Câu 2.4. Cho nhận xét về giới hạn trên và giới hạn dưới của một dãy trong các trường hợp sau: dãy bị chặn trên; dãy bị chặn dưới; dãy bị chặn.

Câu 2.5. Hãy kiểm tra xem một "phiên bản" khác của tiêu chuẩn Cauchy được phát biểu sau đây đúng hay sai? Vì sao?

Dãy số $\{a_n\}$ *hội tụ nếu và chỉ nếu* $\lim_{n\to\infty}(a_{n+p} - a_n) = 0$ *với mọi* $p \in \mathbb{N}$.

2.3.3 Bài tập

Bài 2.1. Cho E là một tập con khác rỗng và bị chặn của $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu $s = \sup E$ thì tồn tại $\{a_n\} \subset E$ sao cho $\lim_{n\to\infty} a_n = s$. Tương tự, nếu $t = \inf E$ thì tồn tại $\{b_n\} \subset E$ sao cho $\lim_{n\to\infty} b_n = t$.

Bài 2.2. Chứng minh các đẳng thức sau từ đó tổng quát hóa

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

Bài 2.3. Chứng minh rằng

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ (a > 0)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}\right) = 0$.

Bài 2.4. Tính các giới hạn sau

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sin(n!)}{n\sqrt{n}+1}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+6n} - n)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + 6.5^{n+3}}{4^n + 5^n}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^3+2n} - \sqrt{n^2+3n})$.

Bài 2.5. Tính các giới hạn của dãy $\{a_n\}$ cho bởi

(1) $a_n = \dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{2.4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+2)}$;

(2) $a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \cdots + \dfrac{(2n-1)}{2^n}$;

(3) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$;

(4) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+2n}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+n^2}}$.

Bài 2.6. Cho m số dương $a_1, a_2, ..., a_m$. Khảo sát sự hội tụ và tính giới hạn (nếu có) của dãy

$$b_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \quad (n = 1, 2, ...).$$

Tổng quát hơn, cho dãy số dương $\{a_n\}$ và xét dãy số

$$c_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n} \quad (n = 1, 2, ...).$$

Chứng minh rằng nếu dãy $\{a_n\}$ bị chặn trên thì dãy $\{c_n\}$ hội tụ. Trong trường hợp này hãy tính giới hạn của dãy $\{c_n\}$. Cho kết luận về sự hội tụ của dãy $\{c_n\}$ trong trường hợp dãy $\{a_n\}$ không bị chặn trên.

Bài 2.7. Cho trước $x_0 \in \mathbb{R}$. Hãy cho ví dụ các dãy số hữu tỷ $\{a_n\}$ và vô tỷ $\{b_n\}$ sao cho $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x_0$.

Bài 2.8. Cho dãy số dương $\{a_n\}$ hội tụ đến L. Chứng minh rằng dãy $\{\sqrt{a_n}\}$ cũng hội tụ.

Bài 2.9. Cho hai dãy hội tụ $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$. Tính các giới hạn sau

$$\lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\}, \quad \lim_{n\to\infty} \min\{a_n, b_n\}.$$

Bài 2.10. Cho dãy số $\{a_n\}$ sao cho $a_n^3 \to a^3$ khi $n \to \infty$, trong đó $a \neq 0$. Chứng minh rằng

$$|a_n - a| \leq \frac{|a_n^3 - a^3|}{(3/4)a^2},$$

và suy ra $a_n \to a$ khi $n \to \infty$.

(1) Kết quả còn đúng không khi $a = 0$?

(2) Kết quả còn đúng không khi thay mũ ba thành mũ hai?

Bài 2.11. Xét sự tồn tại giới hạn của các dãy sau

(1) $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$;

(2) $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n}$;

(3) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \cdots + \frac{1}{2.4.6\cdots(2n)}$;

(4) $a_n = 1 + \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \cdots + \frac{1}{3^n+1}$.

Bài 2.12. Cho dãy $\{a_n\}$ xác định như sau

$$0 < a_1 < 1, \quad a_{n+1} = a_n(2 - a_n) \quad (n = 1, 2, ...).$$

Chứng minh dãy $\{a_n\}$ hội tụ và tính giới hạn của nó.

Bài 2.13. Cho dãy $\{a_n\}$ xác định như sau

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 3}{4} \quad (n = 1, 2, ...)$$

Chứng minh dãy $\{a_n\}$ hội tụ và tính giới hạn của nó.

Bài 2.14. Cho dãy $\{a_n\}$ xác định như sau

$$a_1 > 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \quad (n = 1, 2, ...).$$

Chứng minh dãy $\{a_n\}$ hội tụ và tính giới hạn của nó.

Bài 2.15. Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ được xác định theo công thức truy hồi

$$a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_n = \sqrt{3a_{n-1} - 2} \quad (n = 2, 3, ...)$$

hội tụ. Hãy tìm giới hạn của nó.

Bài 2.16. Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ thỏa mãn điều kiện

$$0 < a_n < 1, \quad a_n(1 - a_{n+1}) > \frac{1}{4} \quad (n = 1, 2, ...)$$

hội tụ. Hãy tìm giới hạn của nó.

Bài 2.17. Cho $c \geq 0$, xét dãy $\{a_n\}$ cho bỡi công thức

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} \quad (n = 1, 2, ...).$$

Chứng minh rằng dãy hội tụ và tìm giới hạn của nó.

Bài 2.18. Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ được xác định theo công thức truy hồi

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{3 + 2a_n}{2 + a_n} \quad (n = 1, 2, ...)$$

hội tụ. Hãy tìm giới hạn của nó.

Bài 2.19. Cho hai dãy số dương $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ thỏa mãn với mọi $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

(1) Chứng minh rằng từ $n = 2$ trở đi, $\{a_n\}$ là dãy giảm và $\{b_n\}$ là dãy tăng.

(2) Chứng minh rằng hai dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ có cùng giới hạn.

Bài 2.20. Cho dãy số $\{a_n\}$ tăng và bị chặn trên, dãy $\{b_n\}$ thỏa mãn

$$a_n \leq b_n \leq a_{n+1} \quad (n = 1, 2, ...).$$

Chứng minh rằng $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ hội tụ đến cùng một giới hạn.

Bài 2.21. Cho dãy số $\{a_n\}$ và xét dãy $\{b_n\}$ được xác định bởi

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \quad (n = 1, 2, ...).$$

Chứng minh rằng nếu dãy $\{a_n\}$ hội tụ thì dãy $\{b_n\}$ cũng hội tụ. Khi đó tính giới hạn của dãy $\{b_n\}$ thông qua giới hạn của dãy $\{a_n\}$. Điều ngược lại có đúng hay không? Vì sao?

Bài 2.22. Xét dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi

$$a_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad (n = 1, 2, ...).$$

Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ hội tụ và hơn nữa $\lim_{n\to\infty} a_n = e$. Từ đó hãy chứng minh rằng e là số vô tỷ.

Bài 2.23. Cho $a_1, ..., a_m$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

(1) Với mọi $j = 1, ..., m$ ta có $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a_j} - 1) = \ln a_j$;

(2) Nếu

$$\sqrt[n]{1} + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{2016} = \sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \cdots + \sqrt[n]{a_m}$$

với mọi số tự nhiên n thì $m = 2016$ và $a_1 a_2 \cdots a_{2016} = 2016!$.

Bài 2.24. Cho các dãy số $\{p_n\}$ và $\{q_n\}$ thỏa mãn

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} q_n = -\infty.$$

Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$$

Bài 2.25. Tính các giới hạn sau

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$;

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{1-n}$;

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)^n$;

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\cos\frac{1}{n} + a\sin\frac{1}{n}\right)^n$.

Bài 2.26. Dùng tiêu chuẩn Cauchy chứng minh các dãy sau hội tụ

(1) $a_n = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n$ trong đó $|a_n| \leq M$ với mọi $n = 0, 1, 2, ...$ và $|q| < 1$;

(2) $a_n = \dfrac{\sin 1}{2} + \dfrac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \dfrac{\sin n}{2^n}$;

(3) $a_n = \dfrac{\cos 1!}{1.2} + \dfrac{\cos 2!}{2.3} + \cdots + \dfrac{\cos n!}{n(n+1)}$.

Bài 2.27. Chứng minh các dãy sau phân kỳ

(1) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$;

(2) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{1.2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2.3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

Bài 2.28. Cho dãy các số nguyên dương $\{a_n\}$. Ta định nghĩa

$$S_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}, \quad P_n = \left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right).$$

Chứng minh rằng nếu $\{S_n\}$ hội tụ thì $\{\ln P_n\}$ hội tụ.

Bài 2.29. Cho dãy $\{a_n\}$ và giả sử tồn tại $\lambda \in (0, 1)$ sao cho

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| < \lambda |a_{n+1} - a_n| \quad (n = 1, 2, ...).$$

Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ hội tụ.

Bài 2.30. Cho dãy $\{a_n\}$ xác định bởi công thức truy hồi

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad (n = 3, 4, ...)$$

và xét dãy

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n = 1, 2, ...).$$

(1) Chứng minh $b_n b_{n-1} = b_{n-1} + 2$ với mọi $n \geq 2$.

(2) Chứng minh $b_n = 1 + (2/b_{n-1})$ với mọi $n \geq 2$.

(3) Chứng minh $|b_{n+1} - b_n| < (2/3)|b_n - b_{n-1}|$ với mọi $n \geq 2$.

(4) Suy ra dãy $\{b_n\}$ hội tụ và tìm giới hạn của nó.

Bài 2.31. Cho dãy Fibonacci được xác định như sau

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (n = 1, 2, ...). \tag{2.5}$$

(1) Xác định giá trị của r để dãy $\{r^n\}$ thỏa mãn (2.5).

(2) Giả sử hai dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ thỏa mãn (2.5). Chứng minh rằng với mọi số thực α và β dãy số $\{\alpha a_n + \beta b_n\}$ cũng thỏa mãn (2.5).

(3) Chứng minh rằng tồn tại các hằng số thực α, β, r và s thỏa mãn $F_n = \alpha r^n + \beta s^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, trong đó $|r| > 1$ và $|s| < 1$.

(4) So sánh F_n với $(8/5)^n$ và $(13/8)^n$. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} F_{n+1}/F_n$.

(5) Số 17/12 hay số 41/29 xấp xỉ $\sqrt{2}$ tốt hơn. Giải thích kết quả bằng cách xét dãy $\{G_n\}$ cho bởi

$$G_1 = G_2 = 1, \quad G_{n+2} = G_{n+1} + \frac{1}{4}G_n \quad (n = 1, 2, ...).$$

Bài 2.32. Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi các dãy $\{a_{2n}\}$ và $\{a_{2n+1}\}$ hội tụ đến cùng một giới hạn.

Bài 2.33. Tính các giới hạn trên và giới hạn dưới của các dãy sau

(1) $a_n = \dfrac{n^2}{1+n^2}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$;

(2) $a_n = \sqrt[n]{1 + (-1)^n 2^n}$;

(3) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin\dfrac{n\pi}{4}$.

Bài 2.34. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty} a_n + \varliminf_{n\to\infty} b_n &\le \varliminf_{n\to\infty}(a_n + b_n)\\ &\le \varliminf_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n\\ &\le \varlimsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n.\end{aligned}$$

Bài 2.35. Giả sử $a_n \ge 0, b_n \ge 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty} a_n . \varliminf_{n\to\infty} b_n &\le \varliminf_{n\to\infty}(a_n . b_n)\\ &\le \varliminf_{n\to\infty} a_n . \varlimsup_{n\to\infty} b_n\\ &\le \varlimsup_{n\to\infty}(a_n . b_n) \le \varlimsup_{n\to\infty} a_n . \varlimsup_{n\to\infty} b_n.\end{aligned}$$