Mục lục

Chương 3

Biến ngẫu nhiên và Hàm phân phối

3.1 Biến ngẫu nhiên

Định nghĩa 3.1.1. Cho $\mathbf{\Omega}$ là không gian mẫu của một phép thử ngẫu nhiên. Một biến ngẫu nhiên là một hàm $X : \mathbf{\Omega} \to \mathbb{R}$ sao cho với mỗi khoảng $I \subset \mathbb{R}$, tập $\{\omega \in \mathbf{\Omega} : X(\omega) \in I\}$ là một biến cố trong $\mathbf{\Omega}$.

Trong một phép phử cụ thể, một biến ngẫu nhiên có thể là một hàm gán mỗi số thực $X(\omega)$ cho một kết cục $\omega \in \mathbf{\Omega}$. Với một phép thwe ngẫu nhiên, có thể có nhiều biến ngẫu nhiên.

Định nghĩa 3.1.2. Tập $\{x \in \mathbb{R} : x = X(\omega), \omega \in \mathbf{\Omega}\}$ được gọi là không gian của biến ngẫu nhiên X. Ký hiệu là R_X.

Nếu R_X là một tập không quá đếm được thì X được gọi là biến ngẫu nhiên rời rạc. Nếu R_X là một tập không đếm được thì X được gọi là biến ngẫu nhiên liên tục.

Ví dụ 3.1.3. Trong phép thử tung một đồng tiền. Xét ánh xạ $X : \mathbf{\Omega} = \{S, N\} \to \mathbb{R}$ với phép gán $X(S) = 1$ và $X(N) = 0$. Khi đó, X là một biến ngẫu nhiên với $R_X = \{0, 1\}$.

Để đơn giản, với $x, a, b \in \mathbb{R}$, ta qui ước $\{X = x\} := \{\omega \in \mathbf{\Omega} : X(\omega) = x\}$, và $\{a \leqslant X < b\} := \{\omega \in \mathbf{\Omega} : a \leqslant X(\omega) < b\}$.

3.2 Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên rời rạc

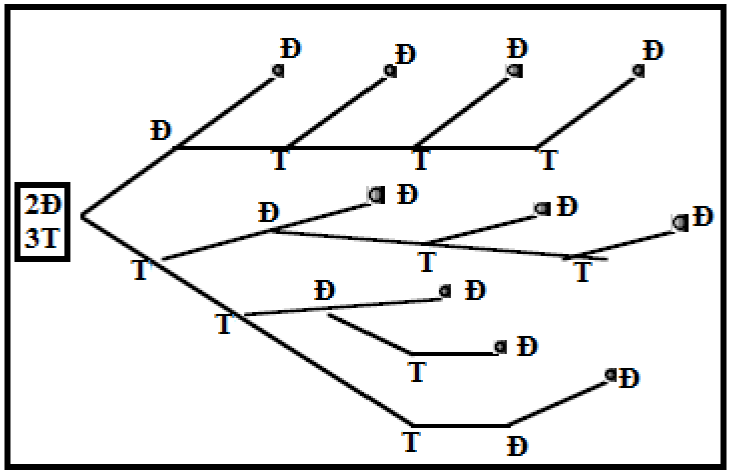
Định nghĩa 3.2.1. Cho R_X là không gian của biến ngẫu nhiên rời rạc X. Hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x) & , \text{ nếu } x \in R_X \\ 0 & , \text{ nếu } x \notin R_X. \end{cases}$$

được gọi là hàm mật độ xác suất (pdf) của X.

Ví dụ 3.2.2. Một hộp đựng 5 quả bóng màu, trong đó có 2 quả đen và 3 quả trắng. Các quả bóng được rút liên tiếp không hoàn lại cho đên khi rút được quả bóng đen cuối cùng. Gọi X là số quả bóng được rút ra. Tìm hàm mật độ xác suất của X.

Giải. Gọi Đ và T tương ứng là các biến cố rút được bi đen và trắng trong mỗi lần rút. Khi đó không gian mẫu của phép thử được mô tả như hình sau



Do đó

$\mathbf{\Omega} = \{$ĐĐ, ĐTĐ, ĐTTĐ, ĐTTTĐ,TĐĐ, TĐTĐ,TĐTTĐ,TTĐĐ,TTĐTĐ,TTTĐĐ$\}$.

Từ đó suy ra $R_X = \{2, 3, 4, 5\}$, và hàm mật độ xác suất của X xác định bởi:

$$\begin{aligned}
f(2) &= \mathbf{P}(X=2) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{10};\\
f(3) &= \mathbf{P}(X=3) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{10};\\
f(4) &= \mathbf{P}(X=4) = 3\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{10};\\
f(5) &= \mathbf{P}(X=5) = 4\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} = \frac{4}{10};\\
f(x) &= 0, \qquad \forall x \notin R_X.
\end{aligned}$$

Hay

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{10} & \text{nếu } x \in R_X \\ 0 & \text{nếu } x \notin R_X. \end{cases}$$

$\square$

Hàm mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên có thể đặc trưng hoàn toàn cho biến ngẫu nhiên đó. Sau đây là một số tính chất cơ bản của hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc.

Định lí 3.2.3. *Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc có không gian R_X và hàm mật độ xác suất $f(x)$. Khi đó*

(i) $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in R_X$;

(ii) $\sum_{x \in R_X} f(x) = 1$.

Định lí 3.2.4. *Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc có không gian R_X và hàm mật độ xác suất $f(x)$. Khi đó, với $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$,*

$$\mathbf{P}(a \leqslant X < b) = \sum_{\{x \in R_X : a \leqslant x < b\}} f(x).$$

Định nghĩa 3.2.5. Hàm phân phối tích lũy (cdf) của biến ngẫu nhiên rời rạc X là hàm số $F(x)$ xác định bởi

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Hàm phân phối tích lũy có thể gọi ngắn gọn là hàm phân phối.

Từ Định lý 3.2.4, ta nhận được công thức xác định hàm phân phối của biến ngẫu nhiên rời rạc nếu biết hàm mật độ xác suất thể hiện trong định lý sau đây.

Định lí 3.2.6. *Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc có không gian R_X và hàm mật độ xác suất $f(x)$. Khi đó*

$$F(x) = \sum_{\{t \in R_X : t \leqslant x\}} f(t).$$

Ví dụ 3.2.7. Cho X có $R_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ và hàm mật độ xác suất có dạng sau

$$f(x) = \begin{cases} k(2x-1), & x \in R_X \\ 0 \qquad\qquad , & \text{ngoài ra.} \end{cases}$$

Tìm k và hàm phân phối $F(x)$.

Chứng minh. Từ (ii) của Định lý 3.2.3 suy ra $k = \dfrac{1}{144}$. Áp dụng Định lý 3.2.6, ta nhận được hàm phân phối của X là

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 1 \\ f(1) & \text{nếu } 1 \leqslant x < 2 \\ f(1) + f(2) & \text{nếu } 2 \leqslant x < 3 \\ f(1) + f(2) + f(3) & \text{nếu } 3 \leqslant x < 4 \\ \cdots & \cdots \\ \sum_{j=1}^{12} f(j) & \text{nếu } x \geqslant 12. \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 1 \\ \dfrac{1}{144} & \text{nếu } 1 \leqslant x < 2 \\ \dfrac{4}{144} & \text{nếu } 2 \leqslant x < 3 \\ \dfrac{9}{144} & \text{nếu } 3 \leqslant x < 4 \\ \cdots & \cdots \\ 1 & \text{nếu } x \geqslant 12. \end{cases}$$

□

Hàm phân phối của một biến ngẫu nhiên rời rạc có một số tính chất cơ bản sau đây.

Định lí 3.2.8. *Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có không gian R_X, hàm mật độ xác suất $f(x)$, và hàm phân phối $F(x)$. Khi đó*

(i) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$;

(ii) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

(iii) $F(x)$ *không giảm;*

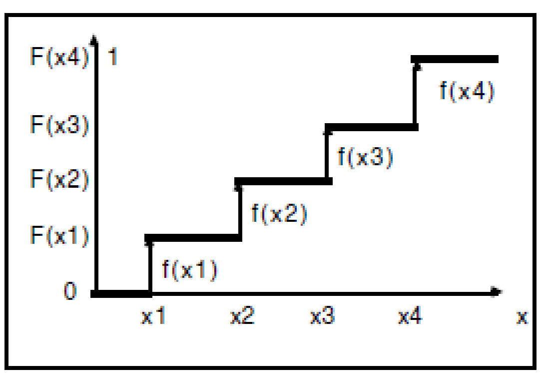
(iv) $F(x)$ *liên tục phải;*

(v) $f(a) = \mathbf{P}(X = a) = F(a) - \lim\limits_{x \to a^-} F(x)$, $a \in R_X$.

Định lý tiếp theo sẽ cho ta cách tìm hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X nếu biết hàm phân phối của nó.

Định lí 3.2.9. *Cho biến ngẫu nhiên rời rạc* X *có hàm mật độ xác suất* $f(x)$ *và hàm phân phối* $F(x)$*. Nếu* X *có không gian* $R_X = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$ *thì*

$$\begin{aligned} f(x_1) &= F(x_1); \\ f(x_2) &= F(x_2) - F(x_1); \\ f(x_3) &= F(x_3) - F(x_2); \\ &\cdots\cdots \\ f(x_n) &= F(x_n) - F(x_{n-1}). \end{aligned}$$



Ví dụ 3.2.10. Cho X có hàm phân phối

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < -1 \\ 0.25 & \text{nếu } -1 \leqslant x < 1 \\ 0.50 & \text{nếu } 1 \leqslant x < 3 \\ 0.75 & \text{nếu } 3 \leqslant x < 5 \\ 1 & \text{nếu } x \geqslant 5. \end{cases}$$

Tìm hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X, tính $\mathbf{P}(X \leqslant 3)$, $\mathbf{P}(X = 3)$, và $\mathbf{P}(X < 3)$.

Ví dụ tiếp theo sẽ chứng tỏ rằng không có tương ứng 1-1 giữa các biến ngẫu nhiên và hàm phân phối của chúng.

Ví dụ 3.2.11. Tung một đồng tiền cân đối đồng chất. Gọi X là số lần xảy ra mặt sấp, và Y là số lần xảy ra mặt ngửa. Khi đó X và Y có cùng một hàm phân phối đó là

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 0 \\ 0.5 & \text{nếu } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{nếu } x \geqslant 1. \end{cases}$$

3.3 Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên liên tục

Định nghĩa 3.3.1. Cho biến ngẫu nhiên liên tục X. Hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm mật độ xác suất của X nếu nó thỏa mãn hai điều kiện sau

(i) $f(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$;

(ii) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Với hàm mật độ được định nghĩa như trên, chúng ta hoàn toàn có thể xác định các xác suất liên quan đến X.

Định lí 3.3.2. *Cho biến ngẫu nghiên liên tục X có hàm mật xác suất độ $f(x)$. Khi đó với mọi $Q \subset \mathbb{R}$,*

$$\mathbf{P}(X \in Q) = \int\limits_{Q} f(x)dx.$$

Ví dụ 3.3.3. Tìm c để hàm số sau là hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \frac{c}{1 + (x - \theta)^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

trong đó $\theta \in \mathbb{R}$ là tham số thực nào đó.

Giải. Từ (ii) trong định nghĩa hàm mật độ, ta có

$$\begin{aligned} 1 &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1 + (x - \theta)^2} dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1 + t^2} dt \\ &= c \arctan z \,|_{-\infty}^{+\infty} = c(\arctan(+\infty) - \arctan(-\infty)) \\ &= c(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = c\pi. \end{aligned}$$

Suy ra $c = \dfrac{1}{\pi}$. Với $c = \dfrac{1}{\pi}$, điều kiện (i) trong định nghĩa cũng thỏa mãn, và hàm mật độ xác định bởi

$$f(x) = \frac{1}{\pi \left[1 + (x - \theta)^2\right]}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

□

Nếu X có hàm mật độ xác định như trong ví dụ trên thì ta nói X có phân phối Cauchy với tham số θ, và ký hiệu $X \sim \text{CAU}(\theta)$.

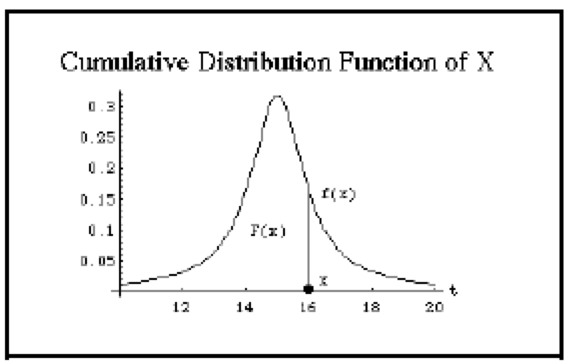
Tiếp theo, chúng ta sẽ định nghĩa hàm phân phối (tích lũy) của biến ngẫu nhiên liên tục.

Định nghĩa 3.3.4. Cho $f(x)$ là hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục X. Hàm số $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt, \qquad x \in \mathbb{R}$$

được gọi là hàm phân phối (tích lũy) của X.

Giá trị của $F(x)$ chính là diện tích của phần hình giới hạn bởi đồ thị của $f(x)$ trên khoảng $(-\infty; x)$.



Tương tự như trường hợp rời rạc, hàm phân phối của biến ngẫu nhiện liên tục cũng thõa mãn các tính chất (i), (ii), (iii) của Định lý 3.2.8. Ngoài ra, hàm phân phối của biến ngẫu nhiên liên tục còn có các tính chất sau đây.

Định lí 3.3.5. *Nếu $F(x)$ là hàm phân phối của một biến ngẫu nhiên liên tục thì $F(x)$ là hàm liên tục.*

Định lí 3.3.6. *Cho X có hàm mật độ xác suất $f(x)$ và hàm phân phối $F(x)$. Khi đó*

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x).$$

Chứng minh. Áp dụng Định lý cơ bản của Giải tích. □

Từ Định lý 3.3.6, chúng ta thấy rằng hàm mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên liên tục chính là đạo hàm của hàm phân phối của nó. Mặt khác, từ Định nghĩa 3.3.4, chúng ta thấy rằng hàm phân phối của biến ngẫu nhiên liên tục chính là nguyên hàm của hàm mật độ xác suất của nó. Do đó, để tìm hàm mật độ của biến ngẫu nhiên liên tục khi biết hàm phân phối thì chúng ta lấy đạo hàm của hàm phân phối. Ngược lại, muốn tìm hàm phân phối của biến ngẫu nhiên liên tục khi biết hàm mật độ xác suất thì chúng ta tìm nguyên ham của hàm mật độ xác suất.

Ví dụ 3.3.7. Tìm hàm phân phối của biến ngẫu nhiên $X \sim \mathrm{CAU}(\theta)$.

Giải. Ta có

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi\left[1+(t-\theta)^2\right]}dt = \int_{-\infty}^{x-\theta} \frac{1}{\pi\left[1+y^2\right]}dy = \frac{1}{\pi}\arctan(x-\theta)+\frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

□

Ví dụ 3.3.8. Tìm hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X có hàm phân phối như sau

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Định lý tiếp theo sẽ cung cấp cho ta cách tính các xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục nếu biết hàm phân phối của nó.

Định lí 3.3.9. *Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm phân phối $F(x)$. Khi đó*

(i) $\mathbf{P}(X < x) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}.$

(ii) $\mathbf{P}(X > x) = 1 - F(x), \quad x \in \mathbb{R}.$

(iii) $\mathbf{P}(X = x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$

(iv) $\mathbf{P}(a < X < b) = F(b) - F(a), \quad a, b \in \mathbb{R}.$

3.4 Các phân vị của biến ngẫu nhiên rời rạc

Định nghĩa 3.4.1. Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X và một số thực $p \in (0; 1)$. Một phân vị mức $100p$ của phân phối của X là giá trị $q \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{cases} \mathbf{P}(X < q) \leqslant p \\ \mathbf{P}(X \leqslant q) \geqslant p. \end{cases}$$

Định nghĩa 3.4.2. Phân vị mức 50 của phân phối của một biến ngẫu nhiên rời rạc X được gọi là giá trị trung vị (hay giá trị median) của X. Ký hiệu là $MedX$.

Trung vị của một biến ngẫu nhiên là vị trí phân đôi khối lượng xác suất trong phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên đó.

Định nghĩa 3.4.3. Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có không gian R_X và hàm mật độ xác suất $f(x)$. Giá trị yếu vị (còn gọi là mode) của X là giá trị $x_0 \in R_X$ sao cho

$$f(x_0) = \max_{x \in R_X} \{f(x)\}.$$

Ký hiệu là $ModX$.

Từ định nghĩa trên, ta thấy rằng yếu vị của một biến ngẫu nhiên là vị trí mà tại đó khối lượng xác suất tập trung chủ yếu. Nói cách khác, yếu vị là giá trị có khả năng nhất của biến ngẫu nhiên.

Ví dụ 3.4.4. Cho biến ngẫu nhiên X có $R_X = \{1, 4, 6, 9\}$ và hàm mật độ xác suất $f(x)$ được xác định như sau

$$f(x) = \begin{cases} 0.2 & \text{nếu } x = 1 \\ 0.3 & \text{nếu } x = 4 \\ 0.3 & \text{nếu } x = 6 \\ 0.2 & \text{nếu } x = 9 \\ 0 & \text{ngoài ra.} \end{cases}$$

Tìm phân vị mức 25 của X, $MedX$, phân vị mức 75 của X, và $ModX$.

3.5 Các phân vị của biến ngẫu nhiên liên tục

Định nghĩa 3.5.1. Cho biến ngẫu nhiên liên tục X và một số thực $p \in (0; 1)$. Một phân vị mức $100p$ của phân phối của X là số thực q sao cho

$$\begin{cases} \mathbf{P}(X < q) \leqslant p, \\ \mathbf{P}(X \leqslant q) \geqslant p. \end{cases}$$

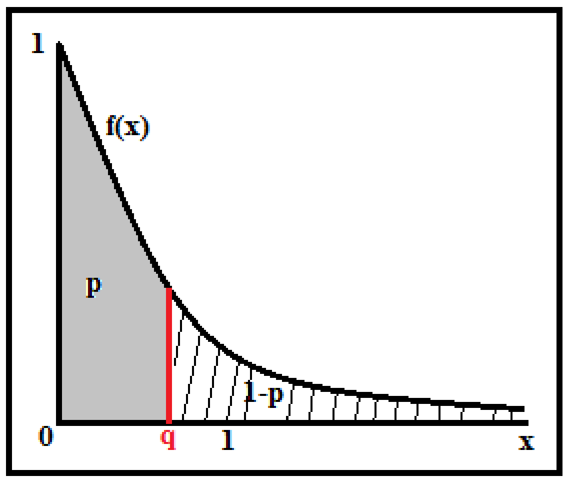
Vì X là biến ngẫu nhiên liên tục nên nếu $f(x)$ là hàm mật độ xác suất của X thì điều kiện trong định nghĩa trên có thể viết lại như sau

$$\begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{q} f(x)dx \leqslant p, \\ \int\limits_{-\infty}^{q} f(x)dx \geqslant p. \end{cases}$$

Từ đó chúng ta nhận được kết quả sau.

Định lí 3.5.2. *Cho X có hàm mật độ xác suất $f(x)$ và một số thực $p \in (0;1)$. Khi đó $q \in \mathbb{R}$ là phân vị mức $100p$ của phân phối của X nếu và chỉ nếu*

$$\int_{-\infty}^{q} f(x)dx = p.$$



Phân vị mức 25 được gọi là tứ phân vị thứ nhất; phân vị mức 50 được gọi là tứ phân vị thứ hai (còn gọi là trung vị, hay median, ký hiệu là Med); phân vị mức 75 được gọi là tứ phân vị thứ ba. Ba giá trị này chia hình giới hạn bởi $f(x)$ và trục hoành thành bốn phần có diện tích đều nhau.

Ví dụ 3.5.3. Cho X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-2} & \text{nếu } x < 2 \\ 0 & \text{ngoài ra.} \end{cases}$$

Khi đó phân vị mức 75 (hay phân vị thứ ba) của X là số thực q sao cho

$$\int_{-\infty}^{q} f(x)dx = 0.75.$$

Từ định nghĩa của hàm $f(x)$ suy ra $q < 2$, và

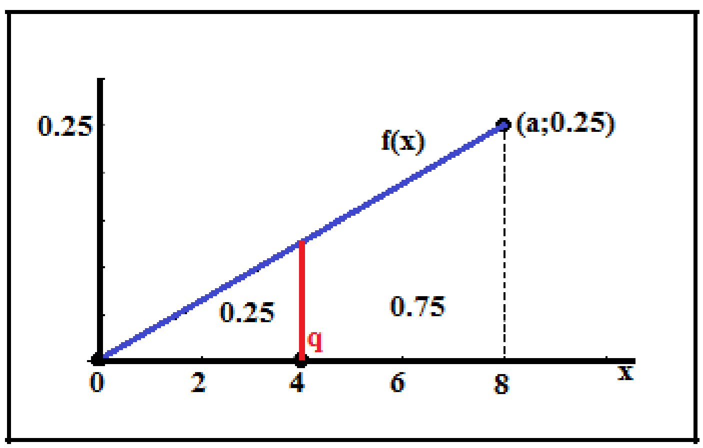
$$0.75 = \int_{-\infty}^{q} f(x)dx = \int_{-\infty}^{q} e^{x-2}dx = e^{q-2}.$$

Suy ra $q = 2 + \ln\left(\frac{3}{4}\right)$.

Ví dụ 3.5.4. Tìm phân vị mức 87.5 của biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất sau đây

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 3.5.5. Tìm phân vị mức 25 của biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất với đồ thị như sau

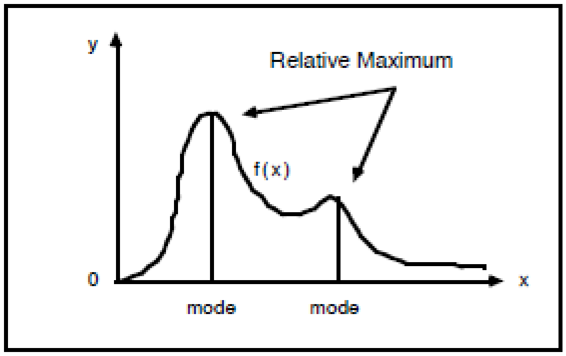


Ví dụ 3.5.6. Biến ngẫu nhiên X được gọi là có phân phối chuẩn tắc, ký hiệu $X \sim N(0;1)$, nếu hàm mật độ xác suất của nó có dạng

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Hãy tìm median của $X \sim N(0;1)$.

Định nghĩa 3.5.7. Yếu vị (hay mode, ký hiệu là Mod) của biến ngẫu nhiên liên tục X là giá trị x mà hàm mật độ xác suất của X đạt giá trị cực đại tại đó.



Mode của một biến ngẫu nhiên là giá trị có khả năng nhất của X.

Ví dụ 3.5.8. Cho $X \sim \text{CAU}(0)$. Khi đó dễ dàng tìm được $ModX = 0$.

Ví dụ 3.5.9. Cho X có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-bx} & \text{nếu } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{ngoài ra.} \end{cases}$$

Tìm $ModX$.

Bài tập

Bài tập 1. Cho X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{\dfrac{2}{k}} \\ 0 & \text{ngoài ra,} \end{cases}$$

với $k \neq 0$. Biết rằng $ModX = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Tìm $MedX$ và $\mathbf{P}(X < MedX)$.

Bài tập 2. Cho X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} cx^{k+1}(1-x)^k & \text{nếu } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ngoài ra,} \end{cases}$$

với $c > 0$ và $1 < k < 2$. Tìm $ModX$.

Bài tập 3. Cho X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} (k+1)x^2 & \text{nếu } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ngoài ra} \end{cases}$$

với k là một hằng số. Tìm $MedX$. Tính xác suất đề X nhận giá trị nằm giữa tứ phân vị thứ nhất và tứ phân vị thứ ba của phân phối của X.

Bài tập 4. Cho $X \sim \text{CAU}(0)$. Tìm $MedX$ và $ModX$.

Bài tập 5. Cho X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} e^{-\dfrac{x}{\theta}} & \text{nếu } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{ngoài ra,} \end{cases}$$

trong đó $\theta > 0$. Tìm phân vị mức 10 của phân phối của X.

Bài tập 6. Cho X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} e^{-\dfrac{x}{2}} & \text{nếu } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{ngoài ra.} \end{cases}$$

Tìm $MedX$.

Bài tập 7. Cho X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{8} & \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{ngoài ra.} \end{cases}$$

Tính xác suất để X nhận giá trị lớn hơn phân vị mức 75 của phân phối của nó.

Bài tập 8. Cho X có hàm phân phối

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 2 \\ 0.5 & \text{nếu } 2 \leqslant x < 3 \\ 0.7 & \text{nếu } 3 \leqslant x < \pi \\ 1 & \text{nếu } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Tìm hàm mật độ xác suất của X.

Bài tập 9. Cho X có hàm phân phối

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \leqslant 0 \\ 1 - \sum\limits_{k=0}^{3} \dfrac{x^k}{k!}\, e^{-x} & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$$

Tìm hàm mật độ xác suất của X.

Bài tập 10. Cho X có hàm phân phối

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$$

Tính $\mathbf{P}(0 \leqslant e^X \leqslant 4)$.

Bài tập 11. Cho X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} ax^2e^{-10x} & \text{nếu } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{ngoài ra ,} \end{cases}$$

với $a > 0$. Tính $\mathbf{P}(X \geqslant ModX)$.

Bài tập 12. Cho X có là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm phân phối $F_X(x)$. Tìm hàm phân phối của biến ngẫu nhiên $Y = \max(0, -X)$.

Bài tập 13. Cho X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3^x} & \text{nếu } x = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{ngoài ra .} \end{cases}$$

Tính xác suất để X nhận giá trị chẵn.

Bài tập 14. Một cái bình đựng 5 quả bóng được đánh số từ 1 đến 5. Chọn ngẫu nhiên không hoàn lại 2 quả bóng trong bình. Gọi X là tổng các số trên hai quả bóng được chọn. Tìm hàm mật độ xác suất của X. Tìm $MedX$. Tổng số điểm lấy được bằng bao nhiêu là có khả năng nhất.

Bài tập 15. Một cái bình đựng 10 đồng xu, trong đó có 4 đồng giả. Các đồng xu lần lượt được lấy ra khỏi bình cho đến khi tất cả các đồng giả đều được tìm thấy. Gọi X là các đồng xu được lấy ra cho đến khi tìm được đồng xu giả đầu tiên. Tìm hàm mật độ xác suất của X, $MedX$, và $ModX$.

Bài tập 16. Thời gian yêu cầu một sinh viên phải hoàn thành bài kiểm tra 1 giờ (60 phút) là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + x & \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{ngoài ra .} \end{cases}$$

Tính xác suất để một sinh viên hoàn thành bài kiểm tra trước nửa tiếng.

Bài tập 17. Cho $f(x)$ là một hàm mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên liên tục. Chứng minh rằng với số thực μ và số thực $\sigma > 0$, hàm số

$$\frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

cũng là một hàm mật độ xác suất.