \quad (3)$$

Mà $\Delta = (a-2)^2 + 4a = a^2 + 4 > 0$ và $x = 1$ không phải là nghiệm của (3) nên phương trình $\dfrac{-x^2+2x}{x-1} = a$ luôn có nghiệm $x \neq 1$. Do đó

$$(2) \Leftrightarrow f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 6.59. *Cho hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ thỏa mãn $f(1) = 0$ và*

$$f(n) = \max_j\{f(j) + f(n-j) + j\},\ \forall n \geq 2.$$

Chứng minh rằng $f(n) \geq \dfrac{(n-1)n}{2}$, $\forall n \geq 2$.

Giải. Từ giả thiết, ta có

$$f(n) = \max_{k\in[1,n-1]}\{f(k) + f(n-k) + k\},\ \forall n \geq 2$$
$$\Rightarrow f(n) \geq f(n-1) + f(1) + n - 1,\ \forall n \geq 2 \text{ (do lấy } k = n-1)$$
$$\Rightarrow f(n) \geq f(n-1) + n - 1,\ \forall n \geq 2. \quad (*)$$

Sử dụng (*) liên tiếp, ta được

$$f(2) \geq f(1) + 1$$

$$f(3) \geq f(2) + 2$$
$$f(4) \geq f(3) + 3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(n) \geq f(n-1) + n - 1.$$

Cộng lại, ta được

$$f(n) \geq 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}, \forall n \geq 2.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 6.60. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(xy) = \max\{f(x+y), f(x).f(y)\}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Từ (1) lấy $x = 0$ ta được

$$f(0) = \max\{f(y), f(0).f(y)\}, \ \forall y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ (2) lấy $y = 0$ ta được $f(0) \geq f^2(0) \Leftrightarrow 0 \leq f(0) \leq 1$. Giả sử $\exists y \in \mathbb{R}$ sao cho $f(y) < 0$. Khi đó $f(y) \leq f(0).f(y)$, do đó kết hợp với (2) suy ra

$$f(0) = f(0)f(y) \Leftrightarrow f(0)[f(y) - 1] = 0 \Rightarrow f(0) = 0.$$

Vậy (2) trở thành $0 = \max\{f(y), 0\}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, suy ra $f(y) \leq 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

• Như vậy nếu $\exists y \in \mathbb{R} : f(y) < 0$ thì $f(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Do đó theo (1) suy ra

$$f(x) = \max\{f(x+1), f(x).f(1)\} = f(x).f(1) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó $f(x) = 0 = f(0), \forall x \in \mathbb{R}$.

• Còn nếu $f(y) \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}$ thì $f(y) \geq f(0)f(y), \forall y \in \mathbb{R}$. Do đó (2) trở thành

$$f(y) = f(0), \forall y \in \mathbb{R}.$$

Vậy $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$ (c là hằng số). Thay vào (1) ta được

$$c = \max\{c, c^2\} \Leftrightarrow c \in [0; 1].$$

Hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$ ($c \in [0; 1]$ là hằng số).

Bài toán 6.61 (Morocco National Olympiad 2011, day 1). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, thỏa mãn*

$$f(x) = \max_{y \in \mathbb{R}} \{2xy - f(y)\}, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Từ (1), ta có $f(x) \geq 2xy - f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. (2)
Từ (2), lấy $y = x$ ta được $f(x) \geq x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (3)
Từ (3), suy ra

$$2xy - f(y) \leq 2xy - y^2 = x^2 - (x-y)^2, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Mà $\max\limits_{y \in \mathbb{R}} \{2xy - y^2\} = \max\limits_{y \in \mathbb{R}} \{x^2 - (x-y)^2\} = x^2$ nên từ (4), suy ra

$$2xy - f(y) \leq \max_{y \in \mathbb{R}} \{2xy - f(y)\} = x^2, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Từ (5), suy ra $x^2 \geq \max\limits_{y \in \mathbb{R}} \{2xy - f(y)\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Từ đây sử dụng (1), ta được

$$x^2 \geq f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Từ (3) và (6) suy ra $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (7)
Thử lại : với hàm số xác định bởi (7), thì với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\max_{y \in \mathbb{R}} \{2xy - f(y)\} = \max_{y \in \mathbb{R}} \{2xy - y^2\} = \max_{y \in \mathbb{R}} \{x^2 - (x-y)^2\} = x^2.$$

Vậy hàm số xác định bởi (7) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Lưu ý. Từ lời giải bài toán 6.61, ta thấy rằng : nếu có một bất đẳng thức cho cặp số x, y, chẳng hạn như $x^2 \geq 2xy - y^2$, thì từ điều kiện

$$f(x) \geq \max_{y \in \mathbb{R}} \{2xy - f(y)\}, \forall x \in \mathbb{R}$$

ta có ngay hàm số cần tìm là $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Chẳng hạn như với bất đẳng thức

$$x^3 \geq x^2y + xy^2 - y^3, \ \forall x, y \in [0; +\infty)$$

thì từ điều kiện

$$f(x) = \max_{y \in [0; +\infty)} \{x^2y + xy^2 - f(y)\}; \ \forall x \in [0; +\infty)$$

ta thu được bài toán sau.

Bài toán 6.62. *Tìm tất cả các hàm số $f : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$, thỏa mãn*

$$f(x) = \max_{y \in [0; +\infty)} \{x^2y + xy^2 - f(y)\}, \forall x \in [0; +\infty). \tag{1}$$

Giải. Từ (1), ta có $f(x) \geq x^2y + xy^2 - f(y)$, $\forall x, y \in [0; +\infty)$. (2)
Từ (2), lấy $y = x$ ta được $f(x) \geq x^3$, $\forall x \in [0; +\infty)$. (3)
Từ (3), suy ra

$$x^2y + xy^2 - f(y) \leq x^2y + xy^2 - y^3$$

$$
\begin{aligned}
&= x^3 + x^2y + xy^2 - (x^3 + y^3) \\
&= x^3 + xy(x+y) - (x+y)^3 + 3xy(x+y) \\
&= x^3 + 4xy(x+y) - (x+y)^3 \\
&= x^3 + (x+y)[4xy - (x+y)^2] \\
&= x^3 - (x+y)(x-y)^2 \le x^3,\ \forall x, y \in [0;+\infty). \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Mà

$$\max_{y\in[0;+\infty)} \left\{x^2y + xy^2 - y^3\right\} = \max_{y\in[0;+\infty)} \left\{x^3 - (x+y)(x-y)^2\right\} = x^3,\ \forall x \ge 0$$

nên từ (4), suy ra

$$x^2y + xy^2 - f(y) \le \max_{y\in[0;+\infty)} \left\{x^2y + xy^2 - y^3\right\} = x^3,\ \forall x \in [0;+\infty). \qquad (5)$$

Từ (5), suy ra $\max\limits_{y\in[0;+\infty)} \left\{x^2y + xy^2 - y^3\right\} \le x^3, \forall x \in [0;+\infty)$. Từ đây sử dụng (1), ta được

$$f(x) \le x^3,\ \forall x \in [0;+\infty). \qquad (6)$$

Từ (3) và (6) suy ra $f(x) = x^3, \forall x \in [0;+\infty)$. (7)

Thử lại : với hàm số xác định bởi (7), thì với mọi $x \ge 0$, ta có

$$\max_{y\in[0;+\infty)} \left\{x^2y + xy^2 - y^3\right\} = \max_{y\in[0;+\infty)} \left\{x^3 - (x+y)(x-y)^2\right\} = x^3.$$

Vậy hàm số xác định bởi (7) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 6.63 (Olympic Toán Sinh viên Toàn quốc 2013). *Cho $\alpha \ge \beta > 0$. Hãy tìm các hàm số $f : (0;+\infty) \to \mathbb{R}$, thỏa mãn điều kiện*

$$f(x) = \max\left\{x^\alpha y^\beta - f(y) : y \ge x\right\},\ \forall x \in (0;+\infty). \qquad (1)$$

Giải. Từ (1) suy ra $f(x) \ge x^\alpha y^\beta - f(y)$, $\forall x \in (0;+\infty)$, $\forall y \ge x$. Từ đây lấy $y = x$, ta được $f(x) \ge x^\alpha x^\beta - f(x)$, $\forall x \in (0;+\infty)$, hay

$$f(x) \ge \frac{1}{2}x^{\alpha+\beta},\ \forall x \in (0;+\infty). \qquad (2)$$

Do (2) nên với $y \ge x > 0$, ta có

$$x^\alpha y^\beta - f(y) \le x^\alpha y^\beta - \frac{y^{\alpha+\beta}}{2}. \qquad (3)$$

Với $y \ge x > 0$ và $\alpha \ge \beta > 0$, ta có sự tương đương sau :

$$x^\alpha y^\beta - \frac{y^{\alpha+\beta}}{2} \le \frac{x^{\alpha+\beta}}{2} \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow x^\alpha y^\beta \le \frac{x^{\alpha+\beta}}{2} + \frac{y^{\alpha+\beta}}{2} \Leftrightarrow 2 \le \left(\frac{x}{y}\right)^\beta + \left(\frac{y}{x}\right)^\alpha. \qquad (5)$$

Với $y \ge x > 0$ và $\alpha \ge \beta > 0$, ta có

$$\left(\frac{x}{y}\right)^\beta + \left(\frac{y}{x}\right)^\alpha \ge 2\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^\beta \left(\frac{y}{x}\right)^\alpha} = 2\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^{\beta-\alpha}} \ge 2\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^0} = 2.$$

Do đó (5) đúng, hay (4) đúng, do đó kết hợp với (3), ta được

$$
\begin{aligned}
&x^\alpha y^\beta - f(y) \le \frac{x^{\alpha+\beta}}{2},\ \forall x \in (0;+\infty),\ \forall y \ge x \\
&\Rightarrow \max\left\{x^\alpha y^\beta - f(y) : y \ge x\right\} \le \frac{x^{\alpha+\beta}}{2},\ \forall x \in (0;+\infty) \\
&\Rightarrow f(x) \le \frac{x^{\alpha+\beta}}{2},\ \forall x \in (0;+\infty). \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Từ (6) và (2), suy ra $f(x) = \dfrac{x^{\alpha+\beta}}{2}$, $\forall x \in (0;+\infty)$. (7)

Thử lại : với hàm số f xác định bởi (7), thì với mọi $x > 0$, ta có

$$\max\left\{x^\alpha y^\beta - f(y) : y \ge x\right\} = \max\left\{x^\alpha y^\beta - \frac{y^{\alpha+\beta}}{2} : y \ge x\right\}.$$

Ta sẽ chứng minh

$$\max\left\{x^\alpha y^\beta - \frac{y^{\alpha+\beta}}{2} : y \ge x\right\} = \frac{x^{\alpha+\beta}}{2},\ \forall x \in (0;+\infty). \qquad (8)$$

Do (4) nên

$$\max\left\{x^\alpha y^\beta - \frac{y^{\alpha+\beta}}{2} : y \ge x\right\} \le \frac{x^{\alpha+\beta}}{2},\ \forall x \in (0;+\infty). \qquad (9)$$

Mặt khác, với $y = x$ thì $x^\alpha y^\beta - \dfrac{y^{\alpha+\beta}}{2} = \dfrac{x^{\alpha+\beta}}{2}$, do đó

$$\frac{x^{\alpha+\beta}}{2} \le \max\left\{x^\alpha y^\beta - \frac{y^{\alpha+\beta}}{2} : y \ge x\right\},\ \forall x \in (0;+\infty). \qquad (10)$$

Từ (9) và (10), suy ra (8) đúng. Do đó hàm số xác định bởi (7) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 6.64 (Bulgaria 2007). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn: $f(0) \le 0$ và: $f(x+y) \le x + f(f(x)),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.* (1)

Giải. Trong (1) thay x bởi 0 và y bởi $f(x)$, ta được:

$$f(f(x)) \le f(f(0)), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $f(x+y) \le x + f(f(0)), \forall x, y \in \mathbb{R}$. (3)
Trong (3), thay x bởi $y - f(f(0))$ và thay y bởi $1 + f(f(0)) - y$, ta được:

$$f(1) \le y, \forall y \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Dễ thấy (4) không đúng, chẳng hạn khi chọn $y = f(1) - 3$. Vậy không có hàm số nào thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài toán 6.65 (Chọn đội tuyển Bulgaria 2007). *Tìm tất cả $a \in \mathbb{R}$ sao cho tồn tại một hàm số khác hàm hằng $f : (0;1] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$a + f(x+y-xy) + f(x)f(y) \le f(x) + f(y), \forall x, y \in (0;1]. \quad (1)$$

Giải. Từ (1) cho $x = y = 1$, ta được: $a + f(1) + [f(1)]^2 \le 2f(1)$. Suy ra

$$a \le -[f(1)]^2 + f(1) = -\left[f(1) - \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{1}{4} \le \frac{1}{4}. \quad (2)$$

• Với $a < \frac{1}{4}$, ta lấy một hàm số $f : (0;1] \to \left[\frac{1}{2}; \min\left\{\frac{3}{4} - a, 1\right\}\right]$ bất kì, thì hàm số này thỏa mãn (1). Thậy vậy, khi đó, với mọi $x, y \in (0;1]$, ta có:

$$\begin{aligned} &a + f(x+y-xy) + f(x)f(y) - f(x) - f(y) \\ =&a + f(x+y-xy) + [1 - f(x)][1 - f(y)] - 1 \\ \le&a + \left(\frac{3}{4} - a\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0. \end{aligned}$$

• Xét $a = \frac{1}{4}$. Từ (2) suy ra: $\left[f(1) - \frac{1}{2}\right]^2 \le 0 \Leftrightarrow f(1) = \frac{1}{2}$. Từ (1) cho $y = 1$, ta được: $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f(x) \le f(x) + \frac{1}{2}, \forall x \in (0;1]$ hay $f(x) \ge \frac{1}{2}, \forall x \in (0;1]$. (3)
Trong (1) cho $x = y$, ta được:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} + f(2x - x^2) + [f(x)]^2 \le 2f(x), \forall x \in (0;1] \\ \Leftrightarrow &f(2x - x^2) \le -[f(x)]^2 + 2f(x) - \frac{1}{4}, \forall x \in (0;1] \\ \Leftrightarrow &f(2x - x^2) \le -[f(x) - 1]^2 + \frac{3}{4}, \forall x \in (0;1] \\ \Rightarrow &f(2x - x^2) \le \frac{3}{4}, \forall x \in (0;1]. \end{aligned} \quad (4)$$

Nhưng tập giá trị của hàm số $g(x) = 2x - x^2$ trên $(0;1]$ là $(0;1]$ nên từ (4) suy ra: $f(x) \le \frac{3}{4}, \forall x \in (0;1]$. (5)

Từ (3) và (5), suy ra: $\frac{1}{2} \le f(x) \le \frac{3}{4}, \forall x \in (0;1]$. (6)

Từ (6) suy ra tồn tại $t = \sup\{f(x) : x \in (0;1]\} \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$. Nhưng khi đó thì:

$$\begin{aligned} t &= \sup\left\{f(2x - x^2) : x \in (0;1]\right\} \\ &\le \sup\left\{-[f(x)]^2 + 2f(x) - \frac{1}{4} : x \in (0;1]\right\} = -t^2 + 2t - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Vậy $t \le -t^2 + 2t - \frac{1}{4} \Leftrightarrow t^2 - t + \frac{1}{4} \le 0 \Leftrightarrow \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \le 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$. Suy ra: $f(x) = \frac{1}{2}, \forall x \in (0;1]$. Dễ thấy rằng $f(x) = \frac{1}{2}, \forall x \in (0;1]$ thỏa mãn (1), nhưng điều này lại mâu thuẫn với giả thiết f khác hàm hằng.
Kết luận: $a < \frac{1}{4}$.

Bài toán 6.66. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

$$\begin{aligned} &f(x)f(y) \le f(xy), \forall x, y \in \mathbb{R} \\ &f(x) + f(y) \le f(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Giải. Ta sẽ chứng minh hàm số f thỏa mãn

$$\begin{aligned} &f(x)f(y) = f(xy), \forall x, y \in \mathbb{R}, \\ &f(x) + f(y) = f(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

sau đó sử dụng bài toán 2.169 ở trang 218 để suy ra kết quả. Dễ thấy hàm số $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Tiếp theo ta chỉ xét $f(x) \not\equiv 0$, tức là tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f(a) \ne 0$. Kí hiệu $P(x,y)$, $Q(x,y)$ lần lượt là khẳng định: $f(x)f(y) \le f(xy), \forall x, y \in \mathbb{R}$; $f(x) + f(y) \le f(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} P(0,0) \Rightarrow [f(0)]^2 \le f(0) \\ Q(0,0) \Rightarrow f(0) \le 0 \end{cases} \Rightarrow [f(0)]^2 \le 0 \Rightarrow f(0) = 0.$$

$$\begin{cases} P(a,a) \Rightarrow [f(a)]^2 \le f(a^2) \Rightarrow f(a^2) > 0 \\ Q(a^2,-a^2) \Rightarrow f(a^2) + f(-a^2) \le 0 \end{cases} \Rightarrow f(-a^2) \le -f(a^2) < 0.$$

$$\begin{cases} P(a^2,1) \Rightarrow f(a^2)f(1) \le f(a^2) \Rightarrow f(1) \le 1 \\ P(-a^2,1) \Rightarrow f(-a^2)f(1) \le f(-a^2) \Rightarrow f(1) \ge 1 \end{cases} \Rightarrow f(1) = 1.$$

$$\begin{cases} P(-1,-1) \Rightarrow [f(-1)]^2 \le 1 \\ Q(-1,1) \Rightarrow f(-1) + 1 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \le f(-1) \le 1 \\ f(-1) \le -1 \end{cases} \Rightarrow f(-1) = -1.$$

$$\begin{cases} P(x,-1) \Rightarrow -f(x) \le f(-x) \\ Q(x,-x) \Rightarrow f(x)+f(-x) \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -f(x) \le f(-x) \\ -f(x) \ge f(-x) \end{cases}$$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$

$$\begin{cases} P(x,-y) \Rightarrow f(x)f(-y) \le f(-xy) \\ P(x,y) \Rightarrow f(x)f(y) \le f(xy) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -f(x)f(y) \le -f(xy) \\ f(x)f(y) \le f(xy) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x)f(y) \ge f(xy) \\ f(x)f(y) \le f(xy) \end{cases} \Rightarrow f(x)f(y) = f(xy), \forall x,y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

$Q(-x,-y) \Rightarrow f(-x)+f(-y) \le f(-x-y)$

$\Rightarrow -f(x)-f(y) \le -f(x+y) \Rightarrow f(x)+f(y) \ge f(x+y), \forall x,y \in \mathbb{R}.$ (2)

Từ (2) và giả thiết suy ra: $f(x)+f(y) = f(x+y), \forall x,y \in \mathbb{R}.$ (3)

Từ (1) và (3), sử dụng bài toán 2.169 ở trang 218 ta được $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}; \quad f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 6.67 (Ôlympic Toán Quốc tế năm 2013). *Kí hiệu $\mathbb{Q}_{>0}$ là tập hợp các số hữu tỉ dương. Cho $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ là hàm số thỏa mãn ba điều kiện:*
i) Với mọi $x,y \in \mathbb{Q}_{>0}$, ta có $f(x)f(y) \ge f(xy)$.
ii) Với mọi $x,y \in \mathbb{Q}_{>0}$, ta có $f(x+y) \ge f(x)+f(y)$.
iii) Tồn tại số hữu tỉ $a > 1$ sao cho $f(a) = a$.
Chứng minh rằng $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Giải. Trong (i), lấy $x = 1$ và $y = a$, ta được

$$f(1)f(a) \ge f(a) \Rightarrow af(1) \ge a \Rightarrow f(1) \ge 1.$$

Từ (ii) suy ra với $n \in \mathbb{Z}, n \ge 1$, ta có $f(nx) \ge nf(x), \forall x \in \mathbb{Q}_{>0}$, suy ra

$$f(n) \ge nf(1) \ge n \Rightarrow f(n) \ge n, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Ta có $f(q)f(\frac{p}{q}) \overset{\text{do (i)}}{\ge} f(p) \overset{\text{do (1)}}{\ge} p$ $(p,q \in \mathbb{N}^*)$. Từ đây suy ra

$$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{Q}_{>0}. \quad (2)$$

Từ (2) và (ii) suy ra f là hàm tăng nghiêm ngặt trên $\mathbb{Q}_{>0}$. Với q là số hữu tỉ, $q > 1$, ta có $f(q) \ge f([q]) \ge [q] > q-1$.

• Chứng minh: $f(q) \ge q$, với q là số hữu tỉ lớn hơn 1. Giả sử tồn tại $q \in \mathbb{Q}$, $q > 1$ sao cho $f(q) < q$, khi đó $f(q) = q-\varepsilon$, với $0 < \varepsilon < 1$. Ta có

$$(q-\varepsilon)^n = f(q)^n \overset{\text{do (i)}}{\ge} f(q^n) > q^n - 1.$$

Do đó $\left(\frac{q-\varepsilon}{q}\right)^n > 1 - \frac{1}{q^n}, \forall n = 1,2,\ldots$ Từ đây cho $n \to +\infty$, ta được $0 \ge 1$, vô lí. Vậy với mọi q là số hữu tỉ lớn hơn 1, ta có $f(q) \ge q$.

• Chứng minh: $f(q) = q$, với q là số hữu tỉ, $q \ge 1$. Chọn số nguyên dương n đủ lớn sao cho $a^n - q > 1$. Khi đó

$$a^n = f(a)^n \ge f(a^n) = f(a^n - q + q) \ge f(a^n - q) + f(q) \ge a^n - q + q = a^n.$$

Suy ra $f(q) = q$, với q là số hữu tỉ, $q \ge 1$. (3)

• Giả sử $q \in \mathbb{Q}_{>0}$ và $q < 1$. Khi đó $\frac{1}{q} > 1$. Ta có

$$f(q)f(\frac{1}{q}) \ge f(1) \Rightarrow f(q)\frac{1}{q} \ge f(1) \Rightarrow f(q)\frac{1}{q} \ge 1 \Rightarrow f(q) \ge q.$$

Vậy $f(q) \ge q, \forall q \in \mathbb{Q}_{>0}$. Giả sử tồn tại số hữu tỉ $q \in (0;1)$ sao cho $f(q) > q$. Khi đó

$$f(nq) \overset{\text{do (ii)}}{\ge} nf(q) > nq, \forall n = 2,3,\ldots \quad (4)$$

Chọn $n \in \mathbb{N}^*$, đủ lớn sao cho $nq > 1$, khi đó từ (4) ta có $f(nq) > nq$, điều này mâu thuẫn với (3). Vậy, với mọi số hữu tỉ $q \in (0;1)$, ta có $f(q) = q$. (5)

Từ (3) và (5) suy ra $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{Q}_{>0}$, điều phải chứng minh.

Bài toán 6.68. *Cho hàm số $f : \mathbb{Q} \to [0;+\infty)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:*

- $f(xy) = f(x)f(y), \forall x,y \in \mathbb{Q}.$ (1)
- $f(x) \le 1 \Rightarrow f(x+1) \le 1, \forall x \in \mathbb{Q}.$ (2)
- $f\left(\frac{2003}{2002}\right) = 2.$ (3)

Tìm các giá trị có thể có của $f\left(\frac{2004}{2003}\right)$.

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Từ (1) cho $x = y = 0$ ta được: $f(0) = [f(0)]^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(0) = 1. \end{array}\right.$ Nếu $f(0) = 1$ thì cho $y = 0$ vào (1) ta được: $f(0) = f(x)f(0), \forall x \in \mathbb{Q}$ hay $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{Q}$, điều này mâu thuẫn với (3). Vậy $f(0) = 0$. Bây giờ giả sử có $x \in \mathbb{Q}, x \ne 0$ mà $f(x) = 0$. Khi đó với mọi $y \in \mathbb{Q}$, ta có:

$$f(y) = f\left(\frac{y}{x}.x\right) = f\left(\frac{y}{x}\right)f(x) = 0 \text{ (trái với (3))}.$$

Vậy với mọi $x \in \mathbb{Q}, x \ne 0$ thì $f(x) > 0$. Từ đó bằng cách cho $x = y = 1$ vào (1) ta được $f(1) = 1$, cho $x = y = -1$ vào (1) ta được $f(-1) = 1$. Ta có f là hàm chẵn vì:

$$f(-x) = f(-1.x) = f(-1)f(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Từ (2) suy ra rằng với mọi $x \in \mathbb{N}$, ta đều có: $f(x) \leq 1$. Mà f là hàm chẵn nên $f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{Z}$. Bây giờ giả sử $0 < f(x) \leq f(y)$. Ta có:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) f(y) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)} \leq 1 \overset{\text{do (2)}}{\Rightarrow} f\left(\frac{x}{y}+1\right) \leq 1$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x+y}{y}\right) \leq 1 \Rightarrow \frac{f(x+y)}{f(y)} \leq 1 \Rightarrow f(x+y) \leq f(y).$$

Vậy, với mọi $x, y \in \mathbb{Q}$, ta đều có: $f(x+y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$. (4)
Kí hiệu $\mathcal{P}$ là tập hợp các số nguyên tố. Ta đã có: $f(p) \leq 1, \forall p \in \mathcal{P}$. Nếu $f(p) = 1, \forall p \in \mathcal{P}$ thì dùng (1) ta sẽ có $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$. Thật vậy, có thể xem $x = \frac{m}{n}$, với $n, m \in \mathbb{N}^*$ (do f là hàm chẵn), khi đó phân tích m, n ra thừa số nguyên tố và sử dụng (1) sẽ có $f(x) = 1$, mâu thuẫn với (3). Vậy tồn tại số nguyên tố p sao cho $f(p) < 1$. Lấy tùy ý $q \in \mathcal{P}\backslash\{p\}$, khi đó:

$$(p, q) = 1 \Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} : mp + nq = 1.$$

Sử dụng (4) ta được:

$$1 = f(1) = f(mp + nq) \leq \max\{f(mp), f(nq)\} \leq 1$$
$$\Rightarrow 1 = \max\{f(mp), f(nq)\}.$$

Nhưng $f(mp) = f(m)f(p) \overset{\text{do } f(p)<1}{<} f(m) \leq 1 \Rightarrow f(mp) < 1$ nên:

$$f(nq) = 1 \Rightarrow f(n)f(q) = 1 \Rightarrow f(q) = f(n) = 1 \ (\text{do } f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{Z}).$$

Tóm lại, với mọi số nguyên tố $q \neq p$ ta đều có $f(q) = 1$. Bây giờ từ (1) và (3) ta có: $2 = f\left(\frac{2003}{2002}\right) = \frac{f(2003)}{f(2)f(7)f(11)f(13)}$. Suy ra một và chỉ một trong các giá trị $f(2), f(7), f(11), f(13)$ là bằng $\frac{1}{2}$. Do đó $f(3) = f(167) = f(2003) = 1$.
Từ đó:

$$f\left(\frac{2004}{2003}\right) = \frac{[f(2)]^2 f(3) f(167)}{f(2003)} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } p \in \{7, 11, 13\} \\ \frac{1}{4} & \text{nếu } p = 2. \end{cases}$$

. . . . . .

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Tài Chung, 2012, *Giải phương trình hàm bằng phương pháp thêm biến*, Kỷ yếu Hội thảo khoa học: Các chuyên đề toán bồi dưỡng giáo viên THPT chuyên.

[2] Nguyễn Tài Chung, 2013, *Sáng tạo và giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình*, NXB Tổng hợp Thành Phố Hồ Chí Minh.

[3] Nguyễn Tài Chung, 2013, *Chuyên khảo Dãy số*, NXB Đại Học Quốc gia Hà Nội.

[4] Nguyễn Tài Chung, Lê Hoành Phò, 2013, *Chuyên khảo Phương trình hàm*, NXB Đại Học Quốc gia Hà Nội.

[5] Nguyễn Tài Chung, Lê Hoành Phò, Nguyễn Văn Nho, 2013, *Chuyên khảo Đa thức*, NXB Đại Học Quốc gia Hà Nội.

[6] Nguyễn Tài Chung, 2013, *Phương trình hàm trong lớp hàm đơn điệu và lớp hàm bị chặn*, Kỷ yếu Hội thảo khoa học: Các phương pháp giải toán qua các kỳ thi Olympic.

[7] J. Aczél, 1966, *Lectures on functional equations and their applications*, ACADEMIC PRESS New York and London.

[8] Nguyễn Trọng Tuấn, 2004, *Bài toán hàm số qua các kì thi OLYMPIC*, NXB Giáo dục.

[9] Nguyễn Văn Mậu, 1996, *Phương trình hàm*, NXB Giáo dục.

[10] Nguyen Van Mau, 2005, *Algebraic Elements and boundary value problems in linear spaces*, VNU House Publishers.

[11] Nguyễn Quý Dy, Nguyễn Sinh Nguyên, Nguyễn Văn Nho, Vũ Văn Thỏa, Vũ Dương Thụy 2006, *Tuyển tập 200 bài thi vô địch toán-tập 8: Phương trình hàm*, NXB Giáo dục.

[12] Nguyễn Văn Mậu, 2006, *Lý thuyết toán tử và phương trình tích phân kỳ dị*, NXB Đại Học Quốc gia Hà Nội.

[13] Các tài liệu trên Internet.

Mục lục

Lời nói đầu 2

1 Phương trình hàm với phép biến đổi đối số 3

1.1 Một số kiến thức về hàm số và ánh xạ 3
1.1.1 Ánh xạ 3
1.1.2 Đơn ánh, toàn ánh, song ánh 4
1.1.3 Hàm số 4
1.1.4 Một số bài toán áp dụng 5
1.2 Mở đầu về phương trình hàm 9
1.2.1 Phương trình hàm dạng $f(A) = B$ 9
1.2.2 Phương trình chứa hai biểu thức $f(A)$, $f(B)$ 10
1.2.3 Một số kĩ thuật thường dùng 15
1.2.4 Phương pháp thế giá trị đặc biệt 16
1.3 Hàm số xác định bởi các phép biến đổi tịnh tiến và đồng dạng 20
1.3.1 Các bài toán liên quan đến các hàm tuần hoàn 20
1.3.2 Phương trình hàm sinh bởi phép đối xứng, phép nghịch đảo. Các bài toán liên quan đến các hàm chẵn, hàm lẻ 31
1.3.3 Phương trình hàm $f(x+a) = f(x) + b$ 40
1.3.4 Phương trình hàm $f(x+a) = -f(x) + b$ 42
1.3.5 Phương trình hàm $f(x+a) = \alpha f(x) + b$ 44
1.3.6 Phương trình hàm $f(ax) = \alpha f(x) + b$ với $a \neq \pm 1$. 49
1.3.7 Phương trình hàm $f(ax+b) = \alpha f(x) + c$, với $a \neq \pm 1$ và $\alpha \pm 1$ 50
1.4 Hàm số xác định bởi phép biến đổi phân tuyến tính 54
1.4.1 Phương trình hàm dạng $f\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right) = \alpha f(x) + \beta$. 54
1.4.2 Phương trình hàm dạng $f(g(x)) = g(f(x))$ 59
1.4.3 Một vài dạng khác 63
1.5 Một số bài toán về hệ phương trình hàm 66
1.6 Phương trình hàm sai phân bậc một 70
1.7 Phương trình hàm sai phân bậc hai 74
1.7.1 Phương trình hàm sai phân bậc hai với hàm tuần hoàn và phản tuần hoàn cộng tính 74
1.7.2 Phương trình hàm sai phân bậc hai với hàm tuần hoàn và phản tuần hoàn nhân tính 85
1.8 Phương trình hàm sai phân tuyến tính bậc ba 90

2 Giải phương trình hàm trên tập số thực 93

2.1 Giải phương trình hàm bằng phép thế 93
2.1.1 Một số lưu ý 93
2.1.2 Làm quen với phép thế giá trị đặc biệt 94
2.1.3 Sử dụng tính chất đối xứng của các biến 109
2.1.4 Phương pháp phân li biến số 110
2.1.5 Phép thế tổng-hiệu 114
2.1.6 Phép thế triệt tiêu 116
2.1.7 Sự khác nhau khi giải phương trình hàm và giải phương trình 122
2.1.8 Phương trình hàm với nhiều ẩn hàm 131
2.1.9 Các bài toán tổng hợp 135
2.2 Phương pháp tính theo hai cách 160
2.2.1 Một số lưu ý. 160
2.2.2 Các bài toán minh họa phương pháp. 160
2.2.3 Sử dụng đa thức. 164
2.2.4 Tạo chu trình. 166
2.2.5 Toán tổng hợp. 168
2.3 Giải phương trình bằng cách khai thác tính đơn ánh, toàn ánh, song ánh 174
2.3.1 Một số lưu ý 174
2.3.2 Sử dụng đơn ánh 175
2.3.3 Sử dụng toàn ánh và song ánh 183
2.3.4 Các bài toán tổng hợp 188
2.4 Giải phương trình hàm dựa vào giá trị của đối số và giá trị của hàm số 200

2.5 Phương trình hàm trong lớp hàm đơn điệu 212
2.5.1 Một số định nghĩa và tính chất 212
2.5.2 Một số lưu ý khi giải toán 213
2.5.3 Sử dụng tính chất: $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ 214
2.5.4 Phương pháp kẹp giá trị hàm số 216
2.5.5 Phương pháp thác triển từ $\mathbb{Q}$ lên $\mathbb{R}$ 217
2.5.6 Đưa về hàm đơn điệu và cộng tính 221
2.5.7 Đưa về hàm cộng tính và nhân tính 226
2.5.8 Phương trình hàm $f(G(x,y)) = G(y,x)$ 230
2.5.9 Các bài toán tổng hợp 233
2.6 Phương trình hàm trong lớp các hàm bị chặn 259
2.6.1 Một vài lưu ý khi giải toán. 259
2.6.2 Một số bài toán. 261
2.7 Phương trình hàm trong lớp các hàm liên tục 267
2.7.1 Một số lưu ý 267
2.7.2 Xây dựng dãy số hữu tỉ 268
2.7.3 Phương trình với một ẩn hàm 271
2.7.4 Sử dụng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số 274
2.7.5 Phương trình hàm Cauchy (Côsi) và ứng dụng 278
2.7.6 Liên hệ giữa hàm liên tục và hàm đơn điệu 296
2.7.7 Suy luận dựa vào đồ thị của hàm liên tục 301
2.7.8 Phương trình với nhiều ẩn hàm 303
2.7.9 Phương trình hàm Cauchy (Côsi) trên một đoạn 307
2.7.10 Các bài toán tổng hợp 313
2.8 Phương trình hàm dạng $f(G(x,y)) = F(f(x), f(y))$ 320
2.8.1 Phương trình hàm $f(x+y) = F(f(x), f(y))$ 321
2.8.2 Phương trình hàm $f(x+y) = F(f(x-y), f(x), f(y), x, y)$ 327
2.8.3 Phương trình hàm $f(ax+by+c) = Af(x) + Bf(y) + C$ 332
2.8.4 Phương trình hàm $f(ax+by+c) = F(f(x), f(y))$ . . . 335
2.9 Phương trình hàm trong lớp hàm lượng giác 337
2.10 Phương trình hàm có sử dụng đạo hàm 346
2.11 Giải phương trình hàm bằng phương pháp thêm biến 353
2.12 Phương trình hàm sinh bởi hằng đẳng thức 371

3 Phương trình hàm đa thức 384

3.1 Đa thức xác định bởi phép biến đổi đối số 384
3.2 Sử dụng tính chất nghiệm và so sánh bậc 390
3.3 Phương trình dạng $P(f)P(g) = P(h)$ 411
3.4 Phương trình dạng $P(f)P(g) = P(h) + Q$ 417
3.5 Sử dụng số phức để giải phương trình hàm đa thức 418
3.6 Phương pháp sáng tác bài toán mới 426

4 Phương trình hàm trên $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ 431

4.1 Áp dụng một số nguyên lý và tính chất đặc trưng của tập số nguyên 431
4.1.1 Nguyên lý quy nạp toán học 431
4.1.2 Nguyên lý sắp thứ tự tốt 444
4.1.3 Phương pháp sử dụng biểu diễn số nguyên 446
4.1.4 Hệ đếm cơ số 453
4.2 Áp dụng một số tính chất của dãy số và hàm số để giải phương trình hàm 464
4.2.1 Số hạng tổng quát của dãy số 464
4.2.2 Áp dụng một số tính chất của hàm số 471
4.3 Cấp số cộng và phương trình hàm trên $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ 480
4.4 Phương trình hàm trên tập số hữu tỉ 487
4.5 Một số phương pháp khác và toán tổng hợp 498

5 Sử dụng dãy số để giải một số dạng phương trình hàm 515

5.1 Phương trình hàm dạng $\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x) + g(x) = 0$ 515
5.1.1 Cách giải. 515
5.1.2 Các bài toán. 515
5.1.3 Xây dựng dãy số thông qua hàm ngược. 522
5.2 Phương trình hàm dạng $f(x) = f(g(x))$ 535
5.3 Phương trình hàm dạng $af(x) + bf(g(x)) = h(x)$ 554
5.3.1 Cách giải 554
5.3.2 Sử dụng dãy tuần hoàn 554
5.3.3 Sử dụng dãy hội tụ 558
5.3.4 Sử dụng dãy truy hồi tuyến tính 561

5.4 Sử dụng dãy số trong phương trình hàm đa thức và một số bài toán khác 563

6 Một số phương trình hàm tổng quát. Bất phương trình hàm 570

6.1 Phương trình hàm với đối số biến đổi có tính quay vòng với hệ số biến thiên 570
6.1.1 Dạng $a(x)f(x) + b(x)f(p-x) = c(x)$ 570
6.1.2 Dạng $a(x)f(x) + b(x)f(h(x)) = c(x)$ 573
6.1.3 $f(x) + b(x)[f(x) + f(h(x)) + f\Big(h(h(x))\Big) = c(x)$ 577
6.2 Bất phương trình hàm 579
6.2.1 Sử dụng phép thế 580
6.2.2 Sử dụng tính đơn điệu của hàm số 589
6.2.3 Sử dụng dãy số 593
6.2.4 Xây dựng dãy số để kẹp chặt hơn 602
6.2.5 Chuyển qua giới hạn 604
6.2.6 Sử dụng tính liên tục của hàm số 611
6.2.7 Một số phương pháp khác và toán tổng hợp 614

Tài liệu tham khảo **625**

MỜI BẠN TÌM ĐỌC

www.nhasachkhangviet.vn

CÔNG TY TNHH MỘT THÀNH VIÊN DVVH KHANG VIỆT

Nhà Sách

KHANG VIỆT

Địa chỉ: 71 Đinh Tiên Hoàng - P. Đakao - Quận 1 - Tp. Hồ Chí Minh

Điện thoại: (08) 39115694 - 39105797 - 39111969 - 39111968

Fax: (08) 39110880

Email: khangvietbookstore@yahoo.com.vn

Website: www.nhasachkhangviet.vn

FAHASA

HÀNG VIỆT NAM CHẤT LƯỢNG CAO

8 935092 526140

GIÁ: 134.000 ĐỒNG