BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUY NHƠN

MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH HÀM

(Tài liệu lưu hành nội bộ)

Bình Định - 2017

Mục lục

Chương 1

CƠ SỞ TOÁN HỌC

Xét hàm số $f(x)$ với tập xác đinh $D \subset \mathbb{R}$ và tập giá trị $T \subset \mathbb{R}$.

1.1 Hàm số chẵn, lẻ

Định nghĩa 1.1. *a. $f(x)$ được gọi là hàm số chẵn trên $M \subset D$ (gọi tắt là hàm chẵn trên M) nếu*

$$\forall x \in M \Rightarrow -x \in M \text{ và } f(x) = f(-x), \forall x \in M.$$

b. $f(x)$ được gọi là hàm số lẻ trên M (gọi tắt là hàm lẻ trên M) nếu

$$\forall x \in M \Rightarrow -x \in M \text{ và } f(-x) = -f(x), \forall x \in M.$$

Ví dụ 1.1. Một vài ví dụ về hàm số chẵn và hàm số lẻ

1. Các hàm số $y = x^2$ và $y = cosx$ và là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.
2. Các hàm số $y = sinx$ và $y = x^5$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

1.2 Hàm số tuần hoàn và phản tuần hoàn

1.2.1 Hàm số tuần hoàn cộng tính

Định nghĩa 1.2. *Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn cộng tính chu kì a $(a > 0)$ trên M nếu $M \subset D$ và:*

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow x \pm a \in M \\ f(x \pm a) = f(x), \quad \forall x \in M. \end{cases}$$

Số a được gọi là chu kì. Chu kì a_0 nhỏ nhất (nếu có) gọi là chu kì cơ sở.

Ví dụ 1.2. Hàm số Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

là hàm số tuần hoàn cộng tính chu kì $a > 0$, $a \in \mathbb{Q}$, không có chu kì cơ sở.

Tính chất 1.1. Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ tuần hoàn cộng tính trên M có các chu kì lần lượt là a, b với $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Khi đó $F(x) = f(x) \pm g(x)$ và $G(x) = f(x)g(x)$ cũng là các hàm số tuần hoàn cộng tính trên M.

1.2.2 Hàm số phản tuần hoàn cộng tính

Định nghĩa 1.3. *Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm phản tuần hoàn cộng tính chu kì b $(b > 0)$ trên M nếu $M \subset D$ và:*

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow x \pm b \in M \\ f(x \pm b) = -f(x), \quad \forall x \in M. \end{cases}$$

Số b được gọi là chu kì. Chu kì b_0 nhỏ nhất (nếu có) gọi là chu kì cơ sở.

Tính chất 1.2. Mọi hàm số phản tuần hoàn cộng tính trên M cũng là hàm số tuần hoàn cộng tính trên M.

Tính chất 1.3. Nếu $f(x)$ là hàm phản tuần hoàn cộng tính chu kì b, $(b > 0)$trên M khi và chỉ khi $f(x)$ có dạng

$$f(x) = g(x + b) - g(x),$$

với $g(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kì $2b$ trên M.

1.2.3 Hàm số tuần hoàn nhân tính

Định nghĩa 1.4. *Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kì a $(a \notin \{0, 1, -1\})$ trên M nếu $M \subset D$ và:*

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow a^{\pm 1}x \in M \\ f(ax) = f(x), \quad \forall x \in M. \end{cases}$$

Ví dụ 1.3. Hàm số $f(x) = sin(2\pi\, log_2 x)$ tuần hoàn nhân tính chu kì 2 trên $\mathbb{R}^+$.

Tính chất 1.4. Nếu $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số tuần hoàn nhân tính chu kì a, b và $\frac{ln|a|}{ln|b|} \in \mathbb{Q}$ thì các hàm số $F(x) = f(x) \pm g(x)$ và $G(x) = f(x)g(x)$ cũng là các hàm số tuần hoàn nhân tính trên M.

1.2.4 Hàm số phản tuần hoàn nhân tính

Định nghĩa 1.5. *Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kì b ($b \notin \{0, 1, -1\}$) trên M nếu $M \subset D$ và:*

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow b^{\pm 1}x \in M \\ f(bx) = -f(x), \quad \forall x \in M. \end{cases}$$

Tính chất 1.5. Mọi hàm số phản tuần hoàn nhân tính trên M cũng là hàm số tuần hoàn nhân tính trên M.

Tính chất 1.6. Nếu $f(x)$ là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kì b, ($b \notin \{0, 1, -1\}$) trên M khi và chỉ khi $f(x)$ có dạng

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[g(x+b) - g(x)\right],$$

trong đó $g(x)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kì b^2 trên M.

1.2.5 Mối liên hệ giữa các hàm tuần hoàn cộng tính và nhân tính

Mệnh đề 1.1. Cho $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$. Hàm số $f(x)$ thỏa mãn

$$f(ax) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

được xác định bởi

Nếu $a > 0$:

$$f(x) = \begin{cases} h_1\left(log_a x\right) & \text{khi } x > 0 \\ c \text{ tùy ý} & \text{khi } x = 0 \\ h_2\left(log_a |x|\right) & \text{khi } x < 0, \end{cases}$$

trong đó $h_1(t)$, $h_2(t)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính tùy ý chu kì 1 trên $\mathbb{R}$.

Nếu $a > 0$: $f(x) = \dfrac{1}{2}[g(x) + g(ax)$, trong đó

$$g(x) = \begin{cases} h_3\left(\frac{1}{2}log_{|a|} x\right) & \text{khi } x > 0 \\ d \text{ tùy ý} & \text{khi } x = 0 \\ h_4\left(log_{|a|} |x|\right) & \text{khi } x < 0, \end{cases}$$

trong đó $h_3(t)$, $h_4(t)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính tùy ý chu kì 1 trên $\mathbb{R}$.

Mệnh đề 1.2. Cho $a < 0$, $a \neq -1$. Hàm số $f(x)$ thỏa mãn

$$f(ax) = -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

được xác định bởi

$$f(x) = \frac{1}{2}[g(x) + g(ax)],$$

trong đó

$$g(x) = \begin{cases} h_1\,(\frac{1}{2}log_{|a|}\,x) & \text{khi } x > 0 \\ d \text{ tùy ý} & \text{khi } x = 0 \\ h_2\,(log_{|a|}\,|x|) & \text{khi } x < 0, \end{cases}$$

với $h_1(t)$, $h_2(t)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính tùy ý chu kì 1 trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1.4. Nếu $f(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kì $a > 0$ trên $\mathbb{R}$ thì $g(t) = f(ln\,t)$ $(t > 0)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kì e^a trên $\mathbb{R}^+$.

Ngược lại, nếu $f(x)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kì a, $(0 < a \neq 1)$ trên $\mathbb{R}^+$ thì $g(t) = f(e^t)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kì $ln\,a$ trên $\mathbb{R}$.

1.3 Đặc trưng hàm của một số hàm số sơ cấp

Để mô tả bức tranh mang tính định hướng, gợi ý và dự đoán công thức nghiệm của các bài toán có liên quan, chúng ta xét một vài tính chất hàm tiêu biểu của một số dạng hàm số quen biết.

1.3.1 Hàm số thuần nhất bậc nhất

Hàm số $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0, b \neq 0)$ có tính chất

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}[f(x) + f(y)], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

1.3.2 Hàm số tuyến tính

Hàm số $f(x) = ax$ $(a \neq 0)$ có tính chất

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

1.3.3 Hàm số mũ

Hàm số $f(x) = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ có tính chất

$$f(x + y) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

1.3.4 Hàm số logarithm

Hàm số $f(x) = log_a\,|x|$ $(a > 0, a \neq 1)$ có tính chất

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

1.3.5 Hàm số lũy thừa

Hàm số $f(x) = |x|^a$ có tính chất

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

1.3.6 Hàm số lượng giác

Hàm số $f(x) = sinx$ có tính chất

$$f(3x) = 3f(x) - 4[f(x)]^3, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hàm số $f(x) = cosx$ có tính chất

$$f(3x) = 2[f(x)]^2 - 1, \forall x \in \mathbb{R},$$

và

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Cặp hàm số $f(x) = sinx$, $g(x) = cosx$ có tính chất

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x) \\ g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y), \end{cases}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Hàm số $f(x) = tanx$ có tính chất

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)},$$

với mọi $x, y, x + y \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Hàm số $f(x) = cotx$ có tính chất

$$f(x+y) = \frac{1 - f(x)f(y)}{f(x) + f(y)},$$

với mọi $x, y, x + y \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

1.3.7 Hàm lượng giác ngược

a. Hàm $f(x) = arcsinx$ có tính chất

$$f(x) + f(y) = f(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), \quad \forall x, y \in [-1, 1].$$

b. Hàm $g(x) = arccosx$ có tính chất

$$g(x) + g(y) = g(xy - \sqrt{1-y^2}\,\sqrt{1-x^2}), \quad \forall x, y \in [-1, 1].$$

b. Hàm $h(x) = arctanx$ có tính chất

$$h(x) + h(y) = h\left(\frac{x+y}{1-xy}\right), \quad \forall x, y : xy \neq 1.$$

b. Hàm $p(x) = arccotx$ có tính chất

$$p(x) + p(y) = p\left(\frac{xy-1}{x+y}\right), \quad \forall x, y : x+y \neq 0.$$

1.3.8 Các hàm hyperbolic

a. Hàm $f(x) = shx = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ có tính chất

$$f(3x) = 3f(x) + 4[f(x)]^3, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

b. Hàm $g(x) = chx = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ có tính chất

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

c. Hàm $h(x) = thx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ có tính chất

$$h(x+y) = \frac{h(x) + h(y)}{1 + h(x)h(y)}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

d. Hàm $p(x) = cothx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ có tính chất

$$p(x+y) = \frac{1 + p(x)p(y)}{p(x) + p(y)}, \quad \forall x, y : x, y, x+y \neq 0.$$

Chương 2

MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH HÀM CỔ ĐIỂN

2.1 Phương trình hàm Cauchy cộng tính

2.1.1 Lời giới thiệu

Việc nghiên cứu các phương trình hàm quay trở lại với A.M Legendre. Ông là người đầu tiên thử xác định nghiệm của phương trình hàm Cauchy

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Nghiên cứu về hệ thống các phương trình hàm Cauchy được khởi đầu bởi A.M Legendre trong cuốn sách *Cours d'Analyse* của ông vào năm 1821. Hàm số cộng tính là nghiệm của phương trình hàm Cauchy cộng tính. Trong chương này đưa ra một phép tính toán về hàm số cộng tính. Đầu tiên ta sẽ tìm hiểu xem phương trình hàm là gì. Sau đó, ta sẽ nghiên cứu về phương trình hàm Cauchy cộng tính. Vấn đề về hàm số cộng tính phức cũng được trình bày trong chương này. Kết thúc chương là phần kết luận nhận xét sẽ phát triển và mở ra những vấn đề khác liên quan đến phương trình hàm Cauchy. Kuczma (1985) đưa ra một bài trình bày xuất sắc về các hàm số cộng tính. Hàm số cộng tính cũng được tìm thấy trong những cuốn sách của Aczél (1966, 1987), Aczél và Dhombres (1989) và Smital (1988). Một số kiến thức trong chương này được lấy từ Aczél (1965) và Wilansky (1967).

2.1.2 Phương trình hàm

Phương trình hàm là phương trình có các hàm số chưa biết mà ta cần xác định. Ở phạm vi Toán sơ cấp, chúng tôi chỉ nghiên cứu và tìm ra các nghiệm liên tục của các phương trình hàm. Một số ví dụ về phương trình hàm là

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

$$f(x+y) = f(x)f(y),$$
$$f(xy) = f(x)f(y),$$
$$f(xy) = f(x) + f(y),$$
$$f(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y),$$
$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y),$$
$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y),$$
$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y),$$
$$f(x+y) = g(xy) + h(x-y),$$
$$f(x) - f(y) = (x-y)h(x+y),$$
$$f(pr, qs) + f(ps, qr) = 2f(p,q) + 2f(r,s),$$
$$g(f(x)) = g(x) + \beta,$$
$$g(f(x)) = \alpha g(x), \qquad \alpha \neq 1$$

và

$$f(t) = f(2x) + f(2t-1).$$

Phạm vi của phương trình hàm bao gồm phương trình vi phân, xấp xỉ hàm số, phương trình nguyên và một số phương trình khác. Phương trình hàm là một mảng của toán học hơn 260 năm. Đã có hơn 5000 bài báo được công bố trong lĩnh vực này.

Phương trình hàm xuất hiện trong các tài liệu cùng thời điểm với một định lý hiện đại của hàm số. Năm 1747 và 1750, d'Alembert công bố ba bài viết, đó được xem như là những phương trình hàm đầu tiên (trích Aczél (1966)). Phương trình hàm được nghiên cứu bởi d'Alembert (1747), Euler (1768), Poisson (1804), Cauchy (1821), Abel (1823), Darboux (1875) và nhiều người khác.

Giải phương trình hàm là tìm tất cả các hàm số thỏa mãn phương trình hàm đó.

2.1.3 Nghiệm của phương trình hàm Cauchy cộng tính

Trong phần này, chúng tôi trình bày giới thiệu về phương trình hàm Cauchy cộng tính và xác định nghiệm của nó. Cho $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, với $\mathbb{R}$ là tập hợp các số thực, là hàm số thỏa mãn phương trình hàm

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \tag{2.1}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Phương trình hàm trên được biết như là phương trình hàm Cauchy cộng tính. Phương trình hàm (2.1) lần đầu tiên được nghiên cứu bởi A.M Legendre (1791) và C.F Gauss (1809), nhưng A.L Cauchy (1821) là người đầu tiên tìm ra nghiệm tổng quát liên tục. Phương trình (2.1) có một vị trí đặc biệt trong toán học. Nó được tìm thấy trong hầu hết các quy tắc toán học.

Định nghĩa 2.1. *Phương trình hàm Cauchy là phương trình hàm có dạng*

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Trong đó $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm số cần tìm.

Định nghĩa 2.2. *Một hàm số $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ được gọi là hàm số cộng tính khi và chỉ khi nó thỏa mãn phương trình hàm Cauchy cộng tính*

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 2.3. *Một hàm số $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ được gọi là hàm số tuyến tính khi và chỉ khi nó có dạng*

$$f(x) = cx, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

với c là hằng số tùy ý.lo

Định lý 2.1. *Nếu $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm số liên tục thỏa mãn phương trình hàm Cauchy cộng tính (2.1) thì f tuyến tính, hay là $f(x) = cx$, c là hằng số tùy ý.*

Chứng minh. Đầu tiên, ta cố định x khi đó hai vế (2.1) khả tích theo biến y. Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 f(x)dy \\ &= \int_0^1 [f(x+y) - f(y)]dy \\ &= \int_x^{1+x} f(u)du - \int_0^1 f(y)dy, \end{aligned}$$

với $u = x + y$. Vì f liên tục nên ta có

$$f'(x) = f(1+x) - f(x). \tag{2.2}$$

Theo tính chất cộng tính ta có

$$f(1+x) = f(1) + f(x). \tag{2.3}$$

Thay (1.3) vào (1.2) ta được

$$f(x) = c,$$

với $c = f(1)$. Giải phương trình trên ta được

$$f(x) = cx + d, \tag{2.4}$$

với d là hằng số tùy ý. Thay $f(x)$ từ (1.4) vào phương trình hàm (2.1) ta được $2d = d$, suy ra $d = 0$. Do đó, f tuyến tính. Định lý đã được chứng minh. □

Để ý rằng trong Định lý 2.1, ta sử dụng tính liên tục của hàm số f để suy ra hàm số f khả tích dẫn tới nghiệm của phương trình hàm Cauchy cộng tính là tuyến tính. Do đó, mọi nghiệm khả tích của phương trình hàm Cauchy cộng tính đều tuyến tính.

Định nghĩa 2.4. *Hàm số $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ được gọi là khả tích địa phương khi và chỉ khi nó khả tích trên mọi khoảng xác định.*

Định lý 2.2. *Mọi nghiệm tổng quát khả tích địa phương của phương trình hàm Cauchy cộng tính đều tuyến tính.*

Chúng tôi sẽ đưa ra một cách chứng minh ngắn gọn của định lý trên được đưa ra bởi Shapiro (1973)

Chứng minh. Giả sử f là một nghiệm tổng quát khả tích địa phương của phương trình hàm Cauchy cộng tính. Khi đó, ta có $f(x+y) = f(x)+f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Sử dụng tính khả tích địa phương của hàm số f, ta có

$$\begin{aligned} yf(x) &= \int_0^y f(x)dz \\ &= \int_0^y [f(x+z) - f(z)]dz \\ &= \int_x^{x+y} f(u)du - \int_0^y f(z)dz \\ &= \int_0^{x+y} f(u)du - \int_0^x f(z)dz - \int_0^y f(z)dz. \end{aligned}$$

Thay đổi vai trò x và y thì vế phải của đẳng thức trên là không đổi. Suy ra

$$yf(x) = xf(y),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Do đó với mọi $x \neq 0$, ta có

$$\frac{f(x)}{x} = c,$$

với c là hằng số tùy ý. Suy ra $f(x) = cx$ với mọi $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Cho $x = y = 0$ trong phương trình hàm (2.1) suy ra $f(0) = 0$. Kết hợp với chứng minh trên thì f là hàm số tuyến tính trên $\mathbb{R}$. □

Mặc dù Định lý 2.1 đã được chứng minh một cách ngắn gọn và chỉ bao gồm các phép tính toán, tuy nhiên cách chứng minh này không dùng để giảng dạy hiệu quả. Bây giờ chúng tôi sẽ giới thiệu một cách chứng minh khác giúp cho chúng ta hiểu hơn tính chất về nghiệm của phương trình hàm Cauchy cộng tính. Ta đi vào định lý sau đây.

Định lý 2.3. *Nghiệm tổng quát liên tục $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ của phương trình hàm Cauchy (2.1)*

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ là $f(x) = ax$, a là hằng số tùy ý cho trước.

Chứng minh. Ta dễ dàng kiểm tra được $f(x) = ax$, với mọi $x \in \mathbb{R}$, a là hằng số tùy ý cho trước là nghiệm của (2.1).

Ngược lại, giả sử $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm số liên tục thỏa (2.1).

Với $x = y = 1$ thì $f(0) = f(0) + f(0) \Longrightarrow f(0) = 0$.
Với $x = y = \dfrac{1}{2}$ thì $f(1) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2f\left(\dfrac{1}{2}\right) \Longrightarrow f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}f(1) = \dfrac{1}{2}a$,
với $a = f(1) \in \mathbb{R}$.
Với $x = y = \dfrac{1}{4}$ thì $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{4}\right) + f\left(\dfrac{1}{4}\right) = 2f\left(\dfrac{1}{4}\right) \Longrightarrow f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}a$.
Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta chứng minh $f\left(\dfrac{1}{2^n}\right) = \dfrac{1}{2^n}a$. Hệ thức trên đúng với $n = 1, 2$. Giả sử hệ thức trên đúng với $n = k$. Cho $x = y = \dfrac{1}{2^{n+1}}$, ta được

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right) = f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) + f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right),$$
$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}a.$$

Ta chứng minh với n cố định, $m \in \mathbb{N}^*$ thì $f\left(\dfrac{m}{2^n}\right) = \dfrac{m}{2^n}a$.
Hệ thức trên đúng với $n = 1$. Giả sử hệ thức trên đúng với $m \geq 1$.
Khi đó

$$f\left(\frac{m+1}{2^n}\right) = f\left(\frac{m}{2^n}\right) + f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{m}{2^n}a + \frac{1}{2^n}a = \frac{m+1}{2^n}a.$$

Cho $x = -y$, từ (2.1) suy ra: $f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) = f(0) = 0$.
Suy ra $f(x) = f(-x)$, do đó ta có $f\left(\dfrac{m}{2^n}\right) = \dfrac{m}{2^n}a, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$.
Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$[2^n x] \leqslant 2^n x \leqslant [2^n x] + 1$$
$$\Rightarrow \frac{[2^n x]}{2^n} \leqslant x \leqslant \frac{[2^n x] + 1}{2^n}$$
$$\Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} \frac{[2^n x]}{2^n}.$$

Do f liên tục nên $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{[2^n x]}{2^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[2^n x]}{2^n}a = ax$.

Định lý đã được chứng minh. □

Định lý 2.4. *Cho $f(x)$ là một nghiệm của phương trình hàm Cauchy (2.1). Nếu $f(x)$ liên tục tại một điểm thì $f(x)$ liên tục tại mọi điểm.*

Chứng minh. Lấy f là hàm số liên tục tại t và x là điểm bất kì. Khi đó, ta có $\lim\limits_{y\longrightarrow t} f(y) = f(t)$. Ta cần chứng minh rằng f liên tục tại x. Khi đó

$$\begin{aligned}
\lim_{y\longrightarrow x} f(y) &= \lim_{y\longrightarrow x} f(y - x + x - t + t)\\
&= \lim_{y\longrightarrow x} [f(y - x + t) + f(x - t)]\\
&= \lim_{y\longrightarrow x} f(y - x + t) + \lim_{y\longrightarrow x} f(x - t)\\
&= f(t) + f(x - t)\\
&= f(t) + f(x) - f(t)\\
&= f(x).
\end{aligned}$$

□

Định lý 2.5. *Nghiệm tổng quát liên tục $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ của phương trình hàm*

$$f(x_1 + x_2 + ... + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)$$

với mọi $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ là $f(x) = ax$, a là hằng số tùy ý cho trước.

2.1.4 Phương trình hàm Cauchy cộng tính trên tập số phức

Trong phần này chúng tôi sẽ trình bày về phương trình hàm Cauchy cộng tính trên tập hợp số phức $\mathbb{C}$ Cho hàm số $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ xác định bởi:

$$f(z) = f_1(z) + if_2(z), \tag{2.5}$$

với $f_1 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ và $f_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ được cho bởi

$$f_1(z) = Ref(z) \qquad \text{và} \qquad f_2(z) = Imf(z).$$

Nếu f là hàm số Cauchy cộng tính thì ta có

$$\begin{aligned} f_1(z_1 + z_2) &= Ref(z_1 + z_2) \\ &= Re[f(z_1) + f(z_2)] \\ &= Ref(z_1) + Ref(z_2) = f_1(z_1) + f_1(z_2), \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} f_2(z_1 + z_2) &= Imf(z_1 + z_2) \\ &= Im[f(z_1) + f(z_2)] \\ &= Imf(z_1) + Imf(z_2) = f_2(z_1) + f_2(z_2). \end{aligned}$$

Định lý 2.6. *Nếu $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ là cộng tính liên tục thì sẽ tồn tại các số phức c_1, c_2 sao cho*

$$f(z) = c_1 z + c_2 \overline{z}, \tag{2.6}$$

Với $\overline{z}$ là số phức liên hợp của z.

2.1.5 Kết luận

Cauchy (1821) chứng minh rằng tất cả các hàm số cộng tính $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ đều tuyến tính, và nó có dạng $f(x) = mx$, với m là hằng số tùy ý. Darboux (1875) chỉ ra rằng hàm số cộng tính thực liên tục tại một điểm thì tuyến tính. Và mọi hàm số cộng tính thực khả tích địa phương thì tuyến tính. Young (1958) chứng minh được rằng hàm số cộng tính thực bị chặn trên một khoảng đóng thì tuyến tính.

Phương trình hàm Cauchy cộng tính $f(x + y) = f(x) + f(y)$ có mở rộng tự nhiên là: $f(x + y) = F(f(x), f(y))$ với $F(u, v)$ là hàm số đã biết. Aczél đã chứng minh rằng $f(x + y) = F(f(x), f(y))$ có nghiệm liên tục đơn điệu ngặt theo từng biến và thỏa mãn điều kiện $F(F(x,y),z) = F(x,F(y,z))$ (theo Aczél (1966)). Phương trình trên có thể mở rộng thêm $f(ax+by+c) = F(f(x),f(y))$, với $F(u,v)$ là hàm số đã biết; a,b,c là các hằng số tùy ý sao cho $ab \neq 0$.

Chúng tôi kết thúc chương này bằng ví dụ về một phương trình hàm trông có vẻ đơn giản mà nghiệm tổng quát của nó chưa được biết. Vấn đề này được đưa ra bởi Sahoo (1995). Vấn đề đầu tiên là: Tìm tất cả các hàm số $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm

$$f(xy) + f(x(1-y)) + f(y(1-x)) + f((1-x)(1-y)) = 0, \tag{2.7}$$

với mọi $x, y \in (0,1)$. Vấn đề này được trình bày như là một vấn đề mở bởi Ebanks, Sahoo và Sander (1990). Nếu $f(x) = 4A(x) - A(1)$, với A là hàm số cộng tính trên $\mathbb{R}$ thì nó sẽ thỏa mãn phương trình hàm (2.7). Với giả thiết f liên tục thì Daróczy và Jarai (1979) đã tìm ra được $f(x) = 4ax - a$, với a là hằng số tùy ý. Gần đây, Maksa (1993) đã đưa ra một vấn đề khác về phương trình hàm: Tìm tất cả các hàm số $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm

$$(1-x-y)f(xy) = xf(y(1-x)) + yf(x(1-y)), \tag{2.8}$$

với mọi $x, y \in [0,1]$. Dễ thấy rằng nếu f là nghiệm của (2.8) thì f đối xứng, $f(x) = -f(1-x)$ và $f(0) = 0$. Hơn nữa, phương trình hàm Maksa (2.8) là một trường hợp của phương trình hàm (2.7). Ta thấy nếu thay x bằng $1-x$ trong (2.8) và cộng kết quả với (2.8) ta nhận được

$$y[f(xy) + f(x(1-y)) + f(y(1-x)) + f((1-x)(1-y))] = 0,$$

với mọi $x, y \in [0,1]$. Vì $f(0) = 0$ nên phương trình trên có kết quả là (2.7) với mọi $x, y \in [0,1]$. Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình (2.7) là nền tản cho việc tìm nghiệm của phương trình (2.8). Sử dụng kết quả về nghiệm của phương trình hàm (2.7) được đưa ra bởi Daróczy và Jarai (1979), dễ dàng chỉ ra được nếu f liên tục thì tất cả các nghiệm của (2.8) có dạng $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Thoạt nhìn thì phương trình hàm (2.7) có vẻ đơn giản, có thể tìm ra nghiệm tổng quát. Tuy nhiên chưa ai thành công trong việc tìm tất cả các nghiệm của phương trình này.

2.2 Các phương trình hàm Cauchy khác

2.2.1 Lời giới thiệu

Trong chương 5 của cuốn sách *Cours d'Analyse*, A.L Cauchy (1821) cũng nghiên cứu ba phương trình hàm khác là

$$f(x+y) = f(x)f(y), \tag{2.9}$$

$$f(xy) = f(x) + f(y), \tag{2.10}$$

và

$$f(xy) = f(x)f(y), \tag{2.11}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Chương này sẽ dành hết cho việc giải quyết ba phương trình hàm Cauchy trên. Trong phạm vi Toán sơ cấp, chúng tôi chỉ tìm nghiệm tổng quát liên tục của các phương trình hàm trên.

2.2.2 Nghiệm của phương trình hàm Cauchy mũ

Định lý 2.7. *Nghiệm tổng quát liên tục của phương trình hàm (2.9)*

$$f(x+y) = f(x)f(y),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ là

$$f(x) \equiv 0 \qquad \text{hoặc} \qquad f(x) = e^{cx}, \text{ với } c \text{ là số thực tùy ý.}$$

Chứng minh. Ta dễ dàng chứng minh được $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ là một nghiệm của phương trình hàm (2.9). Ta giả sử $f(x)$ không đồng nhất bằng 0, ta chứng minh $f(x)$ khác 0 với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giả sử tồn tại y_0 sao cho $f(y_0) = 0$. Từ (2.9) ta có

$$\begin{aligned} f(y) &= f((y - y_0) + y_0) \\ &= f(y - y_0)f(y_0) = 0, \end{aligned}$$

với mọi $y \in \mathbb{R}$. Điều đó mâu thuẫn với giả sử f(x) không đồng nhất bằng 0. Do đó $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Cho $x = y$, ta có

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 > 0.$$

Ta lấy logarithm cơ số e hai vế (2.9) được

$$lnf(x+y) = lnf(x) + lnf(y).$$

Đặt $g(x) = lnf(x)$ ta có phương trình

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Do đó $g(x) = cx$, với c là hằng số tùy ý. Suy ra: $f(x) = e^{cx}$.
Định lý đã được chứng minh. □

Định nghĩa 2.5. *Một hàm số $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ được gọi là hàm số mũ thực (có giá trị thực) nếu nó thỏa mãn $f(x+y) = f(x)f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.*

Lấy n là số nguyên dương. Xét phương trình hàm

$$f(x + y + nxy) = f(x)f(y), \tag{2.12}$$

với mọi số thực $x > -\frac{1}{n}$ và $y > -\frac{1}{n}$. Khi $n \to 0$, phương trình hàm (2.12) trở thành phương trình hàm Cauchy mũ (2.9). Phương trình hàm này được nghiên cứu bởi Thielman (1949).

Định lý 2.8. *Mọi nghiệm liên tục f của phương trình hàm (2.12) với mọi số thực* $x > -\frac{1}{n}$ *và* $y > -\frac{1}{n}$ *có dạng*

$$f(x) \equiv 0 \quad \text{hoặc} \quad f(x) = (1+nx)^k,$$

với k là hằng số tùy ý.

Chứng minh. Phương trình (2.12) có thể viết lại như sau

$$f\left(\frac{(1+nx)(1+ny)-1}{n}\right) = f(x)f(y). \tag{2.13}$$

Đặt $1 + nx = e^u$ và $1 + ny = e^v$, suy ra $u = ln(1 + nx)$ và $v = ln(1 + ny)$. Phương trình (2.13) trở thành

$$f\left(\frac{e^{u+v}-1}{n}\right) = f\left(\frac{e^u-1}{n}\right) f\left(\frac{e^v-1}{n}\right), \tag{2.14}$$

với mọi $u, v \in \mathbb{R}$.
Lấy

$$\phi(u) = f\left(\frac{e^u-1}{n}\right), \tag{2.15}$$

thay vào (2.14) ta được phương trình

$$\phi(u+v) = \phi(u)\phi(v),$$

với mọi $u, v \in \mathbb{R}$. Theo Định lý 2.7, ta có

$$\phi(x) = e^{kx} \quad \text{hoặc} \quad \phi(x) = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.16}$$

Từ (2.15) và (2.16) suy ra

$$f(x) \equiv 0 \quad \text{hoặc} \quad f(x) = (1+nx)^k.$$

Định lý đã được chứng minh. □

2.2.3 Nghiệm của phương trình hàm Cauchy logarithm

Ta xét phương trình hàm Cauchy thứ hai dạng (2.10). Phương trình này được biết đến như là phương trình hàm Cauchy logarithm.

Định lý 2.9. *Nghiệm tổng quát liên tục của phương trình hàm (2.10)*

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *là* $f(x) = c\,ln|x|$ *với mọi* $x \in \mathbb{R}^*$*, với c là số thực tùy ý.*

Chứng minh. Thay $x = t, y = t$vào phương trình (2.10) ta được

$$f(t^2) = 2f(t).$$

Tương tự thay $x = -t, y = -t$ vào phương trình (2.10) ta được

$$f(t^2) = 2f(-t).$$

Do đó

$$2f(t) = 2f(-t), \quad t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Ta giải phương trình (2.10) trong trường hợp $x > 0$ và $y > 0$.
Đặt $x = e^s$ và $y = e^t$. Khi đó $s = lnx$ và $t = lny$.
Vì $x, y \in \mathbb{R}^+$ nên $s, t \in \mathbb{R}$. Thay $x = e^s$ và $y = e^t$ vào (2.10) ta được :

$$f(e^{s+t}) = f(e^s) + f(e^t).$$

Đặt

$$g(s) = f(e^s). \tag{2.17}$$

Từ phương trình trên ta có

$$g(s + t) = g(s) + g(t),$$

với mọi $s, t \in \mathbb{R}$. Từ (2.17) ta có

$$f(x) = c\,lnx, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Vì $f(t^2) = 2f(-t)$ nên nghiệm liên tục tổng quát của phương trình (2.10) là

$$f(x) = c\,ln|x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Định lý đã được chứng minh. □

Hệ quả 2.1. *Nghiệm tổng quát liên tục của phương trình hàm (2.10):* $f(xy) = f(x) + f(y)$ *với mọi* $x, y \in \mathbb{R}^+$ *là:*

$$f(x) = c\,ln\,x,$$

với c *là số thực tùy ý.*

Hệ quả 2.2. *Nghiệm tổng quát liên tục của phương trình hàm (2.10):* $f(xy) = f(x) + f(y)$ *với mọi* $x, y \in \mathbb{R}$ *là:*

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2.2.4 Nghiệm của phương trình hàm Cauchy lũy thừa

Mục này ta sẽ xét về phương trình hàm Cauchy (2.11). Đây là phương trình hàm cuối cùng và cũng phức tạp nhất trong ba phương trình hàm nêu ở đầu chương.

Định lý 2.10. *Nghiệm tổng quát liên tục của phương trình hàm (2.11)*

$$f(xy) = f(x)f(y),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}^*$ là:

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*,$$
$$f(x) = |x^\alpha|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*,$$
$$f(x) = \begin{cases} |x|^\beta, x \in \mathbb{R}^+ \\ -|x|^\beta, x \in \mathbb{R}^-, \end{cases}$$

với α, β là các số thực tùy ý.

Chứng minh. Thay $y = 1$ vào (2.11) ta được:

$$f(x)(1 - f(1)) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

Nếu $f(1) \neq 1$ thì từ (2.18) suy ra $f(x) \equiv 0$ và nghiệm này thỏa mãn (2.11)
Nếu $f(1) = 1$. Khi đó

$$f(1) = f\left(x.\frac{1}{x}\right) = f(x)f\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Vậy $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Do đó

$$f(x^2) = f(x)f(x) = [f(x)]^2, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

i) Xét $x, y \in \mathbb{R}^+$.
Đặt $x = e^u, y = e^v$ và $f(e^t) = g(t)$. Khi đó ta có

$$g(u + v) = g(u)g(v), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Theo Định lý 2.7 suy ra $g(t) = a^t, \forall t \in \mathbb{R}$, $a > 0$ tùy ý. Do đó

$$f(x) = f(e^u) = g(u) = a^u = a^{ln\, x} = x^{ln\, a} = x^\alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+,$$

trong đó $\alpha = ln\, a$.
ii) Xét $x, y \in \mathbb{R}^-$.
Khi đó $xy \in \mathbb{R}^+$. Với $y = x$ thì từ (2.11) và theo kết quả phần (i), ta có

$$[f(x)]^2 = f(x^2) = (x^2)^\beta = (|x|^\beta)^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^-, \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

Do $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^-$, nên

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\beta, x \in \mathbb{R}^+ \\ -|x|^\beta, x \in \mathbb{R}^-, \end{cases}$$

Kết hợp (i), (ii) và thử lại kết quả, ta có
1)$f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$.
2)$f(x) = |x^\alpha| \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$, với $\alpha \in \mathbb{R}$ tùy ý.
3)$f(x) = \begin{cases} |x|^\beta, x \in \mathbb{R}^+ \\ -|x|^\beta, x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$, với $\beta \in \mathbb{R}$ tùy ý. □

Định nghĩa 2.6. *Một hàm số $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ được gọi là hàm số lũy thừa nếu nó thỏa mãn $f(xy) = f(x)f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.*

2.3 Phương trình hàm Jensen

2.3.1 Lời giới thiệu

Trong chương này, đầu tiên chúng tôi sẽ giới thiệu về hàm số lồi. Tiếp đó, ta sẽ xác định nghiệm tổng quát liên tục của phương trình hàm Jensen trên tập hợp số thực $\mathbb{R}$. Sau đó, chúng tôi cũng xác định nghiệm tổng quát của phương trình hàm Jensen trên đoạn $[\alpha, \beta]$. Trong chương này cùng với việc tìm hiểu về phương trình hàm Jensen còn xuất hiện bất đẳng thức Popoviciu và phương trình hàm Cauchy trên đoạn $[\alpha, \beta]$.

2.3.2 Hàm số lồi

Định nghĩa 2.7. *Một hàm số $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ được gọi là hàm số lồi nếu nó thỏa mãn bất đẳng thức*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.19}$$

Hàm số lồi lần đầu tiên được giới thiệu bởi J.L.W.V Jensen vào năm 1905 mặc dù việc tìm hàm số thỏa mãn điều kiện (2.19) đã được nghiên cứu bởi Hadamard (1893) và Hölder (1889). Năm 1905, Jensen viết:

“ It seem to me that the notion of convex functions is just as fundamental as positive or increasing functions. If I am not mistaken in this, the notion ought to find its place in elementary exposition of theory of real functions.”

Ví dụ 2.1. Một vài ví dụ về hàm số lồi.
(a) $f(x) = mx + c$ trên $\mathbb{R}$ với mọi $m, c \in \mathbb{R}$.
(b) $f(x) = x^2$ trên $\mathbb{R}$.
(c) $f(x) = e^{\alpha x}$ trên $\mathbb{R}$, với $\alpha \geq 1$ hoặc $\alpha \leq 1$ tùy ý .
(d) $f(x) = |x|^\alpha$ trên $\mathbb{R}$, với $\alpha \geq 1$ tùy ý .
(e) $f(x) = x \, log \, x$ trên $\mathbb{R}^+$.
(f) $f(x) = tan \, x$ trên $[0, \frac{\pi}{2})$.

Tổng của các hàm số lồi là một hàm số lồi. Tuy nhiên tích của các hàm số lồi chưa chắc là hàm số lồi. Ví dụ như $f(x) = x^2$ và $g(x) = e^x$ là các hàm số lồi trên $\mathbb{R}$ nhưng tích của nó $h(x) = x^2 e^x$ không phải là một hàm số lồi trên $\mathbb{R}$.

Nếu $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm số cộng tính thì fcũng là hàm số lồi.

Nếu $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm số cộng tính và $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm số lồi thì hàm hợp $f(g(x))$ là hàm số lồi.

2.3.3 Phương trình hàm Jensen

Phương trình hàm

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ được gọi là *phương trình hàm Jensen.*

Định nghĩa 2.8. *Một hàm số $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ được gọi là hàm số Jensen nếu nó thỏa mãn*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Định lý 2.11. *Nghiệm tổng quát liên tục của phương trình hàm Jensen*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{JE}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ là

$$f(x) = ax + b, \tag{2.20}$$

với a,b là hằng số tùy ý.

Chứng minh. Dễ dàng chứng minh được (2.20) là nghiệm của phương trình hàm Jensen (JE).
Lấy $y = 0$ trong (JE), ta có

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2} + \frac{a}{2}. \tag{2.21}$$

Đặt $b = f(0)$, thay (2.21) vào (JE), ta được

$$\frac{f(x+y)+b}{2} = \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

hay

$$f(x+y) + b = f(x) + f(y)$$

$$\Leftrightarrow f(x+y) - b = [f(x) - b] + [f(y) - b].$$

Đặt $g(x) = f(x) - a$, ta có phương trình

$$g(x+y) = g(x) + g(y).$$

Theo kết quả về nghiệm tổng quát của phương trình hàm Cauchy cộng tính ta được

$$g(x) = ax,$$

suy ra

$$f(x) = ax + b.$$

Định lý đã được chứng minh. □

Định lý 2.12. *Nghiệm tổng quát liên tục của phương trình hàm*

$$f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n}, \tag{2.22}$$

với mọi $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ *là* $f(x)=ax+b$, *với a,b là hằng số tùy ý.*

Chứng minh. Trong phương trình (2.22) cho $x_3=x_4=...=x_n=0$ ta được

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{n}\right)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+(n-2)f(0)}{n}.$$

hay

$$f\left(\frac{\frac{2x_1}{n}+\frac{2x_2}{n}}{2}\right)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+(n-2)f(0)}{n}. \tag{2.23}$$

Cho $x_3=x_4=...=x_n=0, x_2=x_1$ ta có $f\left(\frac{2x_1}{n}\right)=\frac{2f(x_1)+(n-2)f(0)}{n}$.
Cho $x_3=x_4=...=x_n=0, x_1=x_2$ ta có $f\left(\frac{2x_2}{n}\right)=\frac{2f(x_2)+(n-2)f(0)}{n}$.
Cộng hai kết quả trên ta được

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+(n-2)f(0)}{n}=\frac{f\left(\frac{2x_1}{n}\right)+f\left(\frac{2x_2}{n}\right)}{2}. \tag{2.24}$$

Từ (2.23) và (2.24) ta có

$$f\left(\frac{\frac{2x_1}{n}+\frac{2x_2}{n}}{2}\right)=\frac{f\left(\frac{2x_1}{n}\right)+f\left(\frac{2x_2}{n}\right)}{2}, \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Đây là phương trình hàm Jensen trên $\mathbb{R}$ nên có nghiệm $f(x)=ax+b$, với a, b là các số thực tùy ý.
Định lý đã được chứng minh. □

2.3.4 Phương trình hàm Jensen trên đoạn $[\alpha, \beta]$

Định nghĩa 2.9. *Cho* $f:[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}$ *là nghiệm của phương trình hàm*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad \forall x,y\in[\alpha,\beta]. \tag{JE}$$

Phương trình hàm (JE) được gọi là phương trình hàm Jensen trên đoạn $[\alpha,\beta]$.

Định lý 2.13. *Nghiệm tổng quát liên tục của phương trình hàm (JE) trên đoạn* $[\alpha,\beta]$ *là*

$$f(x)=ax+b, \quad \forall x\in[\alpha,\beta]$$

với a, b *là các hằng số tùy ý.*

Chứng minh. Giả sử $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ liên tục và là nghiệm của phương trình hàm (JE). Xét $\varphi : [0,1] \longrightarrow [\alpha, \beta]$ được xác định bởi

$$\varphi(t) = (1-t)\alpha + t\beta, \quad \forall t \in [0,1].$$

Khi đó $g = f(\varphi) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm số liên tục thỏa mãn

$$\begin{aligned} g\left(\frac{t+u}{2}\right) &= f\left(\left(1 - \frac{t+u}{2}\right)\alpha + \frac{t+u}{2}\beta\right) \\ &= f\left(\frac{[(1-t)\alpha + t\beta] + [(1-u)\alpha + u\beta]}{2}\right) \\ &= \frac{f([(1-t)\alpha + t\beta]) + f([(1-u)\alpha + u\beta])}{2} \\ &= \frac{g(t) + g(u)}{2}, \quad \forall t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Vậy g là nghiệm của phương trình hàm (JE) trên $[0,1]$.
Do đó ta có thể giả sử $[\alpha, \beta] = [0,1]$. Đặt $b = f(0), c = f(1)$ ta có

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{0+1}{2}\right) = \frac{f(0)+f(1)}{2} = \frac{b+c}{2} = \frac{1}{2}(c-b) + b,$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{0+\frac{1}{2}}{2}\right) = \frac{f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{\frac{1}{2}(c-b) + b + b}{2} = \frac{1}{4}(c-b) + b.$$

Ta chứng minh

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}(c-b) + b, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Hệ thức trên đúng với $n = 1, 2$. Giả sử nó đúng với $n = k$. Khi đó

$$f\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) = f\left(\frac{0+\frac{1}{2^k}}{2}\right) = \frac{f(0) + f\left(\frac{1}{2^k}\right)}{2} = \frac{\frac{1}{2^k}(c-b) + b + b}{2} = \frac{1}{2^{k+1}}(c-b) + b.$$

Cố định $n \in \mathbb{N}$, lấy $m \in \mathbb{N}$ sao cho $\frac{m}{2^n} \leq 1$, ta chứng minh

$$f\left(\frac{m}{2^n}\right) = \frac{m}{2^n}(c-b) + b.$$

Hệ thức trên đúng với $n = 0, 1$. Giả sử nó đúng với $m \geq 1$ và $\frac{m}{2^n} \leq 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} f\left(\frac{m+1}{2^n}\right) &= f\left(\frac{\frac{m}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{m}{2^{n-1}}\right) + f\left(\frac{m}{2^{n-1}}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{m}{2^n}(c-b) + b + \frac{1}{2^n}(c-b) + b\right] = \frac{m}{2^n}(c-b) + b. \end{aligned}$$

Với mọi $x \in [0,1], x = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{[2^n x]}{2^n}$ và f liên tục nên

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{[2^n x]}{2^n}(c-b) + b\right) = (c-b)x + b = ax + b,$$

với $a = c - b$. Xét đoạn $[\alpha, \beta]$ bất kì, ta có

$$g(t) = at + b, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Khi đó với mọi $x = \varphi(t) \in [\alpha, \beta]$ thì

$$x = (1-t)\alpha + t\beta = \alpha + t(\beta - \alpha),$$

suy ra $t = \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$. Vậy

$$f(x) = a\left(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right) + b = a'x + b',$$

với $a' = \dfrac{a}{\beta-\alpha}$ và $b' = \dfrac{b\beta - (a+b)\alpha}{\beta-\alpha}$.
Định lý đã được chứng minh. □

Định lý 2.14. *Nghiệm tổng quát liên tục của phương trình hàm*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n}, \tag{2.25}$$

với mọi $x_1, x_2, ..., x_n \in [\alpha, \beta]$, $(n \geq 2)$ *là*

$$f(x) = ax + b, \quad \forall x \in [\alpha, \beta],$$

với a, b *là các hằng số tùy ý.*

Chứng minh. Ta thực hiện biến đổi phương trình (2.25) tương tự như phần chứng minh Định lý 2.12 ta được

$$f\left(\frac{\frac{2x_1}{n} + \frac{2x_2}{n}}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{2x_1}{n}\right) + f\left(\frac{2x_2}{n}\right)}{2}, \qquad \forall x_1, x_2 \in [\alpha, \beta].$$

Đặt $u = \dfrac{2x_1}{n}, v = \dfrac{2x_2}{n} (u, v \in [\dfrac{2\alpha}{n}, \dfrac{2\beta}{n}])$, ta được phương trình

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{f(u) + f(v)}{2}, \qquad u, v \in [\frac{2\alpha}{n}, \frac{2\beta}{n}].$$

Đây là phương trình hàm Jensen trên đoạn $[\dfrac{2\alpha}{n}, \dfrac{2\beta}{n}]$.
Theo Định lý 2.13 ta có $f(u) = a'u + b$, với a, b là các số thực tùy ý. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $f(x) = ax + b$, với $a = \dfrac{2}{n}a'$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$.
Định lý đã được chứng minh. □

2.3.5 Phương trình hàm Cauchy trên đoạn $[\alpha, \beta]$

Ở mục này,chúng tôi sẽ đưa ra định nghĩa về phương trình hàm Cauchy trên đoạn $[\alpha, \beta]$ và trình bày về nghiệm tổng quát của phương trình hàm Cauchy trên đoạn $[\alpha, \beta]$, với α, β bất kì.

Định nghĩa 2.10. *Phương trình hàm Cauchy trên đoạn $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ là phương trình hàm dạng*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad \forall x, y, x+y \in [\alpha, \beta]. \tag{2.26}$$

Giả sử f là một nghiệm của phương trình hàm (2.26).

Dễ thấy rằng nếu $x, y \in [\alpha, \beta]$ thì $x+y \in [2\alpha, 2\beta]$. Ta chia ra những trường hợp sau đây

Trường hợp 1: $[\alpha, \beta] \cap [2\alpha, 2\beta] = \emptyset$.
Khi đó với mọi $x, y \in [\alpha, \beta]$ thì $x+y \notin [2\alpha, 2\beta]$ nên f là hàm số tùy ý xác định và liên tục trên $[\alpha, \beta]$.

Trường hợp 2: $[\alpha, \beta] \cap [2\alpha, 2\beta] \neq \emptyset, [\alpha, \beta] \cap [2\alpha, 2\beta] = [\alpha_1, \beta_1]$.
Với mọi $x \in [\alpha_1, \beta_1]$, ta có $\dfrac{x}{2} \in [\alpha, \beta]$, do đó

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right) = 2f\left(\frac{x}{2}\right).$$

Như vậy $f\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}f(x), \forall x \in [\alpha_1, \beta_1]$. Với mọi $x, y \in [\alpha_1, \beta_1]$, ta có $\dfrac{x+y}{2} \in [\alpha, \beta]$, do đó

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y}{2}\right) &= f\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{y}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}. \end{aligned}$$

Theo kết quả nghiệm của phương trình hàm Jensen trên $[\alpha_1, \beta_1]$. Theo Định lý 2.13 ta có

$$f(x) = ax + b, \forall x \in [\alpha_1, \beta_1], \text{ với a, b là hằng số.}$$

+Trường hợp 2a: $\alpha > 0$. Khi đó

$$2\alpha \leq \beta, \alpha_1 = 2\alpha, \beta_1 = \beta.$$

Do đó: $a(2\alpha) + b = f(2\alpha) = f(\alpha) + f(\alpha) = 2f(\alpha)$.
Vậy $f(\alpha) = a\alpha + \dfrac{b}{2}$. Với mọi $x \in [\alpha, \beta - \alpha]$, ta có

$$x + \alpha \in [2\alpha, \beta] = [\alpha_1, \beta_1].$$

Do đó

$$a(x+\alpha) + b = f(x+\alpha) = f(x) + f(\alpha) = f(x) + a\alpha + \frac{b}{2}.$$

Vậy $f(x) = ax + \dfrac{b}{2}, \forall x \in [\alpha, \beta - \alpha]$.

* Nếu $\beta - \alpha \geq 2\alpha \Leftrightarrow \alpha \leq \dfrac{\beta}{3}$ thì $2\alpha \in [\alpha, \beta - \alpha]$. Ta có

$$a(2\alpha) + b = f(2\alpha) = a(2\alpha) + \frac{b}{2} \Rightarrow b = 0.$$

Vậy $f(x) = ax, \forall x \in [\alpha, \beta]$.

* Nếu $\beta - \alpha < 2\alpha$ thì $f(x)$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} ax + \dfrac{b}{2}, & \text{khi } x \in [\alpha, \beta - \alpha] \\ g(x), & \text{khi } x \in [\beta - \alpha, 2\alpha] \\ ax + b, & \text{khi } x \in [2\alpha, \beta], \end{cases} \tag{2.27}$$

trong đó $g(x)$ là hàm số liên tục trên $[\beta - \alpha, 2\alpha]$ thỏa mãn

$$g(\beta - \alpha) = a(\beta - \alpha) + \frac{b}{2}, g(2\alpha) = 2a\alpha + b.$$

Ta chứng minh hàm số f xác định bởi (2.27) thỏa mãn (2.26). Giả sử $x, y \in [\alpha, \beta]$ sao cho $x + y \in [\alpha, \beta]$. Khi đó nếu $x \notin [\alpha, \beta - \alpha]$ hoặc $y \notin [\alpha, \beta - \alpha]$ thì

$$x + y > \beta \Rightarrow x + y \notin [\alpha, \beta] \quad \text{(mâu thuẫn).}$$

Vậy $x, y \in [\alpha, \beta - \alpha]$, do đó $x + y \in [2\alpha, \beta]$. Suy ra

$$f(x) + f(y) = ax + \frac{b}{2} + ay + \frac{b}{2} = a(x + y) + b = f(x + y).$$

Vậy hàm số xác định bởi (2.27) thỏa mãn (2.26).

+Trường hợp 2b: $\beta < 0$. Khi đó: $\alpha \leq 2\beta, \alpha_1 = \alpha, \beta_1 = 2\beta$. Do đó

$$a(2\beta) + b = f(2\beta) = f(\beta) + f(\beta) = 2f(\beta).$$

Vậy $f(\beta) = a\beta + \dfrac{b}{2}$.

Với mọi $x \in [\alpha - \beta, \beta] \Rightarrow x + \beta \in [\alpha, 2\beta] = [\alpha_1, \beta_1]$, do đó

$$a(x + \beta) + b = f(x + \beta) = f(x) + f(\beta) = f(x) + a\beta + \frac{b}{2}.$$

Vậy $f(x) = ax + \dfrac{b}{2}, \forall x \in [\alpha - \beta, \beta]$.

* Nếu $\alpha - \beta \leq 2\beta$ thì $2\beta \in [\alpha - \beta, \beta]$. Do đó

$$a(2\beta) + b = f(2\beta) = a(2\beta) + \frac{b}{2} \Rightarrow b = 0.$$

Vậy $f(x) = ax, \forall x \in [\alpha, \beta]$.

* Nếu $\alpha - \beta > 2\beta$ thì $f(x)$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{khi } x \in [\alpha, 2\beta] \\ h(x), & \text{khi } x \in [2\beta, \alpha - \beta] \\ ax + \dfrac{b}{2}, & \text{khi } x \in [\alpha - \beta, \beta], \end{cases} \tag{2.28}$$

trong đó $h(x)$ là hàm số liên tục trên $[2\beta, \alpha - \beta]$ và

$$h(\alpha - \beta) = a(\alpha - \beta) + \frac{b}{2}, h(2\beta) = 2a\beta + b.$$

Ta chứng minh hàm số f xác định bởi (2.28) thỏa mãn (2.26). Giả sử $x, y \in [\alpha, \beta]$ sao cho $x + y \in [\alpha, \beta]$. Khi đó nếu $x \notin [\alpha - \beta, \beta]$ hoặc $y \notin [\alpha - \beta, \beta]$ thì

$$x + y < \alpha \Rightarrow x + y \notin [\alpha, \beta] \quad \text{(mâu thuẫn).}$$

Vậy $x, y \in [\alpha - \beta, \beta]$, do đó $x + y \in [\alpha, 2\beta]$. Suy ra

$$f(x) + f(y) = ax + \frac{b}{2} + ay + \frac{b}{2} = a(x + y) + b = f(x + y).$$

Vậy hàm số xác định bởi (2.28) thỏa mãn (2.26).
+Trường hợp 2c: $\alpha \leq 0 \leq \beta$. Khi đó: $\alpha_1 = \alpha, \beta_1 = \beta$.
Vì $0 \in [\alpha, \beta] = [\alpha_1, \beta_1]$ nên

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow b = 0.$$

Vậy $f(x) = ax, \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$.

Kết luận

- Nếu $[\alpha, \beta] \cap [2\alpha, 2\beta] = \emptyset$ thì f là hàm số tùy ý, xác định và liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$.
- Nếu $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}\beta$ hoặc $\alpha \leq 3\beta < 0$ hoặc $\alpha \leq 0 \leq \beta$ thì

$$f(x) = ax, \forall x \in [\alpha, \beta] \text{ (với a là hằng số tùy ý).}$$

- Nếu $\frac{1}{3}\beta < \alpha \leq \frac{1}{2}\beta$ thì hàm số f xác định bởi (2.27).
- Nếu $3\beta < \alpha \leq 2\beta$ thì hàm số f xác định bởi (2.28).

Chú ý 2.1. *Ta tiếp tục xét phương trình hàm Cauchy nhiều biến trên đoạn $[\alpha, \beta]$ sau*

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i), \tag{2.29}$$

với $x_i \in [\alpha, \beta], (i = \overline{1, n})$ sao cho $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \in [\alpha, \beta], n \geq 2.$

Giả sử f là một nghiệm của phương trình hàm (2.29).

Dễ thấy rằng nếu $x_i \in [\alpha, \beta], (i = \overline{1, n})$ thì $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \in [n\alpha, n\beta]$. Ta chia ra những trường hợp sau đây

Trường hợp 1: $[\alpha, \beta] \cap [n\alpha, n\beta] = \emptyset$.
Khi đó với mọi $x_i \in [\alpha, \beta], (i = \overline{1, n})$ thì $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \notin [n\alpha, n\beta]$ nên f là hàm số tùy ý xác định và liên tục trên $[\alpha, \beta]$.

Trường hợp 2: $[\alpha, \beta] \cap [2\alpha, 2\beta] \neq \emptyset, [\alpha, \beta] \cap [2\alpha, 2\beta] = [\alpha_1, \beta_1]$.
Với mọi $x \in [\alpha_1, \beta_1]$, ta có $\frac{x}{2} \in [\alpha, \beta]$, do đó

$$f(x) = f\left(\frac{nx}{n}\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right).$$

Như vậy $f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n} f(x), \forall x \in [\alpha_1, \beta_1]$. Với mọi $x_i \in [\alpha_1, \beta_1], (i = \overline{1, n})$, ta có $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \in [\alpha, \beta]$, do đó

$$f\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Theo kết quả nghiệm của phương trình hàm Jensen trên $[\alpha_1, \beta_1]$. Định lý 2.14 ta được

$$f(x) = ax + b, \forall x \in [\alpha_1, \beta_1] \text{ với a,b là hằng số.}$$

+Trường hợp 2a: $\alpha > 0$. Khi đó

$$n\alpha \leq \beta, \alpha_1 = n\alpha, \beta_1 = \beta.$$

Do đó: $a(n\alpha) + b = f(n\alpha) = nf(\alpha)$.
Vậy $f(\alpha) = a\alpha + \frac{b}{n}$. Với mọi $x \in [\alpha, \beta - (n-1)\alpha]$, ta có

$$x + (n-1)\alpha \in [n\alpha, \beta] = [\alpha_1, \beta_1].$$

Do đó

$$a[x + (n-1)\alpha] + b = f(x + (n-1)\alpha) = f(x) + (n-1)f(\alpha) = f(x) + (n-1)[a\alpha + \frac{b}{2}].$$

Vậy $f(x) = ax + \frac{b}{n}, \forall x \in [\alpha, \beta - (n-1)\alpha]$.

* Nếu $\beta - (n-1)\alpha \geq n\alpha \Leftrightarrow \alpha \leq \frac{\beta}{2n-1}$ thì $n\alpha \in [\alpha, \beta - (n-1)\alpha]$. Ta có

$$a(n\alpha) + b = f(n\alpha) = a(n\alpha) + \frac{b}{n} \Rightarrow b = 0 \,(\text{ vì } n \geq 2).$$

Vậy $f(x) = ax, \forall x \in [\alpha, \beta]$.

* Nếu $\beta - (n-1)\alpha < n\alpha$ thì $f(x)$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} ax + \dfrac{b}{n}, & \text{khi } x \in [\alpha, \beta - (n-1)\alpha] \\ g(x), & \text{khi } x \in [\beta - (n-1)\alpha, n\alpha] \\ ax + b, & \text{khi } x \in [n\alpha, \beta], \end{cases} \tag{2.30}$$

trong đó $g(x)$ là hàm số liên tục trên $[\beta - (n-1)\alpha, n\alpha]$ thỏa mãn

$$g(\beta - (n-1)\alpha) = a(\beta - (n-1)\alpha) + \frac{b}{n}, g(n\alpha) = na\alpha + b.$$

Ta chứng minh hàm số f xác định bởi (2.30) thỏa mãn (2.29). Giả sử $x_i \in [\alpha, \beta], (i = \overline{1, n})$ sao cho $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \in [\alpha, \beta]$. Khi đó nếu $x_i \notin [\alpha, \beta - (n-1)\alpha], (i = \overline{1, n})$ thì

$$\sum_{i=1}^{n} x_i > \beta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \notin [\alpha, \beta] \quad \text{(mâu thuẫn).}$$

Vậy $x_i \in [\alpha, \beta - (n-1)\alpha], (i = \overline{1, n})$. Do đó $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \in [n\alpha, \beta]$. Suy ra

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(ax_i + \frac{b}{n} \right) = a \sum_{i=1}^{n} (x_i) + b = f(\sum_{i=1}^{n} x_i).$$

Vậy hàm số xác định bởi (2.30) thỏa mãn (2.29).

+Trường hợp 2b: $\beta < 0$. Khi đó: $\alpha \le n\beta, \alpha_1 = \alpha, \beta_1 = n\beta$. Do đó

$$a(n\beta) + b = f(n\beta) = nf(\beta).$$

Vậy $f(\beta) = a\beta + \dfrac{b}{n}$.

Với mọi $x \in [\alpha - (n-1)\beta, \beta] \Rightarrow x + \beta \in [\alpha, n\beta] = [\alpha_1, \beta_1]$, do đó

$$a[x + (n-1)\beta] + b = f(x + (n-1)\beta) = f(x) + (n-1)f(\beta) = f(x) + (n-1)[a\beta + \frac{b}{n}].$$

Vậy $f(x) = ax + \dfrac{b}{n}, \forall x \in [\alpha - (n-1)\beta, \beta]$.

* Nếu $\alpha - (n-1)\beta \le n\beta$ thì $n\beta \in [\alpha - (n-1)\beta, \beta]$. Do đó

$$a(n\beta) + b = f(n\beta) = a(n\beta) + \frac{b}{n} \Rightarrow b = 0.$$

Vậy $f(x) = ax, \forall x \in [\alpha, \beta]$.

* Nếu $\alpha - (n-1)\beta > n\beta$ thì $f(x)$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{khi } x \in [\alpha, n\beta] \\ h(x), & \text{khi } x \in [n\beta, \alpha - (n-1)\beta] \\ ax + \dfrac{b}{n}, & \text{khi } x \in [\alpha - (n-1)\beta, \beta], \end{cases} \tag{2.31}$$

trong đó $h(x)$ là hàm số liên tục trên $[n\beta, \alpha - (n-1)\beta]$ và

$$h(\alpha - (n-1)\beta) = a(\alpha - (n-1)\beta) + \frac{b}{n}, h(n\beta) = na\beta + b.$$

Ta chứng minh hàm số f xác định bởi (2.31) thỏa mãn (2.29). Giả sử $x_i \in [\alpha, \beta], (i = \overline{1, n})$ sao cho $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \in [\alpha, \beta]$. Khi đó nếu $x_i \notin [\alpha - (n-1)\beta, \beta]$, $(i = \overline{1, n})$ thì

$$\sum_{i=1}^{n} x_i < \alpha \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \notin [\alpha, \beta] \quad \text{(mâu thuẫn)}.$$

Vậy $x_i \in [\alpha - (n-1)\beta, \beta]$, $(i = \overline{1, n})$. Do đó $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \in [\alpha, n\beta]$. Suy ra

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(ax_i + \frac{b}{n} \right) = a \sum_{i=1}^{n} (x_i) + b = f(\sum_{i=1}^{n} x_i).$$

Vậy hàm số xác định bởi (2.31) thỏa mãn (2.29).
+Trường hợp 2c: $\alpha \le 0 \le \beta$. Khi đó: $\alpha_1 = \alpha, \beta_1 = \beta$.
Vì $0 \in [\alpha, \beta] = [\alpha_1, \beta_1]$ nên

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow b = 0.$$

Vậy $f(x) = ax, \forall x \in [\alpha, \beta]$.

Kết luận

- Nếu $[\alpha, \beta] \cap [2\alpha, 2\beta] = \emptyset$ thì f là hàm số tùy ý, xác định và liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$.
- Nếu $0 < \alpha \le \dfrac{\beta}{2n-1}$ hoặc $\dfrac{\alpha}{2n-1} \le \beta < 0$ hoặc $\alpha \le 0 \le \beta$ thì

$$f(x) = ax, \forall x \in [\alpha, \beta] \text{ (với a là hằng số tùy ý)}.$$

- Nếu $n\alpha < \beta \le (2n-1)\alpha$ thì hàm số f xác định bởi (2.30).
- Nếu $(2n-1)\beta < \alpha \le n\beta$ thì hàm số f xác định bởi (2.31).

2.3.6 Một phương trình hàm dạng Jensen

Popoviciu(1965) chứng minh rằng nếu I là một đoạn khác rỗng và $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm số lồi thì f thỏa mãn bất đẳng thức

$$3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + f(x) + f(y) + f(z) \geq 2\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right)\right],$$

với mọi $x, y, z \in I$. Nếu ta thay dấu bất đẳng thức thành đẳng thức ở trên thì ta có dạng của phương trình hàm Jensen. Ở phần này mục đích của chúng tôi là xác định nghiệm tổng quát liên tục của phương trình hàm dạng Jensen

$$3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + f(x) + f(y) + f(z) = 2\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right)\right]. \tag{2.32}$$

Định lý sau đây xác đinh nghiệm tổng quát liên tục của phương trình hàm (2.32) được trình bày bởi Trif (2000).

Định lý 2.15. *Hàm số $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm (2.32) với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi*

$$f(x) = ax + b, \tag{2.33}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$, b là số thực tùy ý.

Chứng minh. Dễ dàng chứng minh được nếu f có dạng (2.33) là nghiệm của phương trình hàm (2.32). Ta chứng minh chiều ngược lại. Đặt hàm số $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$A(x) = f(x) - b, \tag{2.34}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}, b = f(0)$. Khi đó $A(0) = 0$ và hàm số A thỏa mãn

$$3A\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + A(x) + A(y) + A(z) = 2\left[A\left(\frac{x+y}{2}\right) + A\left(\frac{y+z}{2}\right) + A\left(\frac{z+x}{2}\right)\right], \tag{2.35}$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$. Thay $y = x, z = -2x$ vào (2.32) ta được

$$A(-2x) = 4A\left(-\frac{x}{2}\right), \tag{2.36}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thay x bằng $-x$ trong (2.36) ta được

$$A(2x) = 4A\left(\frac{x}{2}\right), \tag{2.37}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thay x bằng $2x$ trong (2.37) ta được

$$A(4x) = 4A(x), \tag{2.38}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thay $y = z = 0$ vào (2.35) và kết hợp với kết quả (2.38) ta có

$$3A\left(\frac{x}{3}\right) = A(2x) - A(x), \tag{2.39}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thay $y = x$ và $z = 0$ vào (2.35) và kết hợp với kết quả (2.39) ta có

$$A(4x) = A(2x) - 4A\left(\frac{x}{2}\right), \tag{2.40}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Từ (2.38), (2.39), (2.40) cho ta kết quả

$$A(2x) = 2A(x), \tag{2.41}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thay $y = x$ và $z = -x$ vào (2.35) và sử dụng kết quả (2.41) ta có

$$A(-x) = -A(x),$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Và cuối cùng thay $z = -x - y$ vào (2.35) và kết hợp với kết quả (2.40) ,(2.41) ta được

$$A(x+y) = A(x) + A(y),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Theo Định lý 2.3 ta có $A(x) = ax$, kết hợp với (2.34) ta suy ra nghiệm phương trình (2.32) có dạng (2.33).
Định lý đã được chứng minh. $\square$

2.4 Phương trình hàm Pexider

2.4.1 Lời giới thiệu

Năm 1903, J.V.Pexider đã xét các phương trình hàm sau

$$\begin{aligned} f(x+y) &= g(x) + h(y), && (2.42)\\ f(x+y) &= g(x)h(y), && (2.43)\\ f(xy) &= g(x) + h(y), && (2.44)\\ f(x+y) &= g(x)h(y), && (2.45) \end{aligned}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ với $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Các phương trình hàm trên là mở rộng của các phương trình hàm Cauchy

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y),\\ f(x+y) &= f(x)f(y),\\ f(xy) &= f(x) + f(y),\\ f(x+y) &= f(x)f(y), \end{aligned}$$

với mọi với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Trong chương này ta xác định nghiệm tổng quát liên tục của các phương trình hàm (4.1), (4.2). Đồng thời ta cũng Pexider hóa phương trình hàm Jensen và đưa ra công thức nghiệm tổng quát của nó.

2.4.2 Phương trình hàm Pexider

Trong mục này ta sẽ đưa ra công thức nghiệm tổng quát cho phương trình hàm Pexider (4.1).

Định lý 2.16. *Nghiệm tổng quát liên tục $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ của phương trình hàm Pexider (4.1)*

$$f(x+y) = g(x) + h(y),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ được xác định bởi công thức

$$\begin{cases} f(x) = ax + \alpha + \beta \\ g(x) = ax + \beta \\ h(y) = ay + \alpha, \end{cases} \tag{2.46}$$

với a, α, β là các số thực tùy ý.

Chứng minh. Cho $y = 0$ trong (4.1) ta được

$$g(x) = f(x) - \alpha, \tag{2.47}$$

với $\alpha = h(0)$. Tương tự cho $x = 0$ trong (4.1) ta được

$$h(x) = f(y) - \beta, \tag{2.48}$$

với $\beta = g(0)$. Thay $g(x), h(y)$ ở (2.47) và (2.48) vào (4.1) ta được

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - \alpha - \beta.$$

Đặt

$$A(x) = f(x) - \alpha - \beta, \qquad \text{với } x \in \mathbb{R}. \tag{2.49}$$

ta được

$$A(x+y) = A(x) + A(y).$$

Theo Định lý 2.3 và kết hợp với (2.49) ta có

$$f(x) = ax + \alpha + \beta. \tag{2.50}$$

Từ (2.47) và (2.50) ta có $g(x) = ax + \beta$.
Từ (2.48) và (2.50) ta có $h(y) = ay + \alpha$.
Định lý đã được chứng minh. □

Định lý 2.17. *Nghiệm tổng quát liên tục $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ của phương trình hàm Pexider (4.2)*

$$f(x+y) = g(x)h(y),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ được xác định bởi công thức

$$\begin{cases} f(x) = ab\, e^{kx} \\ g(x) = a\, e^{kx} \\ h(y) = b\, e^{ky}, \end{cases} \tag{2.51}$$

và các nghiệm tầm thường

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \\ h(y) \text{ tùy ý }, \end{cases} \tag{2.52}$$

và

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \text{ tùy ý} \\ h(y) = 0, \end{cases} \tag{2.53}$$

với a, b là các hằng số khác 0, k tùy ý.

Chứng minh. Dễ dàng kiểm tra được (2.51), (2.52), (2.53) là nghiệm của phương trình hàm (4.2). Cho $y = 0$, từ (4.2) ta có

$$f(x) = g(y)h(0). \tag{2.54}$$

Ta chia ra hai trường hợp là $h(0) = 0$ và $h(0) \neq 0$.

Trường hợp: $h(0) = 0$. Từ (2.54) suy ra $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thay vào (4.2) ta có $g(x)h(y) = 0$, từ đó ta có nghiệm (2.52), (2.53).

Trường hợp: $h(0) \neq 0$. Đặt $b = h(0)$, từ (2.54) suy ra

$$g(x) = \frac{f(x)}{b}. \tag{2.55}$$

Tương tự cho $x = 0$, từ (4.2) ta có

$$f(y) = g(0)h(y),$$

với mọi $y \in \mathbb{R}$. Nếu $g(0) = 0$ thì $f(y) = 0$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Khi đó nghiệm của (4.2) là (2.52), (2.53). Giả sử $g(y) \neq 0$, khi đó

$$h(y) = \frac{f(y)}{a}, \tag{2.56}$$

với $a = g(0)$. Thay (2.55), (2.56) vào (4.2) ta được

$$f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{ab}. \tag{2.57}$$

Đặt

$$E(x) = \frac{f(x)}{ab}, \tag{2.58}$$

khi đó từ (2.57) ta có

$$E(x+y) = E(x)E(y).$$

Theo Định lý 2.7 và (2.58) suy ra

$$f(x) = ab\, e^{kx}. \tag{2.59}$$

Từ (2.55) và (2.59) ta có $g(x) = a\, e^{kx}$.
Từ (2.56) và (2.59) ta có $h(y) = b\, e^{ky}$.
Định lý đã được chứng minh. $\square$

2.4.3 Pexider hóa phương trình hàm Jensen

Phương trình hàm Jensen có thể tổng quát hóa như sau

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x)+h(y)}{2}, \tag{2.60}$$

với $x, y \in \mathbb{R}$ và $f, h, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ là những hàm số chưa biết cần xác định.

Định lý 2.18. *Nghiệm tổng quát liên tục của phương trình hàm (2.60) là*

$$\begin{cases} f(x) = 2ax + \alpha + \beta \\ g(x) = 2ax + 2\alpha \\ h(y) = 2ax + 2\beta, \end{cases} \tag{2.61}$$

với a, α, β là các hằng số tùy ý.

Chứng minh. Xác định các hàm số $F, H, G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ với

$$\begin{cases} F(t) = f\left(\frac{t}{2}\right) \\ G(t) = \frac{g(t)}{2} \\ H(t) = \frac{h(t)}{2}. \end{cases} \tag{2.62}$$

Thay (2.62) vào (2.60) ta được

$$F(x+y) = G(x) + H(y),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Theo Định lý 2.16 ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= ax + \alpha + \beta, \\ G(x) &= ax + \beta, \\ H(y) &= ay + \alpha, \end{aligned}$$

là các hằng số tùy ý. Từ (2.62) ta có

$$\begin{aligned} f\left(\frac{t}{2}\right) &= ax + \alpha + \beta, \\ \frac{g(t)}{2} &= ax + \beta, \\ \frac{h(t)}{2} &= ay + \alpha. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} f(x) &= 2ax + \alpha + \beta, \\ g(x) &= 2ax + \beta, \\ h(y) &= 2ay + \alpha. \end{aligned}$$

Định lý đã được chứng minh. $\square$

2.5 Phương trình hàm toàn phương

2.5.1 Lời giới thiệu

Trong chương này ta sẽ nghiên cứu về hàm số song tuyến tính, hàm số toàn phương và phương trình hàm toàn phương. Đầu tiên ta sẽ chỉ ra rằng mọi hàm số song tuyến tính liên tục $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ có dạng $f(x,y) = cxy$ với c là số thực tùy ý. Sau đó ta sẽ xác định nghiệm tổng quát liên tục của phương trình hàm toàn phương. Cuối chương sẽ nghiên cứu về việc Pexider hóa phương trình hàm toàn phương.

2.5.2 Hàm số song tuyến tính

Định nghĩa 2.11. *Một hàm số $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ được gọi là song tuyến tính khi và chỉ khi f tuyến tính theo từng biến*

$$f(x+y,z) = f(x,z) + f(y,z),$$

$$f(x,y+z) = f(x,y) + f(x,z),$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 2.2. Hàm số

$$f(x,y) = cxy,$$

với $x, y \in \mathbb{R}$. là hàm số song tuyến tính, với c là hằng số tùy ý.

Thật vậy, với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} f(x+y,z) &= c(x+y)z \\ &= cxz + cyz \\ &= f(x,z) + f(y,z). \end{aligned}$$

Tương tự

$$\begin{aligned} f(x,y+z) &= cx(y+z) \\ &= cxz + cxy \\ &= f(x,y) + f(x,z). \end{aligned}$$

Do đó f là hàm số song tuyến tính.

Định lý 2.19. *Mọi ánh xạ song tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ đều có dạng*

$$f(x,y) = cxy,$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, c là số thực tùy ý.

Chứng minh. Lấy $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ là một ánh xạ song tuyến tính. Khi đó

$$f(x+y,z) = f(x,z) + f(y,z), \tag{2.63}$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$. Trong (2.63) cho $x = y = 0$, ta được $f(0, z) = 0$ với mọi $z \in \mathbb{R}$. Cố định z, đặt $\phi(x) = f(x, z)$. Từ (2.63) ta được

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Vì f là hàm số liên tục theo từng biến nên ϕ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó $\phi(x) = k\,x$. Vì z cố định, k phụ thuộc z nên ta có

$$\phi(x) = k(z)\,x.$$

Hay

$$f(x, z) = x\,k(z). \tag{2.64}$$

Thay (2.64) vào

$$f(x, y + z) = f(x, y) + f(x, z),$$

ta được

$$x\,k(y + z) = x\,k(y) + x\,k(z),$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$. Suy ra

$$k(y + z) = k(y) + k(z).$$

Vì k liên tục, nên ta có $k(y) = cy$, với c là số thực tùy ý. Vậy

$$f(x, y) = c\,xy,$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.
Định lý đã được chứng minh. □

2.5.3 Nghiệm tổng quát liên tục của phương trình hàm toàn phương

Phương trình hàm

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ được gọi là phương trình hàm toàn phương. Trong phần này ta sẽ xác định nghiệm liên tục của phương trình hàm trên.

Định lý 2.20. *Cho hàm số $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y), \tag{2.65}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó f là hàm số tuyến tính thuần nhất bậc hai. Hơn nữa, trên tập số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, f có dạng

$$f(x) = c\,r^2,$$

với $r \in \mathbb{Q}$, c là hằng số tùy ý.

Chứng minh. Cho $x = y = 0$ ta được $f(0) = 0$. Thay y bằng $-y$ vào (2.65) ta được

$$f(x-y) + f(x+y) = 2f(x) + 2f(-y). \tag{2.66}$$

Từ (2.65) và (2.66) ta có

$$f(y) = f(-y),$$

với mọi $y \in \mathbb{R}$. Suy ra f là hàm lẻ.

Cho $x = y$, từ (2.65) ta được

$$f(2x) = 4f(x),$$

hay

$$f(2x) = 2^2 f(x),$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Tương tự

$$f(2x+x) + f(2x-x) = 2f(2x) + 2f(x),$$

hay

$$f(3x) = 2f(2x) + f(x) = 8f(x) + f(x).$$

Suy ra

$$f(3x) = 3^2 f(x).$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được

$$f(nx) = n^2 f(x),$$

với n là số nguyên dương.

Nếu n là số nguyên âm, khi đó $-n$ là số nguyên dương, và

$$\begin{aligned} f(nx) &= f(-(-n)x) \\ &= f(-nx) \qquad (\text{ vì } f \text{ là hàm số lẻ }) \\ &= (-n)^2 f(x) \\ &= n^2 f(x). \end{aligned}$$

Do đó

$$f(nx) = n^2 f(x),$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{Z}$.

Lấy r là số hữu tỉ bất kì. Khi đó $r = \dfrac{k}{n}$ với $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra

$$k = r\, n.$$

Xét

$$\begin{aligned} k^2 f(x) &= f(kx) \\ &= f(rnx) \\ &= n^2 f(rx). \end{aligned}$$

Do đó

$$f(rx) = \frac{k^2}{n^2} f(x),$$

hay

$$f(rx) = r^2 f(x). \tag{2.67}$$

Vậy f là hàm số thuần nhất bậc hai. Thay $x = 1$ vào (2.67) ta được

$$f(r) = c\,r^2, \quad r \in \mathbb{Q}, \text{ với } c = f(1).$$

Định lý đã được chứng minh. □

Định lý 2.21. *Nghiệm tổng quát liên tục của phương trình hàm*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y), \tag{QE}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ là

$$f(x) = c\,x^2,$$

với c là hằng số tùy ý.

Chứng minh. Giả sử f là một nghiệm liên tục của phương trình hàm (QE). Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$ luôn tồn tại dãy số hữu tỉ r_n sao cho

$$\lim_{n\to\infty} r_n = x.$$

Theo Định lý 2.20 ta có

$$f(r_n) = c\,r_n^2$$

với mọi $n \in \mathbb{Z}$. Vì f liên tục nên

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(r_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} (c\,r_n^2) \\ &= c \lim_{n\to\infty} r_n^2 \\ &= c\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right)^2 \\ &= c\,x^2. \end{aligned}$$

Vậy

$$f(x) = c\,x^2, \quad \text{với } x \in \mathbb{R}.$$

Định lý đã được chứng minh. □

2.5.4 Pexider hóa phương trình hàm toàn phương

Phương trình hàm toàn phương

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y), \tag{QE}$$

có thể Pexider hóa như sau

$$f_1(x+y)+f_2(x-y)=f_3(x)+f_4(y), \tag{2.68}$$

với $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ là các hàm số chưa biết, x, y là các số thực.

Để xác định nghiệm tổng quát của phương trình hàm (2.68) ta sử dụng định lý về cách biểu diễn hàm số song tuyến tính và bổ đề sau

Định lý 2.22. *Hàm số $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ là song tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại ánh xạ song tuyến tính đối xứng $B : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sao cho*

$$f(x) = B(x,x).$$

Bổ đề 2.1. *Nghiệm tổng quát liên tục $f, h, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ của phương trình hàm*

$$f_1(x+y)+f_2(x-y)=g(x)+h(y)=h(-y), \tag{2.69}$$

là

$$\begin{cases} f(x) = B(x,x) + \dfrac{1}{2}\beta x - \dfrac{b}{2} \\ g(x) = 2B(x,x) + \beta x - (b+a) \\ h(x) + h(-x) = 2B(x,x) + a, \end{cases}$$

với $B : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm số song tuyến tính đối xứng; a, b, c là các số thực tùy ý.

Bổ đề này được đưa ra bởi Ebanks, Kannappan và Sahoo (1992).

Định lý 2.23. *Nghiệm tổng quát liên tục $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ của phương trình hàm (2.68)*

$$f_1(x+y)+f_2(x-y)=f_3(x)+f_4(y),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ là

$$\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{1}{2}B(x,x) + \dfrac{1}{4}(\alpha+\beta)x + \left(a - \dfrac{b}{2}\right) \\ f_2(x) = \dfrac{1}{2}B(x,x) + \dfrac{1}{4}(\beta-\alpha)x - \left(a + \dfrac{b}{2}\right) \\ f_3(x) = B(x,x) + \dfrac{1}{2}\beta x - (b+c) \\ f_4(x) = B(x,x) + \dfrac{1}{2}\alpha x + c, \end{cases} \tag{2.70}$$

với $B : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm số song tuyến tính đối xứng; α, β, a, b, c là các hằng số tùy ý.

Chứng minh.

Ta dễ dàng chứng minh được $f_i, i = 1, 2, 3, 4$ xác định trong (2.70) là nghiệm của phương trình hàm (2.68).

Thay y bằng $-y$ vào phương trình (2.68) ta được

$$f_1(x+y) + f_2(x-y) = f_3(x) + f_4(y). \tag{2.71}$$

Cộng (2.71) và (2.68) vế theo vế ta có

$$g(x+y) + g(x-y) = 2f_3(x) + f_4(y) + f_4(-y), \tag{2.72}$$

với $g(x) = f_1(x) + f_2(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Tương tự, trừ (2.68) và (2.71) vế theo về ta được

$$h(x+y) - h(x-y) = f_4(y) - f_4(-y), \tag{2.73}$$

với

$$h(x) = f_1(x) - f_2(x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.74}$$

Để giải phương trình (2.68) ta cần phải giải hệ phương trình bao gồm (2.72) và (2.73). Đầu tiền ta giải phương trình (2.72). Đặt $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$k(y) = f_4(y) - f_4(-y), \text{ với } y \in \mathbb{R}. \tag{2.75}$$

Từ (2.73) suy ra

$$h(x+y) - h(x-y) = k(y), \tag{2.76}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Thay y bằng $-y$ vào (2.75) ta được

$$k(-y) = -k(y).$$

Do đó k là hàm số lẻ. Ta tiếp tục thay $y = x$ vào (2.76) ta được

$$h(2x) = k(x) + h(0). \tag{2.77}$$

Từ (2.76) ta có

$$\begin{aligned} k(y+v) + k(y-v) &= h(x+y+v) - h(x-y-v) + h(x+y-v) - h(x+v-y) \\ &= h((x+v)+y) - h((x+v)-y) + h((x-v)+y) - h((x-v)-y) \\ &= 2k(y). \end{aligned}$$

Do đó k là nghiệm của phương trình hàm Jensen với $k(0) = 0$. Suy ra

$$k(y) = \alpha y, \text{với mọi } y \in \mathbb{R}. \tag{2.78}$$

Từ (2.78) và (2.77) suy ra

$$h(x) = \frac{1}{2}\alpha x + a, \tag{2.79}$$

với $a = h(0)$. Từ (2.74), (2.75) và (2.79) ta có

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{2}\alpha x + a,$$

và

$$f_4(y) - f_4(-y) = \alpha y.$$

Quay trở lai phương trình (2.72), theo Bổ đề 2.1 ta có

$$\begin{aligned} g(x) = f_1(x) + f_2(x) &= B(x,x) + \frac{1}{2}\beta x - \frac{b_1}{2}, \\ 2f_3(x) &= 2B(x,x) + \beta x - (b_1 + a_1), \\ f_4(x) + f_4(-x) &= 2B(x,x) + a_1. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra (2.70) là nghiệm của phương trình hàm (2.68). Định lý đã được chứng minh. □

2.6 Phương trình hàm d'Alembert

2.6.1 Lời giới thiệu

Chúng ta đã biết đẳng thức

$$cos(x+y) + cos(x-y) = 2cos(x)\,cos(y),$$

có thể ứng dụng qua hàm số

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \tag{DE}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Trong chương này ta sẽ nghiên cứu phương trình hàm trên và các phương trình hàm khác có dạng hàm số cosin.

Phương trình hàm trên được biết như là phương trình hàm d'Alembert. Nó có một lịch sử lâu dài và được nghiên cứu bởi d'Alembert (1769), Poisson (1804) và Picard (1922, 1928). Phương trình này có vài trò trung tâm trong việc tính tổng hai vectơ trong hình học Euclidean và phi Euclidean. Cauchy (1821) đã tìm được nghiệm liên tục của phương trình hàm d'Alembert.

2.6.2 Nghiệm liên tục của phương trình hàm d'Alembert

Trong phần này ta tiến hành xác định nghiệm tổng quát liên tục của phương trình hàm (DE).

Định lý 2.24. *Cho $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm số liên tục và thỏa mãn*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \tag{DE}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó f có dạng

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, & (2.80) \\ f(x) &= 1, & (2.81) \\ f(x) &= cosh(\alpha x), & (2.82) \\ f(x) &= cos(\beta x), & (2.83) \end{aligned}$$

với α, β là các số thực tùy ý.

Chứng minh. Cho $x = y = 0$, từ phương trình (DE) ta được

$$2f(0) = 2[f(0)]^2.$$

Suy ra

$$f(0) = 0 \quad \text{hoặc} \quad f(0) = 1.$$

Nếu $f(0) = 0$, thay $y = 0$ vào (DE) ta được

$$2f(x) = 2f(x)f(0).$$

Suy ra

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Khi đó nghiệm của (DE) có dạng (2.80). Bây giờ ta xét f không đồng nhất với 0.

Cho $x = 0$, từ (DE) ta được

$$f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y).$$

Vì f không đồng nhất bằng 0, $f(0) \neq 0$ nên $f(0) = 1$. Do đó

$$f(y) + f(-y) = 2f(y),$$

hay

$$f(-y) = f(y),$$

với mọi $y \in \mathbb{R}$. Do đó f là hàm số chẵn. Vì f là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, đồng thời f cũng khả tích trên các đoạn xác định của nó. Vì vậy, với $t > 0$, ta có

$$\int_{-t}^{t} f(x+y)dy + \int_{-t}^{t} f(x-y)dy = 2f(x) \int_{-t}^{t} f(y)dy. \tag{2.84}$$

Mặt khác, ta có

$$\int_{-t}^{t} f(x+y)dy = \int_{x-t}^{x+t} f(z)dz = \int_{x-t}^{x+t} f(y)dy.$$

Tương tự

$$\int_{-t}^{t} f(x-y)dy = \int_{x+t}^{x-t} f(z)(-dz) = \int_{x-t}^{x+t} f(z)dz = \int_{x-t}^{x+t} f(y)dy.$$

Do đó (2.84) trở thành

$$\int_{x-t}^{x+t} f(y)dy + \int_{x-t}^{x+t} f(y)dy = 2f(x) \int_{-t}^{t} f(y)dy,$$

hay

$$\int_{x-t}^{x+t} f(y)dy = f(x) \int_{-t}^{t} f(y)dy. \tag{2.85}$$

Vì f không đồng nhất bằng 0, $f(0) = 1$. Hơn nữa f liên tục nên tồn tại $t > 0$ sao cho

$$\int_{-t}^{t} f(y)dy > 0.$$

Để ý rằng hai vế của (2.85) có đạo hàm theo biến x. Ta lấy đạo hàm hai vế (2.85) theo biến x ta được

$$\frac{d}{dx} \int_{x-t}^{x+t} f(y)dy = \frac{d}{dx} \left[f(x) \int_{-t}^{t} f(y)dy \right],$$

hay

$$f(x+t) - f(x-t) = f'(x) \int_{-t}^{t} f(y)dy. \tag{2.86}$$

Điều này chứng tỏ f có đạo hàm cấp 2, do đó

$$f'(x+t) - f'(x-t) = f''(x) \int_{-t}^{t} f(y)dy.$$

Suy ra f có đạo hàm cấp 3. Thực hiện các bước tương tự ta thấy rằng nghiệm liên tục bất kì của phương trình (DE) có đạo hàm vô hạn.

Từ (2.86) cho $x = 0$, ta được

$$f(t) - f(-t) = f'(0) \int_{-t}^{t} f(y)dy. \tag{2.87}$$

Vì f là hàm số chẵn nên

$$f(-t) = f(t),$$

thay vào (2.87) ta được

$$f'(0) \int_{-t}^{t} f(y)dy = 0. \tag{2.88}$$

Vì $\int\limits_{-t}^{t} f(y)dy > 0$, nên từ (2.88) suy ra

$$f(0) = 0.$$

Vì f có đạo hàm cấp vô hạn nên ta lấy đạo hàm cấp hai theo biến y hai vế của phương trình (DE) được

$$\begin{aligned} f'(x+y) + f'(x-y) &= 2f(x)f'(y), \\ f''(x+y) + f''(x-y) &= 2f(x)f''(y), \end{aligned}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Cho $y = 0$, ta có

$$2f''(x) = 2f(x)f''(0).$$

Đặt $k = f''(0)$ ta được

$$f''(x) = kf(x).$$

Vậy ta cần phải tìm f thỏa

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = ky \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Để giải quyết vấn đề trên ta xét ba trường hợp: $k = 0, k > 0$ và $k < 0$.

Trường hợp 1. Giả sử $k = 0$. Khi đó

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Suy ra

$$y(x) = c_1x + c_2.$$

Vì $y(0) = 0$ và $y'(0) = 0$ nên $c_1 = 0, c_2 = 1$. Do đó

$$y(x) = 1.$$

Vậy nghiệm trong trường hợp này là (2.81).

Trường hợp 2. Giả sử $k > 0$. Thay $y = e^{mx}$ vào phương trình

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ky, \tag{DE'}$$

ta được $m^2 = k$ nên $m = \pm\sqrt{k}$. Do đó

$$y(x) = c_1e^{\alpha x} + c_2e^{-\alpha x}, \qquad \text{với } \alpha = \sqrt{k}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) \\ &= c_1e^{\alpha.0} + c_2e^{-\alpha.0} \\ &= c_1 + c_2. \end{aligned}$$

Nên $c_2 = 1 - c_1$. Suy ra

$$y(x) = c_1e^{\alpha x} + (1 - c_1)e^{-\alpha x}.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} 0 &= y'(0) \\ &= c_1\alpha e^{\alpha x} + (1-c_1)(-\alpha)e^{-\alpha x}|_{x=0} \\ &= c_1\alpha + (1-c_1)(-\alpha) \\ &= c_1\alpha - \alpha - c_1\alpha \\ &= 2c_1\alpha - \alpha. \end{aligned}$$

Nên $2c_1\alpha = \alpha$ hay $c_1 = \dfrac{1}{2}$ $\quad (sin\alpha \neq 0)$.
Do đó nghiệm của phương trình (DE') là

$$y(x) = \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2} = ch(\alpha x).$$

Vậy trong trường hợp này nghiệm tương ứng là

$$f(x) = ch(\alpha x),$$

ứng với (2.82).

Trường hợp 3. Giả sử $k < 0$. Thay $y = e^{mx}$ vào phương trình

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ky, \tag{DE'}$$

ta được $m^2 = k$ nên $m = \pm i\beta$, với $\beta = \sqrt{-k}, i = \sqrt{-1}$. Do đó

$$y(x) = c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}.$$

Ta có

$$1 = y(0) = c_1 + c_2.$$

Nên $c_2 = 1 - c_1$. Suy ra

$$y(x) = c_1 e^{i\beta x} + (1-c_1)e^{-i\beta x}.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} 0 &= y'(0) \\ &= i\beta c_1 - i\beta(1-c_1) \\ &= 2i\beta c_1 - i\beta. \end{aligned}$$

Nên $i\beta(2c_1 - 1) = 0$ hay $c_1 = \dfrac{1}{2}$. Do đó ta có

$$y(x) = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} = cos(\beta x).$$

Vậy trong trường hợp này nghiệm tương ứng là

$$f(x) = cos(\beta x),$$

ứng với (2.83).
Định lý đã được chứng minh. $\square$

Chương 3

BÀI TẬP ÁP DỤNG

3.1 Phương trình hàm Cauchy

Bài tập 1.1. Xác định tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ thỏa mãn phương trình hàm

$$f(xy) + f(x+y) = f(x)f(y) + 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

Bài tập 1.2. Xác định tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm

$$f(x+y) + f(z) = f(x) + f(y+z), \tag{3.1}$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Đặt $f(0) = a$. Trong (3.1) cho $z = 0$ ta được

$$f(x+y) + a = f(x) + f(x+y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đặt $f(x) - a = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $g(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $g(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy $f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$, với a, b là hằng số tùy ý. Thử lại, ta thấy $f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$ là nghiệm của phương trình hàm đã cho.

Bài tập 1.3.Xác định tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy,$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Ta biến đổi phương trình đã cho thành

$$f(x+y) - \frac{1}{2}(x+y)^2 = [f(x) - \frac{1}{2}x^2] + [f(y) - \frac{1}{2}y^2].$$

Đặt $g(x) = f(x) - \dfrac{1}{2}x^2$. Khi đó $g(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $g(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + ax, \forall x \in \mathbb{R}$, với a là hằng số tùy ý.
Thử lại, ta thấy $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + ax, \forall x \in \mathbb{R}$, với với a là hằng số tùy ý là nghiệm của phương trình hàm đã cho.

Bài tập 1.4. Xác định tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm Lobacevskii

$$f(x+y)f(x-y) = f^2(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Lời giải. Giả sử tồn tại $u \in \mathbb{R}$ sao cho $f(u) = 0$. Trong (3.2) cho $y = u - x$ ta được

$$f^2(x) = f(x + (u-x))f(x - (u-x)) = f(u)f(2x-u) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại ta thấy $f(x) \equiv 0$ là nghiệm của phương trình (3.2).
Giả sử $f(x)$ không đồng nhất bằng 0 Thay x, y trong (3.2) bằng $\dfrac{x}{2}$ ta được

$$f^2\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)f(0).$$

Suy ra

$$\frac{f(x)}{f(0)} = \frac{f^2\left(\frac{x}{2}\right)}{f^2(0)} \quad \text{và} \quad \frac{f(x)}{f(0)} > 0.$$

Do đó

$$ln\,\frac{f(x)}{f(0)} = 2\,ln\,\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{f(0)}.$$

Đặt $g(x) = ln\,\dfrac{f(x)}{f(0)}$ ta được

$$g(x) = 2g(\frac{x}{2}).$$

Từ (3.2) ta có

$$\frac{f^2(x)}{f^2(0)} = \frac{f(x+y)}{f(0)}.\frac{f(x-y)}{f(0)}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & 2\,ln\,\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{f(0)} = ln\,\frac{f(x+y)}{f(0)} + ln\,\frac{f(x-y)}{f(0)} \\
\Leftrightarrow \quad & 2g(x) = g(x+y) + g(x-y) \\
\Leftrightarrow \quad & g(2x) = g(x+y) + g(x-y) \qquad (\text{ vì } g(2x) = 2g(x)).
\end{aligned}$$

Đây là phương trình hàm Cauchy cộng tính nên ta có $g(x) = ax$. Do đó

$$ln\,\frac{f(x)}{f(0)} = ax \Rightarrow \frac{f(x)}{f(0)} = e^{ax} \Rightarrow f(x) = f(0)e^{ax} \Rightarrow f(x) = \alpha^{ax},$$

với $\alpha = f(0)$. Thử lại ta thấy hàm số $f(x) = \alpha e^{ax}$ thỏa mãn (3.2).
Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $f(x) = \alpha e^{ax}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, với a, α là các hằng số tùy ý.

Bài tập 1.5. Cho $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ là nghiệm của phương trình hàm Cauchy cộng tính thỏa mãn điều kiện

$$f(x)=x^2f\left(\frac{1}{x}\right),\quad \forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Chứng minh rằng $f(x)=cx$, với c là hằng số tùy ý.

Lời giải. Vì f là nghiệm của phương trình hàm Cauchy nên

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Từ phương trình trên cho $y=1$ và đặt $c=f(1)$ ta được

$$f(x+1)=f(x)+c.$$

Kết hợp với giả thiết suy ra

$$f\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{f(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{f(x)+c}{(x+1)^2}; f\left(-\frac{1}{x+1}\right)=-\frac{f(x)+c}{(x+1)^2},$$

và

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right)=f\left(1+\frac{1}{x}\right)=f(1)+f\left(\frac{1}{x}\right)=c+\frac{f(x)}{x^2}=\frac{cx^2+f(x)}{x^2}.$$

Do đó

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right)=f\left(-\frac{1}{x+1}+1\right)=-\frac{f(x)+c}{(x+1)^2}+c=\frac{cx^2+2cx-f(x)}{(x+1)^2}. \tag{3.3}$$

Mặt khác

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right)=f\left(\frac{1}{\dfrac{x+1}{x}}\right)=\frac{f\left(\dfrac{x+1}{x}\right)}{\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2}=\frac{cx^2+f(x)}{(x+1)^2}. \tag{3.4}$$

Từ (3.3) và (3.4) suy ra

$$\frac{cx^2+2cx-f(x)}{(x+1)^2}=\frac{cx^2+f(x)}{(x+1)^2}.$$

Do đó $f(x)=cx,\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0,-1\}$. Lấy $x=1$. Vì f là nghiệm của phương trình hàm Cauchy nên $f(-1)=-c$. Sau khi thử lại ta kết luận: $f(x)=cx,\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, với c là hằng số tùy ý.

Bài tập 1.6. Xác định tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm

$$f(ax+by+c)=Af(x)+Bf(y)+M,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}, \tag{3.5}$$

với a,b,c,A,B,M là các số thực thỏa mãn $abAB\neq 0$.

Lời giải.

Trường hợp 1. Phương trình (3.5) có nghiệm hằng $f(x) = k, \forall x \in \mathbb{R}$. Thay $f(x) = k$ vào (3.5) ta được

$$k = Ak + Bk + M \Leftrightarrow (1 - A - B)k = M.$$

+ Nếu $(1 - A - B) \neq 0$ thì $k = \dfrac{M}{1 - A - B}$. Khi đó $f(x) = \dfrac{M}{1 - A - B}$
+ Nếu $(1 - A - B) = 0$ và $M = 0$ thì $f(x) = k, \forall k \in \mathbb{R}$ là nghiệm phương trình (1).
+ Nếu $(1 - A - B) = 0$ và $M \neq 0$ thì phương trình không có nghiệm hằng.

Trường hợp 2. Phương trình (3.5) không có nghiệm hằng. Trong (3.5), đặt $x = \dfrac{u}{a}, y = \dfrac{v - c}{b}$ ta được

$$f(u + v) = Af(\frac{u}{a}) + Bf(\frac{v - c}{b}) + M.$$

+ Cho $v = 0$ ta được: $f(u) = Af(\dfrac{u}{a}) + Bf(-\dfrac{c}{b}) + M$.
+ Cho $u = 0$ ta được $f(v) = Af(0) + Bf(\dfrac{v - c}{b}) + M$.
+ Cho $u = 0, v = 0$ ta được $f(0) = Af(0) + Bf(0) + M$.
Suy ra

$$f(u + v) = f(u) + f(v) - f(0), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Từ đó ta có $g(x+y) = g(x)+g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$, với $g(x) = f(x) - f(0)$. Đây là phương trình hàm Cauchy cộng tính trên $\mathbb{R}$ nên $g(x) = \alpha x, \forall x \in \mathbb{R}$, α là số thực tùy ý. Do đó

$$f(x) = \alpha x + \gamma, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \gamma = f(0).$$

Để ý rằng vì f không phải là hàm hằng nên $\alpha \neq 0$. Thay $f(x) = \alpha x + \gamma$ vào (3.5) ta được

$$f(ax + by + c) = Af(x) + Bf(y) + M$$
$$\Leftrightarrow \alpha(ax + by + c) + \gamma = A(\alpha x + \gamma) + B(\alpha x + \gamma) + M$$
$$\Leftrightarrow (a\alpha - A\alpha)x + (b\alpha - B\alpha)y = A\gamma + B\gamma + M - c\alpha - \gamma$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a - A)\alpha = 0 \\ (b - B)\alpha = 0 \\ A\gamma + B\gamma + M - c\alpha - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = A \\ b = B \\ (A + B - 1)\gamma = c\alpha - M \end{cases}$$

+ Nếu $a = A, b = B, A + B \neq 1$ thì phương trình (3.5) có nghiệm

$$f(x) = \alpha x + \frac{c\alpha - M}{A + B - 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

+ Nếu $a = A, b = B, A + B = 1, c = M = 0$ thì phương trình (3.5) có nghiệm

$$f(x) = \alpha x + \gamma, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^*, \gamma \text{ tùy ý }.$$

+ Nếu $a = A, b = B, A + B = 1, c \neq 0, M \neq 0$ thì phương trình (3.5) có nghiệm

$$f(x) = \frac{M}{c}x + \gamma, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \gamma \text{ tùy ý }.$$

Kết luận:

- Nếu $(1-A-B) \neq 0$ thì $f(x) = \dfrac{M}{1-A-B}$.
- Nếu $(1-A-B) = 0$ và $M = 0$ thì $f(x) = k, \forall k \in \mathbb{R}$.
- Nếu $a = A, b = B, A + B \neq 1$ thì $f(x) = \alpha x + \dfrac{c\alpha - M}{A+B-1}, \forall x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^*$.
- Nếu $a = A, b = B, A + B = 1, c = M = 0$ thì $f(x) = \alpha x + \gamma, \forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*, \gamma$ tùy ý .
- Nếu $a = A, b = B, A+B = 1, c \neq 0, M \neq 0$ thì $f(x) = \dfrac{M}{c}x+\gamma, \forall x \in \mathbb{R}, \gamma$ tùy ý .

Bài tập 1.7. Xác định tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm

$$f(xy) = yf(x) + xf(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{3.6}$$

Lời giải. Vì $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ nên $xy \neq 0$. Chia hai vế của phương trình (3.6) cho xy ta được

$$\frac{f(xy)}{xy} = \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y}.$$

Đặt $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Khi đó $g(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ và

$$g(x+y) = g(x) + g(y).$$

Theo kết quả về nghiệm phương trình hàm Cauchy logaritthm suy ra

$$g(x) = c\,ln\,|x|.$$

Do đó $f(x) = cx\,ln\,|x|$.
Thử lại ta thấy $f(x) = cx\,ln\,|x|$, với mọi $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài tập 1.8. Nếu $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ là nghiệm của phương trình hàm Cauchy mũ

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{3.7}$$

thì $f(x) \equiv 0$ hoặc $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Lời giải. Trong (3.7) cho $y = 0$ ta được

$$f(x) = f(x)f(0) \Leftrightarrow f(x)(f(0) - 1) = 0.$$

\+ Nếu $f(0) \neq 1$ thì $f(x) \equiv 0$ là một nghiệm của phương trình (3.7).
\+ Nếu $f(0) = 1$. Giả sử $\exists y_0 \in \mathbb{R} : f(y_0) = 0$. Khi đó

$$f(0) = f(0 - y_0 + y_0) = f(-y_0)f(y_0) = 0 \text{ (mâu thuẫn).}$$

Do đó $f(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Vậy $f(x) \equiv 0$ hoặc $f(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài tập 1.9. Xác định tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + \lambda f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{3.8}$$

với λ là một số thực.

Lời giải. Nếu $\lambda = 0$ thì (3.8) trở thành

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Khi đó $f(x) = ax$, với a là số thực tùy ý.

Ta xét trường hợp $\lambda \neq 0$. Đặt $f(x) = \dfrac{g(x)-1}{\lambda}$, khi đó ta có phương trình

$$\frac{g(x+y)-1}{\lambda} = \frac{g(x)-1}{\lambda} + \frac{g(y)-1}{\lambda} + \lambda \left[\frac{g(x)-1}{\lambda}\right]\left[\frac{g(y)-1}{\lambda}\right].$$

Biến đổi phương trình trên ta được

$$g(x+y) = g(x)g(y).$$

Suy ra $g(x) \equiv 0$ hoặc $g(x) = e^{cx}$, với c là số thực tùy ý.

Do đó $f(x) = -\dfrac{1}{\lambda}$ hoặc $g(x) = \dfrac{e^{cx}-1}{\lambda}$. Thử lại kết quả ta có kết luận sau:

- Nếu $\lambda = 0$ thì $f(x) = ax$, với a là số thực tùy ý.
- Nếu $\lambda \neq 0$ thì $f(x) = -\dfrac{1}{\lambda}$ hoặc $g(x) = \dfrac{e^{cx}-1}{\lambda}$, với c là số thực tùy ý.

Bài tập 1.10. Xác định tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm

$$f(x+y) = a^{xy} f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{3.9}$$

với a là một số thực dương.

Lời giải. Ta dễ dàng kiểm tra được $f(x) \equiv 0$ là một nghiệm của (3.9). Xét trường hợp $f(x)$ không đồng nhất bằng 0. Khi đó tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Từ (3.9) thì

$$f(x_0) = f(x + (x_0 - x)) = a^{x(x_0-x)} f(x) f(x_0 - x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = a^{\frac{x^2}{4}} \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0, \quad \forall \in \mathbb{R}.$$

Lấy logaritthm cơ số a hai vế (3.9) ta được

$log_a f(x+y) = log_a f(x) + log_a f(y) + xy$

$\Leftrightarrow log_a f(x+y) - \dfrac{1}{2}(x+y)^2 = log_a f(x) - \dfrac{1}{2}x^2 + log_a f(y) - \dfrac{1}{2}y^2.$

Đặt $g(x) = log_a f(x) - \dfrac{1}{2}x^2$. Khi đó $g(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đây là phương trình hàm Cauchy cộng tính trên $\mathbb{R}$, nên $g(x) = cx$, với c là hằng số tùy ý. Suy ra

$$log_a f(x) - \frac{1}{2}x^2 = cx,$$

hay

$$f(x) = a^{\frac{1}{2}x+cx}.$$

Thử lại ta có $f(x) \equiv 0$ hoặc $f(x) = a^{\frac{1}{2}x+cx}, \forall x \in \mathbb{R}$ với c là số thực tùy ý là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài tập 1.11. Xác định tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

Lời giải. Trong (3.10) cho $y = 0$ ta được $f(|x|) = f(x)$.
Đặt $|x| = \sqrt{u}, |y| = \sqrt{v}$ ta có phương trình

$$f(\sqrt{u+v}) = f(\sqrt{u})\, f(\sqrt{v}), \quad \forall u, v \geq 0.$$

Đặt $g(u) = f(\sqrt{u})$ ta được phương trình

$$g(u+v) = g(u)g(v), \quad \forall u, v \geq 0.$$

Suy ra $g(u) \equiv 0$ hoặc $g(u) = e^{au}, \forall u \geq 0$, a là số thực tùy ý.
Do đó $f(x) \equiv 0$ hoặc $f(x) = e^{ax^2}$.
Thử lại ta được $f(x) \equiv 0$ hoặc $f(x) = e^{ax^2}, \forall x \in \mathbb{R}$, a là số thực tùy ý.

Bài tập 1.12. Xác định tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.11}$$

Lời giải. Trong (3.11) cho $y = 0$ ta được $f(|x|) = f(x)$.
Đặt $|x| = \sqrt{u}, |y| = \sqrt{v}$ ta có phương trình

$$f(\sqrt{u+v}) = f(\sqrt{u})\, f(\sqrt{v}), \quad \forall u, v \geq 0.$$

Đặt $g(u) = f(\sqrt{u})$ ta được phương trình

$$g(u+v) = g(u) + g(v), \quad \forall u, v \geq 0.$$

Suy ra $g(u) = au, \forall u \geq 0$, a là số thực tùy ý.
Do đó $f(x) = ax^2$.
Thử lại ta được $f(x) = ax^2, \forall x \in \mathbb{R}$, a là số thực tùy ý.

Bài tập 1.13. Xác định tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm

$$[f(x) + f(y)][f(u) + f(v)] = f(xu - yv) + f(xv + yu),$$

với mọi $x, y, u, v \in \mathbb{R}$.

Bài tập 1.14. Xác định tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn hai phương trình hàm

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{và} \quad f(xy) = f(x)f(y),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Bài tập 1.15. Xác định tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm

$$f(x + y) + f(x)f(y) = f(xy) + f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 1.16. Xác định tất cả các hàm số liên tục $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm

$$f(x + y) = f(x)g(y) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 1.17. Xác định tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm

$$f(x + y) + f(x)f(y) = f(xy) + f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

3.2 Phương trình hàm Jensen

Bài tập 2.1. Xác định tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm

$$\left[f\left(\frac{x + y}{2}\right)\right]^2 = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.12}$$

Lời giải. Dễ thấy $f(x) \equiv 0$ là nghiệm của phương trình đã cho. Giả sử $f(x) \neq 0$, nghĩa là tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Từ (3.12) ta có

$$f(x)f(2x_0 - x) = \left[f\left(\frac{x + 2x_0 - x}{2}\right)\right]^2 = f^2(x_0) > 0.$$

Suy ra $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Lấy logaritthm cơ số tự nhiên hai vế (3.12) ta được

$$ln\left[f\left(\frac{x + y}{2}\right)\right]^2 = ln\,(f(x)f(y)),$$

hay

$$ln\,f\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{1}{2}[ln\,f(x) + ln\,f(y)].$$

Đặt $g(x) = ln\,f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $g(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$g\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{g(x) + g(y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đây là phương trình hàm Jensen trên $\mathbb{R}$, do đó $g(x) = \alpha x + \gamma, \forall x \in \mathbb{R}$, với α, γ là hằng số tùy ý.
Suy ra
$$ln\, f(x) = \alpha x + \beta \Rightarrow f(x) = e^{\alpha x + \gamma} = a\, e^{\alpha x} \quad (a = e^{\gamma}).$$
Thử lại thấy hàm số $f(x) = a\, e^{\alpha x}, \forall x \in \mathbb{R} \quad (a, \alpha$ là hằng số $, a > 0)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Trường hợp 2. $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $-f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Theo trường hợp 1 suy ra
$$-f(x) = b\, e^{\beta x}, \forall x \in \mathbb{R} \quad (b, \beta \text{ là hằng số } , b > 0).$$
Nên
$$f(x) = c\, e^{\lambda x}, \forall x \in \mathbb{R} \quad (c, \lambda \text{ là hằng số }).$$
Thử lại ta có hàm số f cần tìm là $f(x) \equiv 0$ và $f(x) = c\, e^{\lambda x}, \forall x \in \mathbb{R} \quad (c, \lambda$ là hằng số $)$.

Bài tập 2.2. Xác định tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm
$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}, \qquad \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

Lời giải. Trong phương trình (3.13) cho $z = 0$ ta được
$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x)+f(y)+f(0)}{3}.$$
hay
$$f\left(\frac{\frac{2x}{3}+\frac{2y}{3}}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)+f(0)}{3}. \tag{3.14}$$
Cho $z = 0, y = x$ ta có $f\left(\frac{2x}{3}\right) = \frac{2f(x)+f(0)}{3}$.
Cho $z = 0, x = y$ ta có $f\left(\frac{2y}{3}\right) = \frac{2f(y)+f(0)}{3}$.
Cộng hai kết quả trên ta được
$$\frac{f(x)+f(y)+f(0)}{3} = \frac{f\left(\frac{2x}{3}\right)+f\left(\frac{2y}{3}\right)}{2}. \tag{3.15}$$
Từ (3.14) và (3.15) ta có
$$f\left(\frac{\frac{2x}{3}+\frac{2y}{3}}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{2x}{3}\right)+f\left(\frac{2y}{3}\right)}{2}, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
Đây là phương trình hàm Jensen trên $\mathbb{R}$ nên có nghiệm $f(x) = ax + b$, với a, b là các số thực tùy ý.

Thử lại ta có $f(x) = ax + b$, với a, b là các số thực tùy ý là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài tập 2.3. Xác định tất cả các hàm số liên tục $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}, \qquad \forall x, y, z \in [0,1]. \tag{3.16}$$

Lời giải. Ta thực hiện biến đổi phương trình (3.16) tương tự Bài tập 2.2 ta được

$$f\left(\frac{\frac{2x}{3}+\frac{2y}{3}}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{2x}{3}\right)+f\left(\frac{2y}{3}\right)}{2}, \qquad \forall x, y \in [0,1].$$

Đặt $u = \frac{2x}{3}, v = \frac{2y}{3} (u, v \in [0, \frac{2}{3}])$, ta được phương trình

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{f(u)+f(v)}{2}, \quad u, v \in [0, \frac{2}{3}].$$

Đây là phương trình hàm Jensen trên đoạn $[0, \frac{2}{3}]$.

Theo Định lý 2.13 ta có $f(u) = a'u + b$, với a, b là các số thực tùy ý.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $f(x) = ax + b$, với $a = \frac{2}{3}a'$, $\forall x \in [0,1]$.