3.4 Kết luận Chương 3

Trong chương này, giáo trình đã giới thiệu một số vấn đề cơ bản của lý thuyết về các chuỗi số và chuỗi hàm một biến số. Đối với chuỗi số, chương này đã trình bày định nghĩa, một số tính chất và các tiêu chuẩn để kiểm tra sự hội tụ của chuỗi số như tiêu chuẩn so sánh, tiêu chuẩn Cauchy, tiêu chuẩn d'Alembert, tiêu chuẩn Raabe,... và các ví dụ minh họa. Đối với chuỗi hàm, chúng tôi trình bày định nghĩa và xem xét các khái niệm hội tụ điểm và hội tụ đều. Chúng tôi cũng thiết lập một số tiêu chuẩn để kiểm tra sự hội tụ đều và một số tính chất của tổng của một chuỗi hàm hội tụ đều. Chúng tôi cũng xem xét các tính chất của chuỗi lũy thừa trong chương này.

CÂU HỎI HƯỚNG DẪN ÔN TẬP, THẢO LUẬN VÀ BÀI TẬP THỰC HÀNH

Bài 3.1. Tính tổng các chuỗi sau

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}}$;

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}, \quad m \in \mathbb{N}$.

Bài 3.2. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với các số hạng dương và công sai d.

(1) Tính tổng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$.

(2) Tính giới hạn $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$.

Bài 3.3. Các chuỗi cho sau đây hội tụ hay phân kỳ

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}+1}{n^2+n}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[3]{n^4+1}}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4-1}{2^n}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n^8+7}$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} n \ln \frac{\sqrt[3]{n^5}+4}{\sqrt[3]{n^5}}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n)^{n^2}}{(2n^n)^n}$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5+1}}$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^9}{n!}$;

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{1}{\sqrt{n^5}}$;

(12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln^3(n^2)}{\sqrt[5]{n^6}+1}$.

Bài 3.4. Kiểm tra sự hội tụ của các chuỗi sau

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

(3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

(4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}, \quad \alpha > 0$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$.

Bài 3.5. Cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ là các chuỗi số dương thỏa mãn

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad \text{với mọi} \quad n \ge n_0.$$

Chứng minh rằng nếu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ.

Bài 3.6. Kiểm tra sự hội tụ của các chuỗi sau

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}10^n}{n!}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!}$.

Bài 3.7. Kiểm tra sự hội tụ, hội tụ tương đối, hội tụ tuyệt đối của các chuỗi sau

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}10^n}{n!}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{n^2+1}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n-1/2)}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}\left(\frac{4}{3}\right)^n$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n!}{1.3.5...(2n-1)}$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n!)^2 2^n}{(2n)!}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2.4...2n}{1.4.7...(3n-2)}$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!(2n)!}{(3n)!}$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}$;

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln(n+1)}{n+1}$;

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(n^5)}{n}$;

(12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(n^5)}{n^{1,01}}$;

(13) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n}$;

(14) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan\frac{1}{n^2}$;

(15) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{1/n}-1}{n^2}$;

(16) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$.

Bài 3.8. (Dấu hiệu logarithm) Giả sử rằng $a_n \neq 0$ với mọi n đủ lớn và

$$p = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{|a_n|}}{\ln n}.$$

Chứng minh rằng

(1) Nếu $p > 1$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ tuyệt đối.

(2) Nếu $p < 1$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ không hội tụ.

Bài 3.9. Nghiên cứu sự hội tụ của các chuỗi sau đây tùy thuộc vào $x > 0$

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\ln n}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\ln\ln n}$.

Bài 3.10. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ với $p > 0$ trong các trường hợp

(1) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ;

(2) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

Bài 3.11. Cho dãy số dương $\{a_n\}$ và $b_n = \frac{a_n}{1+a_n^2}$. Chứng minh rằng

(1) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ.

(2) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ và dãy $\{a_n\}$ bị chặn thì $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ.

(3) Cho một ví dụ trong đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ.

Bài 3.12. Giả sử rằng chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ. Nghiên cứu sự hội tụ của các chuỗi sau đây

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2a_n}$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$.

Bài 3.13. Kiểm tra sự hội tụ, hội tụ tuyệt đối của các chuỗi sau

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\cos n$.

Bài 3.14. Tìm miền xác định, miền hội tụ và hàm giới hạn (nếu có) của các dãy hàm sau

(1) $f_n(x) = (1+3x)^n$;

(2) $g_n(x) = n(\sqrt[n]{x}-1)$;

(3) $h_n(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^n$;

(4) $k_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$.

Bài 3.15. Cho ví dụ dãy hàm $\{f_n(x)\}$ thỏa

(1) $\lim\limits_{x\to x_o}\{\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\} \neq \lim\limits_{n\to\infty}\{\lim\limits_{x\to x_o} f_n(x)\}$;

(2) $\{\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\}' \neq \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$;

(3) $\displaystyle\int_a^b \left\{\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\}dx \neq \lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b f_n(x)dx\right\}$.

Bài 3.16. Khảo sát sự hội tụ đều trên đoạn $[0,1]$ của dãy hàm $\{f_n(x)\}$ cho như sau:

(1) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+(nx-1)^2}$;

(2) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+(nx-1)^2}$;

(3) $f_n(x) = x^n(1-x)$;

(4) $f_n(x) = nx^n(1-x)$;

(5) $f_n(x) = n^3x^n(1-x)^4$;

(6) $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$;

(7) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$;

(8) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$.